

Лабораторная работа № 3
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С
АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ: УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ
УПРУГОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

1. Акустические конечные элементы
2. Плоская задача
3. Гармонический анализ
4. Неотражающие граничные условия для моделирования «бесконечных» областей

ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим трубу, погруженную в морскую воду. Вода занимает настолько большую область, что можно считать ее бесконечно протяженной по всем направлениям. Труба является двухслойной и состоит из различных материалов. Внутренний радиус трубы $R_1=0.25$ (м), внешний радиус $R_3=0.27$ (м), срединный радиус, разграничивающий два слоя, $R_2=0.26$ (м), Первый слой $R_1 \leq r \leq R_2$ выполнен из изотропного материала (стали) с модулем Юнга $E_1=2 \cdot 10^{11}$ (Н/м²), коэффициентом Пуассона $\nu_1=0.29$ и плотностью $\rho_1=7860$ (кг/м³). Второй слой $R_2 \leq r \leq R_3$ выполнен из другого изотропного материала (меди) с модулем Юнга $E_2=1.2 \cdot 10^{11}$ (Н/м²), коэффициентом Пуассона $\nu_2=0.33$ и плотностью $\rho_2=8900$ (кг/м³). Примем, что плотность морской воды $\rho_a=1030$ кг/м³, а скорость звука в морской воде $c_0=c_a=1560$ м/с.

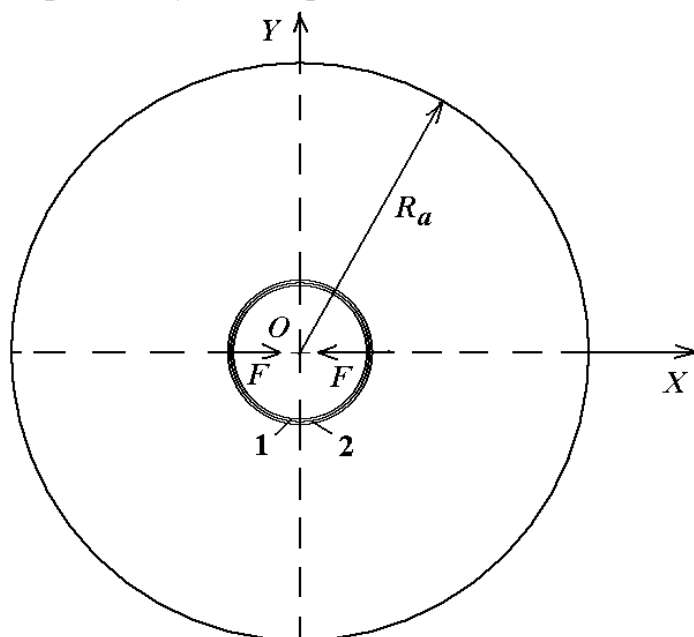


Рис. 1 Геометрия задачи

Поскольку труба имеет достаточно большую длину вдоль осевого направления и внешние воздействия приложены равномерно по оси, то можно рассматривать двумерную задачу о плоской деформации для поперечного сечения трубы в жидкости (рис. 1). Область, занимаемую жидкостью, ограничим большим радиусом R_a . На границе $r=R_a$ будем использовать неотражающие граничные условия, которые будем моделировать или импедансными граничными условиями, или специальными акустическими конечными элементами ANSYS для бесконечных областей.

В задаче требуется проанализировать в режиме установившихся колебаний поля перемещений в твердом теле и поля давления в жидкости в окрестности той наименьшей резонансной частоты f_r , моды колебаний которой можно возбудить двумя сосредоточенными силами $F = \tilde{F} \exp[i2\pi ft]$ с амплитудами $\tilde{F} = 100$ Н, приложенными в двух точках на внутренней границе кольца (поперечного сечения трубы) в противоположных направлениях, как показано на рис. 1.

