

Модуль 1. Полный перебор

Лекция 3

Метод ветвей и границ.

План лекции

- Метод ветвей и границ
 - Общий принцип
 - МВГ для задачи коммивояжёра
 - Варианты ветвления
 - Варианты оценки
- Задание 3.

Метод ветвей и границ

- Предназначен в первую очередь для решения NP-трудных оптимизационных задач.
- Сочетание двух операций:
 - Ветвление.
 - Оценка верхней/нижней границы и «отсечение» неперспективной ветви.

Метод ветвей и границ

- Ветвление

- Всё множество допустимых решений $S(x)$ последовательно делится на подмножества:

$$S = \bigcup S_i$$

- Подмножества рекурсивно делятся дальше:

$$S_i = \bigcup S_{i,j}$$

- Для разделения множества решений на подмножества обычно последовательно накладывают условия/ограничения, которым должны удовлетворять решения из заданного подмножества.

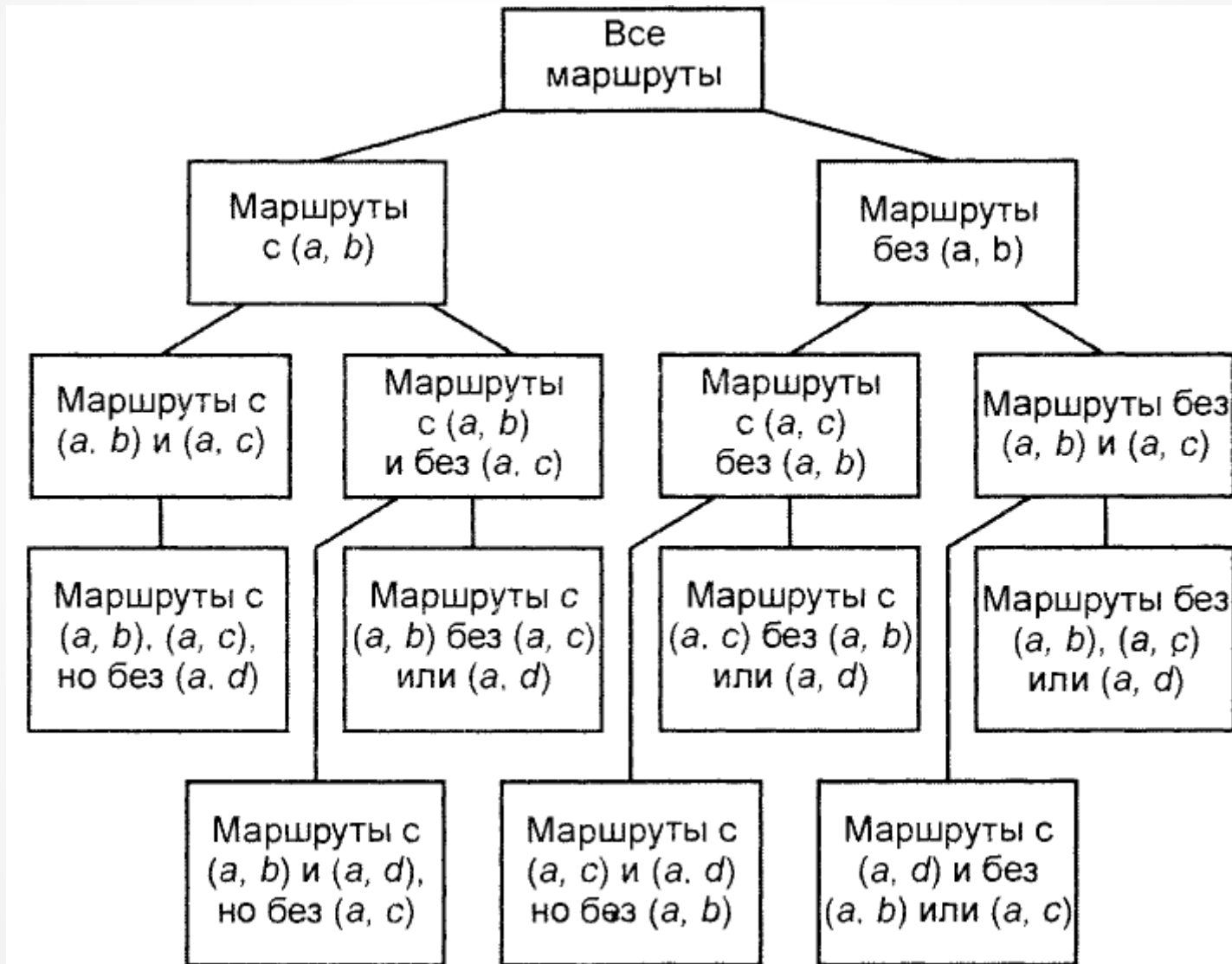
Метод ветвей и границ

Примеры ограничений для задачи коммивояжёра

- По принципу «содержит» / «не содержит» указанные дуги (алгоритм Литтла).

Выбрать дугу $e \in E$ и разделить $S(x)$ на два подмножества: $S_{\{e\}}(x) = \{Z : e \in Z\}$ и $S_{\{\bar{e}\}}(x) = \{Z : e \notin Z\}$. Потом выбираем другую дугу и аналогичным образом делим $S_{\{e\}}(x)$ и $S_{\{\bar{e}\}}(x)$ на более мелкие подмножества.