Краткие сведения о технике решения в ANSYS задач о взаимодействии твердых тел с акустическими средами

Среди множества задач акустики, большой интерес представляют задачи о взаимодействии твердых деформируемых излучателей с акустическими средами. Излучатели обычно являются упругими или пьезоэлектрическими телами, которые под действием приложенных управляющих воздействий совершают установившиеся колебания или нестационарные движения. Если эти тела погружены в акустические среды, то границы твердых и жидких сред взаимодействуют между собой. В результате и в акустических средах начинают распространяться акустические волны, которые и необходимо проанализировать для задач данного типа (распределения давления, градиентов давления, скорости, уровня звукового давления).

Довольно часто излучатели имеют много меньшие размеры по сравнению с внешней акустической средой, и явления отражения акустических волн от их удаленных границ не представляют особого интереса. В таких случаях можно искусственно «обрезать» размеры акустической среды, поставив на новых границах «неотражающие» граничные условия. Такие условия в идеале должны моделировать процессы прохождения акустических волн через эти границы без отражения.

Задачи о взаимодействии твердых тел с акустическими средами являются динамическими задачами (задачами об установившихся колебаниях или нестационарными задачами). Поэтому для обеспечения приемлемой точности решения размеры конечных элементов должны выбираться не только из оценок погрешности для статических задач типа $O(h_s^p / \sin \varphi)$, где h_s – максимальный размер элемента, φ – ми-

нимальный угол при вершине элемента, p – степень аппроксимирующего полинома, но и должны быть связаны с длинами характерных волн. Например, если c_0 – скорость акустических волн, а излучатель колеблется с частотой f , то характерные длины волн λ можно приближенно определить по формуле: $\lambda = c_0 / f$. Тогда, в зависимости от типа конечного элемента, его рекомендуемый размер h_d для корректного учета осцилляции значений акустических полей можно принять $h_d = \lambda / 10$ (для элементов с промежуточными узлами) или $h_d = \lambda / 20$ (для элементов без промежуточных узлов). Для малых значений частот f размер h_d может значительно превосходить h_s , и поэтому не приниматься во внимание. Однако для больших частот вполне возможны ситуации, когда $h_d \ll h_s$, т.е. размер элементов, связанный с осцилляциями значений акустических полей за период колебаний, является определяющим.

Таким образом, в рассматриваемых задачах требуется определить границы взаимодействия твердых и акустических сред, неотражающие границы (если в этом есть необходимость) и установить разумные параметры конечно-элементных сеток.

Следует отметить, что возможности комплекса ANSYS при решении задач акустики существенно расширились за последние годы. В данном пособии базовой версией является релиз ANSYS 11.0, и поэтому основное внимание будет уделено акустическому анализу именно в этой версии ANSYS, но кратко будут отмечены и новые средства ANSYS старших версий.

Для акустического анализа в ANSYS 11.0 предлагаются два основных типа элементов: **FLUID29** и **FLUID30**, размерности 2-D и 3-D, соответственно. **FLUID29** является четырехугольным элементом с четырьмя узлами и имеет вариант с треугольной формой. **FLUID30** является восьмиузловым гексаэдральным элементом и имеет варианты с призматической и тетраэдральной формами. Элементы **FLUID29** и **FLUID30** могут находиться в контакте с аналогичными твердотельными элементами (как с упругими, так и с пьезоэлектрическими), например с **PLANE13**, **PLANE42**, **SOLID5**, **SOLID45**, и др. Естественно, что для обеспечения согласованности конечно-элементных разбиений здесь нужно выбирать элементы той же формы.

Для акустических элементов, которые контактируют с твердотельными элементами, нужно обязательно использовать опцию **KEYOPT(2)=0** (разрешение взаимодействия). Это приводит к несимметричной конечно-элементной матрице. Для всех других акустических элементов, можно установить **KEYOPT(2) = 1**, что позволит получить симметричные конечно-элементные матрицы. Поскольку решение алгебраических систем с симметричными матрицами требует гораздо меньше места в

памяти и машинного времени, то по возможности рекомендуется использовать симметричные матрицы.

Для акустических элементов в ANSYS необходимо задать следующие значения материальных параметров (**MP**): *DENS* – плотность жидкости ρ_0 , *SONC* – скорость звука c_0 .

Если существует поглощение звука на границе раздела сред (граница Γ_{ai} с импедансом Z), то используется дополнительный материальный параметр *MU* для указания коэффициента поглощения $\beta = Z / Z_0$, $Z_0 = c_0 \rho_0$. Значение β обычно определяется из экспериментальных измерений, но чем ближе β к единичному значению, тем сильнее поглощение, а для одномерных задач $\beta = 1$ обеспечивает на импедансной границе Γ_{ai} полное поглощение плоских акустических волн.

Более современные подходы связаны с акустическими конечными элементами **FLUID129** и **FLUID130**, которые могут применяться вместе с **FLUID29** и **FLUID30** для моделирования бесконечно протяженных областей. Эти элементы реализуют неотражающие граничные условия второго порядка, которые дают более точные результаты по сравнению с обычными импедансными границами Γ_{ai} .

Элементы **FLUID129** и **FLUID130** могут находиться в контакте только с **FLUID29** и **FLUID30**, соответственно, но не с упругими и не с пьезоэлектрическими твердотельными элементами. Внешняя граница сетки акустических конечных элементов, покрытая элементами **FLUID129** или **FLUID130**, должна иметь форму окружности (для 2-D и осесимметричных элементов) или сферы (для 3-D). Радиус окружности или сферической границы ограниченной области, а также координаты центра окружности или сферы должны быть указаны в элементных константах **R**.

Как указывается в документации ANSYS, применение бесконечных элементов дает хорошие результаты, как для низких, так и для высоких частот. В ANSYS отмечается, что хорошая точность решения достигается при расположении бесконечных элементов приблизительно на расстоянии $\lambda/5$ за пределами области, которую занимает твердое тело. Здесь $\lambda = c_0 / f$ – доминирующая длина волны волн давления. Например, в случае погружения кольца или сферической оболочки радиуса R_s радиус внешней границы $R_a = RAD$, на которую могут быть помещены бесконечные элементы, может быть равен примерно $R_s + \lambda/5$. Более точные оценки могут быть получены в результате вычислительных экспериментов при различных значениях R_a . Кроме того, надо учитывать, что акустические поля на больших расстояниях от сосредоточенного источника в точке ξ в плоских задачах затухают как $1/\sqrt{R}$, где

$$R = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}, \quad \text{и в трехмерных задачах как } 1/r, \quad \text{где} \\ r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}.$$

Особенности анализа результатов решений задач о взаимодействии твердых тел с акустическими средами в постпроцессорах ANSYS связаны с тем, что полевые функции, связанные с твердыми телами и с акустическими средами, заданы в разных областях. Поэтому, например, если нужно показать формы колебаний упругого или пьезоэлектрического тела, то вначале нужно выделить только упругие или пьезоэлектрические элементы и только потом выводить формы колебаний. Аналогично, если представляют интерес, например, поля давлений **PRES** в акустической среде, то предварительно нужно выделить акустические элементы, и лишь потом применять команды типа **PLNSOL,PRES**.

В более старших версиях ANSYS для акустического анализа появилось множество нововведений: модели акустических жидкостей с поглощением (**MP, VISC, MAT, CO**); элементы **FLUID220** и **FLUID221** с промежуточными узлами для трехмерных задач; симметричные решатели для задач с взаимодействием твердых и жидких сред (FSI); новые импедансные граничные условия, как, например, идеально поглощающий слой “perfectly matched layer” (PML) и др. Кроме того, разработанные инструменты Application Customization Toolkit (ACT) теперь предоставляют ряд удобных средств для проведения акустических расчетов в среде ANSYS Workbench.

К сожалению, качество документации по новым средствам акустического анализа в ANSYS оставляет желать лучшего, но для более углубленного ознакомления с акустическим анализом в ANSYS можно дополнительно порекомендовать объемную монографию с примерами, доступными по ссылке: <http://www.mecheng.adelaide.edu.au/avc/software>.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ANSYS)

Прежде всего, заметим, что задача симметрична относительно оси X и оси Y . Поэтому можно рассматривать четверть модели, например, при $X \geq 0$, $Y \geq 0$. Важно учесть, что поскольку сила F действует на обе половинки модели $Y \geq 0$ и $Y \leq 0$, то для рассматриваемой части надо взять половинное значение силы $F/2$.