Метод ветвей и границ



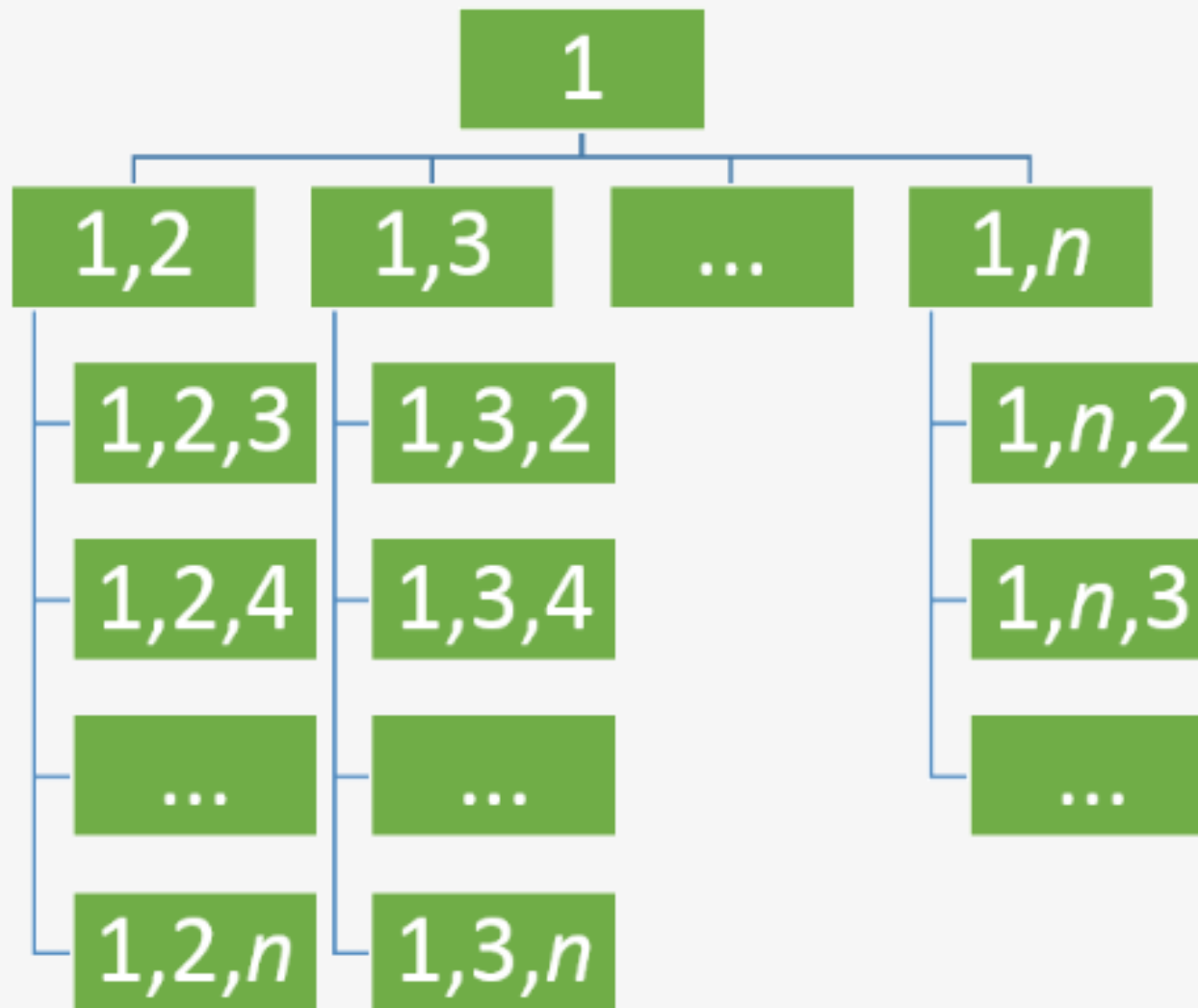
Метод ветвей и границ

Примеры ограничений для задачи коммивояжёра

- Частичный путь

Фиксируем фрагмент цикла — какие вершины цикл проходит последовательно друг за другом. Стартовая вершина всегда фиксирована: «1». Поэтому разделяем все возможные циклы на подмножества, содержащие фрагменты: «1,2», «1,3», ..., «1, n ». Потом делим множество «1,2»: «1,2,3», «1,2,4», ..., «1,2, n ».

Метод ветвей и границ



Метод ветвей и границ

Принцип отсечения неперспективных ветвей:

- Вычисляем оценку («границу») стоимости решений, входящих в анализируемое подмножество. Для задач минимизации вычисляем оценку снизу, для максимизации — оценку сверху.