Рассчитаем вначале собственные частоты излучателя без учета жидкости, выполнив файл **FE_Mod_CP_mod.inp**

В результате выполнения этого вспомогательного файла получаем значения первых четырех собственных частот излучателя без учета жидкости и формы колебаний на этих частотах (рис. 2). Здесь элементы, имеющие различные материальные

свойства, выделены отдельным цветом: свойства типа 1 – бирюзовый цвет, свойства типа 2 – фиолетовый. Отметим, что начальное значение FBEG частотного диапазона, в котором ищались собственные частоты, было взято немного большим нуля, чтобы не находились нулевые частоты движения тела как жесткого целого. (Правда, в данной задаче в силу рассмотрения четверти модели с условиями симметрии нулевых частот быть не может, и здесь это сделано только для удобства использования команд из приведенного файла при исследовании других задач.)

Интуитивно ясно, что сосредоточенными силами, изображенными на рис. 1, при соответствующих f можно возбудить колебания на всех первых четырех собственных частотах. При наличии жидкости значения всех резонансных частот уменьшатся, и, по-видимому, значение вещественной части первой собственной частоты излучателя в жидкости можно ожидать в районе 130 Гц. (Для излучателя без жидкости по программе FE_Mod_CP_3_sm.inp была получена первая собственная частота $f_{sr1} = 164.313$ Гц.)

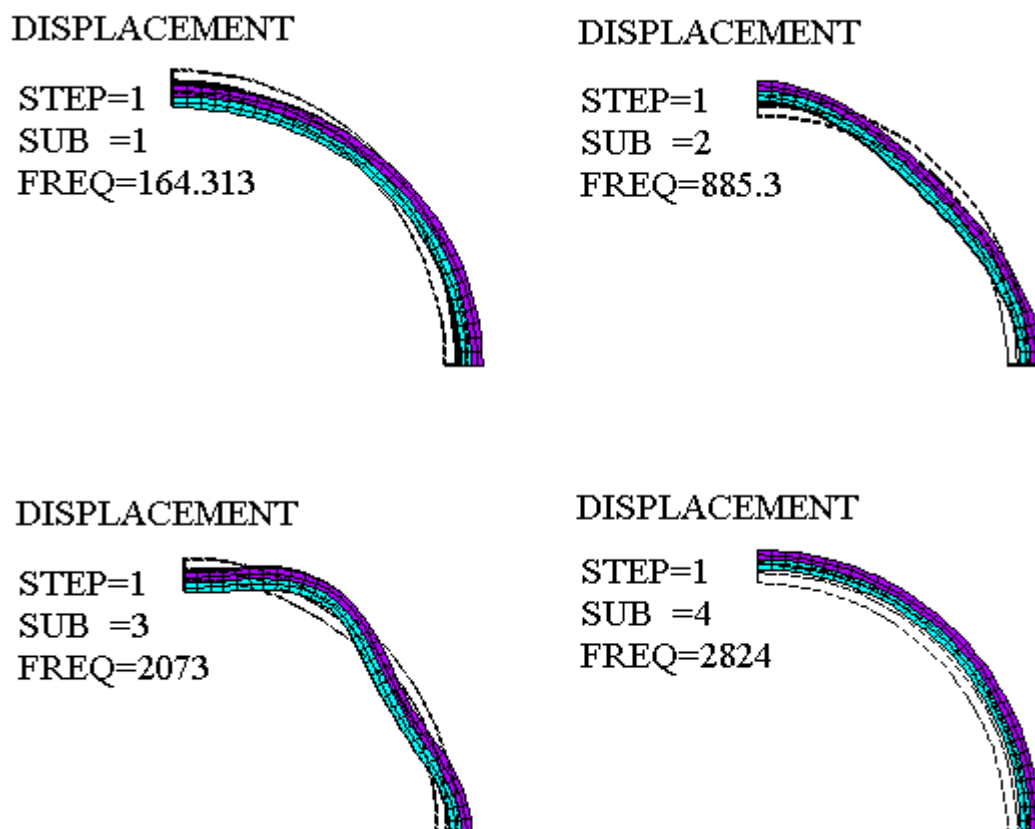


Рис. 2 Формы собственных колебаний излучателя без жидкости

Аналогичным образом, можно было бы провести модальный анализ (решение задачи на собственные значения) для излучателя в жидкости, и уточнить значения

ожидаемой первой собственной частоты. Пропуская этот шаг, перейдем сразу к решению задачи об установившихся колебаниях упругого излучателя в акустической среде. Выберем расчетный частотный интервал $f_{beg} \leq f \leq f_{end}$; $f_{beg} = 100$ Гц; $f_{end} = 150$ Гц; и число значений по частоте $n_{freq} = 100$. Таким образом, задача об установившихся колебаниях излучателя в жидкости будет решаться $n_{freq} = 100$ раз с шагом по частоте $\Delta f = (f_{end} - f_{beg}) / n_{freq} = 0.2$ Гц для частот $f_k = f_{beg} + k\Delta f$, $k = 1, 2, \dots, n_{freq}$. Резонансной частотой f_r назовем то значение частоты из массива f_k , $k = 1, 2, \dots, n_{freq}$, при котором достигается максимальная величина амплитуды перемещения $\tilde{u}_y$ или акустического давления $\tilde{p}$ ($u_y = \tilde{u}_y \exp[i2\pi ft]$; $p = \tilde{p} \exp[i2\pi ft]$) в верхней точке излучателя $X = 0$, $Y = R_3$. При этом следует помнить, что даже если бы конечно-элементные расчеты были бы полностью точны, здесь уже заложена абсолютная погрешность определения частоты $\Delta f = 0.2$ Гц, или относительная погрешность $(\Delta f / f_{beg}) \cdot 100 \% = 0.2 \%$.

Расстояние, на которое нужно поместить бесконечные элементы, по рекомендации руководства ANSYS должно быть равно не менее $R_s + \lambda/5$, где R_s – внешний диаметр кольца, $\lambda = c_0 / f$ – доминирующая длина волны волн давления. В данной задаче внешний радиус кольца равен $R_s = R_3 = 0.27$ м, скорость звука в воде $c_0 = c_a = 1560$ м/с, доминирующая частота оценивается как $f = 130$ Гц. Тогда $R_3 + \lambda/5 = 0.27 + 1560/130/5 = 2.67$ (м). Однако, в данной задаче при очень низкочастотных колебаниях можно ожидать, что это расстояние будет намного больше допустимого расстояния для расположения бесконечных акустических элементов. Поэтому в качестве базового значения R_a радиуса расположения акустических элементов **FLUID129** или импедансных акустических границ примем $R_a = 4R_s = 1.08$ м. Результаты, полученные при этом значении, сравним также с результатами при $R_a = 2R_s$ и $R_a = 8R_s$.

При очень большой длине волны $\lambda = c_0 / f \approx 12$ (м) ограничение на размер конечных элементов $h_d = \lambda / 20 \approx 0.6$ (м) оказывается больше, чем значение внешнего радиуса кольца $R_s = R_3 = 0.27$ (м). В качестве базового примем разбиение областей каждого из материала кольца по толщине HDIV=2*SM, разбиение по окружному направлению линий кольца и акустической области TDIV=32*SM, а разбиение акустической области HADIV=32*SM, где SM=1. Конечные элементы в акустической области будем строить с увеличением их длины вдоль радиальных направлений с

множителем $SPACE=3$. При анализе сходимости параметр SM будем менять как в сторону увеличения ($SM=2$), так и в сторону уменьшения ($SM=0.5$).