- Сравниваем оценку со стоимостью рекордного (наилучшего на данный момент) решения. Если оценка хуже (для минимизации — выше, для максимизации — меньше), чем рекордное решение — данное подмножество далее не анализируем.

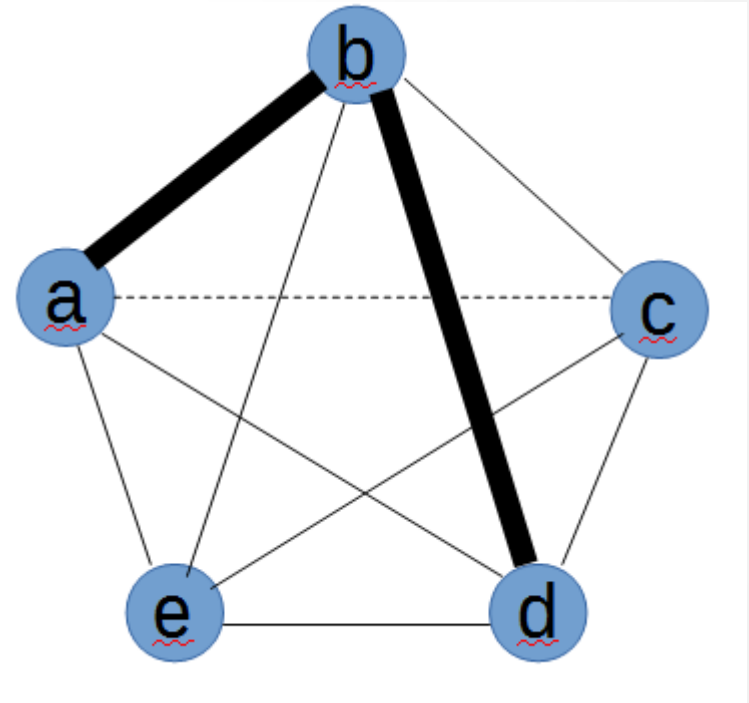
Важно иметь в виду: на вычисление оценки также тратится время, и важно соблюдать баланс между качеством оценки и сложностью её вычисления. Возможный вариант: применять разные оценки на разных уровнях «дерева перебора»: на верхних уровнях более сложные, но более точные, на низших уровнях — менее точные, но более быстрые (**подумайте — почему так?**).