Основная программа для расчета установившихся колебаний кольца в акустической среде **FE_Mod_CP_ha.inp** использует для моделирования неотражающих границ акустические конечные элементы **FLUID129**.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Данная программа строит конечно-элементную сетку, показанную на рис. 3, где слева (а) элементы раскрашены по материальным свойствам, а справа (б) – по типам элементов. Кроме того на рис. 3, б) отмечена граница с узлами акустических элементов **FLUID29,,0**, для которых установлен флаг взаимодействия с твердотельной структурой FSI.

Напомним, что для вывода конечно-элементной сетки в интерактивном режиме следует выполнить: *Plot->Elements*. При этом предварительно для раскраски элементов по номерам материальных свойств без вывода самих номеров материальных свойств нужно проделать следующий путь: *PltCtrls->Numbering->Elem/Attrib numbering->Material numbers-> [NUM] Numbering shown with ->Colors only->OK*, а для раскраски элементов по номерам типов элементов без вывода самих типов элементов: *PltCtrls->Numbering->Elem/Attrib numbering->Element type num ->Material numbers-> [NUM] Numbering shown with ->Colors only->OK*.

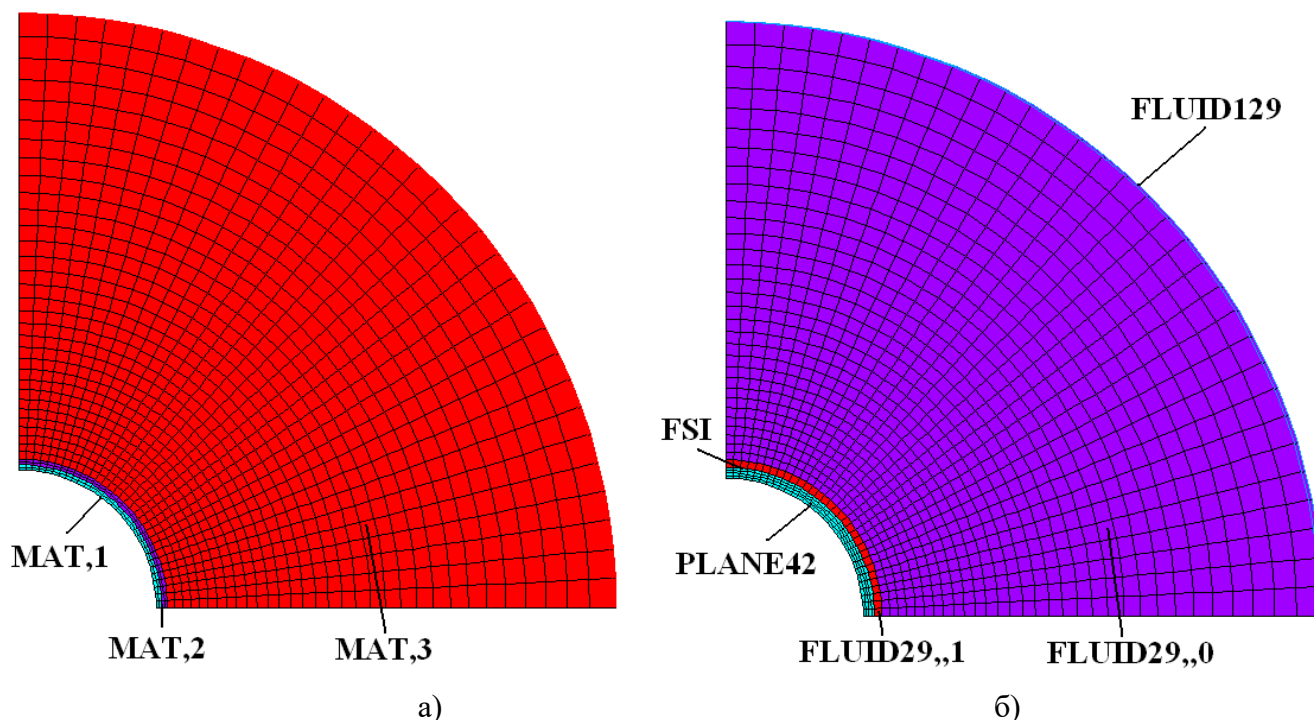


Рис. 3. Конечно-элементная сетка:
(а) -- с выделением MAT; (б) -- с выделением TYPE

В завершении выполнения программы в постпроцессоре **/POST26** данные о частотной характеристике перемещения $\tilde{u}_y$ в крайней точке излучателя ($X=0, Y=R_3$) записываются в файл результатов **FE_Mod_CP_3_ha_4_SM1.res**, и $\text{Re} \tilde{u}_y$ выводится на экран в виде графика (рис. 4, а). Выполнение команды **PLVAR,3** затем дает график зависимости $|\tilde{u}_y|$ в этой же точке от частоты (рис. 4, б). Кроме того, в переменную FRES заносится значение резонансной частоты, которое записывается также в файл результатов. В итоге получаем, что значение резонансной частоты равно $f_r = 126.5$ Гц.

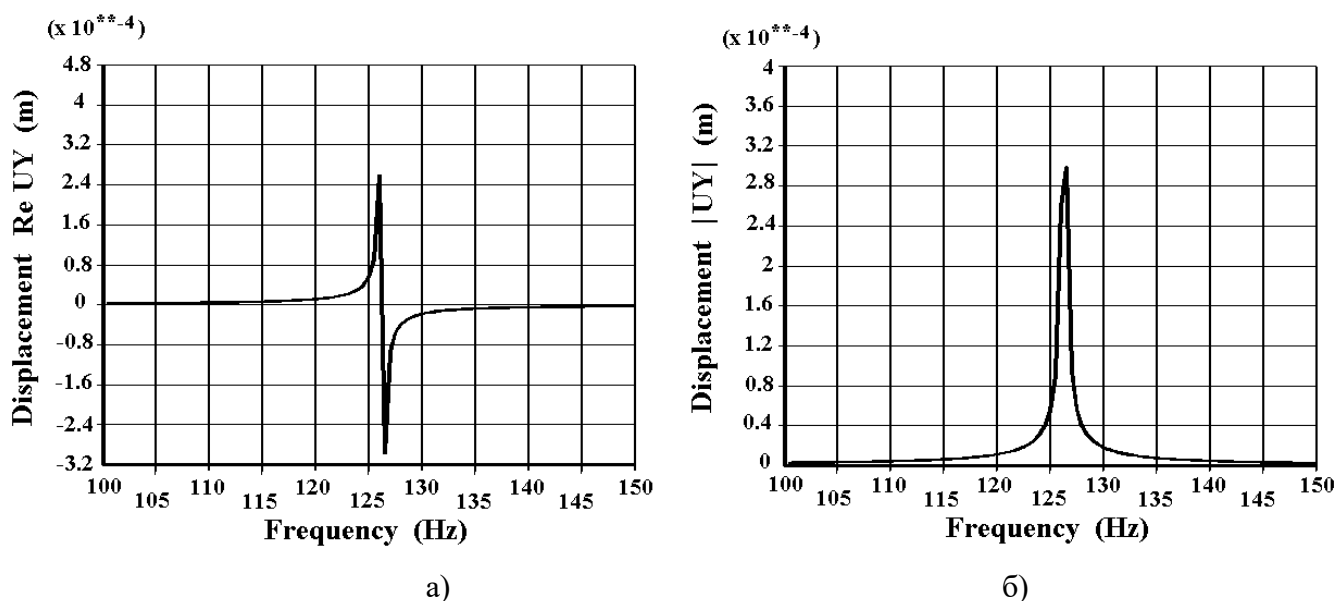


Рис. 4. Частотная характеристика $\tilde{u}_y$ (а) -- $\text{Re} \tilde{u}_y$; (б) -- $|\tilde{u}_y|$