Метод ветвей и границ

Варианты вычисления границ (оценка снизу) для задачи коммивояжёра:

- (1) Выбрать минимальную стоимость дуги (ещё не включённой в цикл), умножить на количество ещё не пройденных вершин графа и прибавить стоимости дуг, уже включённых в цикл.

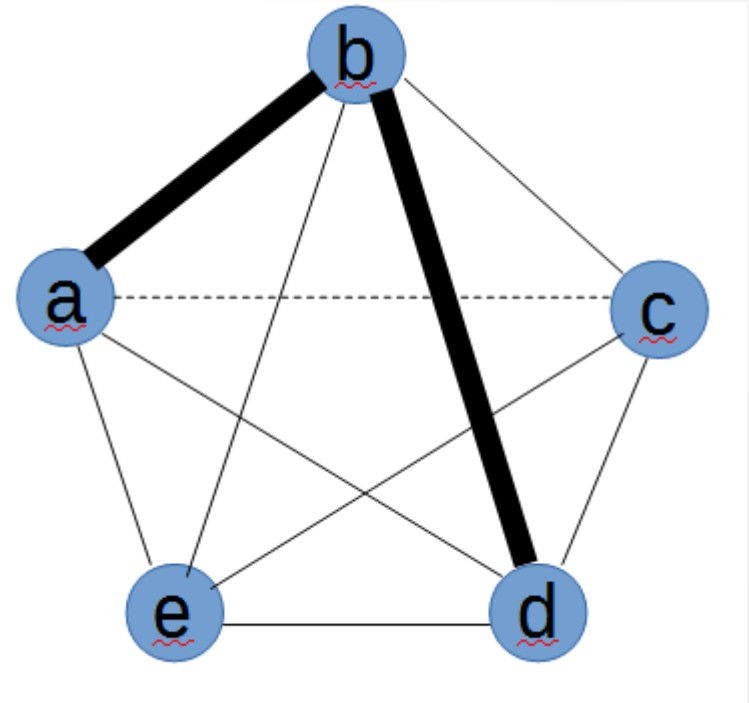
$$c' = c(a,b) + c(b,d) + 3 * c(a,c)$$



Метод ветвей и границ

Варианты вычисления границ (оценка снизу) для задачи коммивояжёра:

(2) Для каждой вершины найти две инцидентные ей дуги наименьшей стоимости (обязательно включая дуги, уже вошедшие в цикл — если такие есть) и взять их среднее арифметическое. В качестве оценки использовать сумму этих средних



Задание 3

Разработать программу решения задачи коммивояжёра.

- Дано:
 - Граф (неориентированный или ориентированный).
- Необходимо:
 - Найти точное решение ЗК перебором обобщённых слов.
 - Найти точное решение ЗК перебором перестановок.
 - Найти точное решение методом ветвей и границ. Принцип ветвления: по вашему желанию.
Расчёт границы: по вашему желанию.
 - Для каждого метода рассчитать время и количество вызовов метода `Process()` либо метода расчёта границы.

Задание 3

Формат входного файла: аналогичен формату для задания 2, но для каждого ребра в строке указано: начало, конец, стоимость.

```
5 8  
1 2 3  
1 3 4  
1 5 7  
2 3 4  
2 4 6  
3 4 5  
3 5 8  
4 5 6
```

Оптимальное решение: 25.