Следующие команды постпроцессора (файл FE_Mod_CP_Post.inp) позволяют получить для резонансной частоты FRES график вещественной части давления вдоль оси Y акустической области, т.е зависимость $\text{Re} \tilde{p}(0, y)$, $y \in [R_3, R_a]$.

```
!      Постпроцессорный вывод графика
!      акустического давления вдоль пути между узлами N_RES1, N_RES2
!      на частоте FRES
!      N_RES1, N_RES2, FRES - должны быть определены ранее
/POST1
/COLOR,CURVE,WHIT,1,6 ! цвет графиков - белый (черный при инвер-
тации)
/COLOR,GRID,WHIT,    ! цвет сетки - белый (черный при инвертации)
/PLOPTS,TITLE,OFF    ! заголовок графика нет
/PLOPT,FRAME,OFF     ! рамки нет
/AXLAB,X,Y           ! подпись к оси X
/AXLAB,Y,Re PRES     ! подпись к оси Y
```

```

/XRANG
/DSCALE,,OFF ! Множитель при показе смещений границ КЭ равен 0

! Считываем данные о вещественной части на частоте FRES
SET,NEAR,,,0,FRES

! Команды определения пути с опорными точками
PATH,YY,2,,120
PPATH,1,N_RES1
PPATH,2,N_RES2
! Определение величины RePRES для построения графика вдоль пути
PDEF,RePRES,PRES

PLPATH,RePRES ! Построение графика RePRES вдоль пути

! Вывод картины распределения давления (раскомментировать)
! ESEL,S,TYPE,,2,4
! PLNSOL,PRES
! Считываем данные о мнимой части на частоте FRES
! SET,NEAR,,,1,FRES
! PLNSOL,PRES

```

Результирующий график показан на рис. 5. Как и ожидалось, давление достаточно быстро убывает вдоль пути.

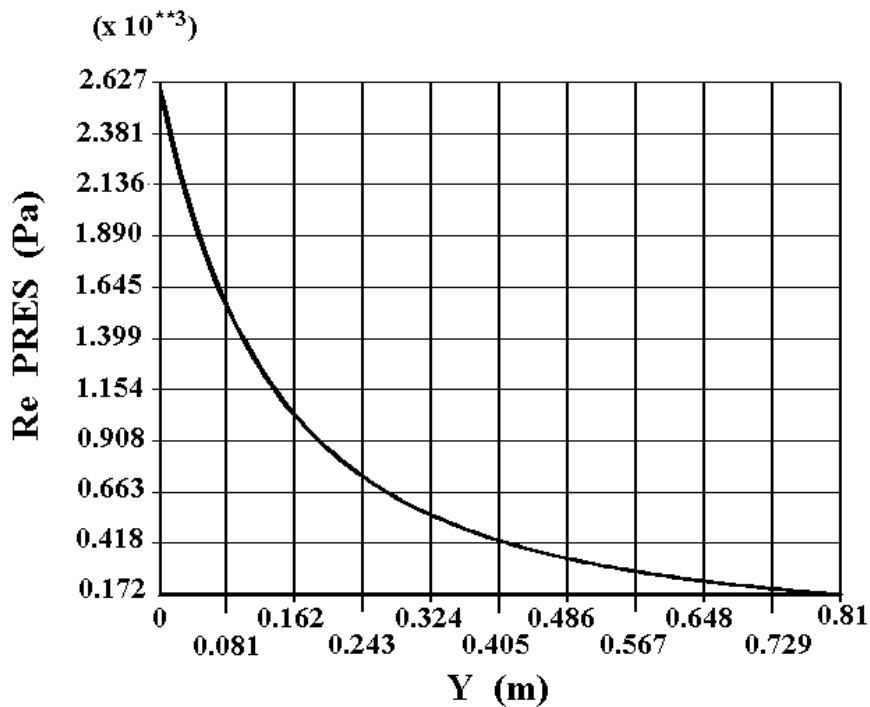


Рис. 5. Акустическое давление $\text{Re } \tilde{p}$ вдоль оси Y

Выведем теперь распределения вещественной и мнимой частей давления на резонансной частоте. Для этого согласно последним командам из вышеприведенного файла сначала выберем только акустические элементы (типа 2-4) **ESEL,S,TYPE,,2,4**, а затем выполним команду **PLNSOL,PRES**. В результате получим распределение вещественной части давления на резонансной частоте, показанное на рис. 6.

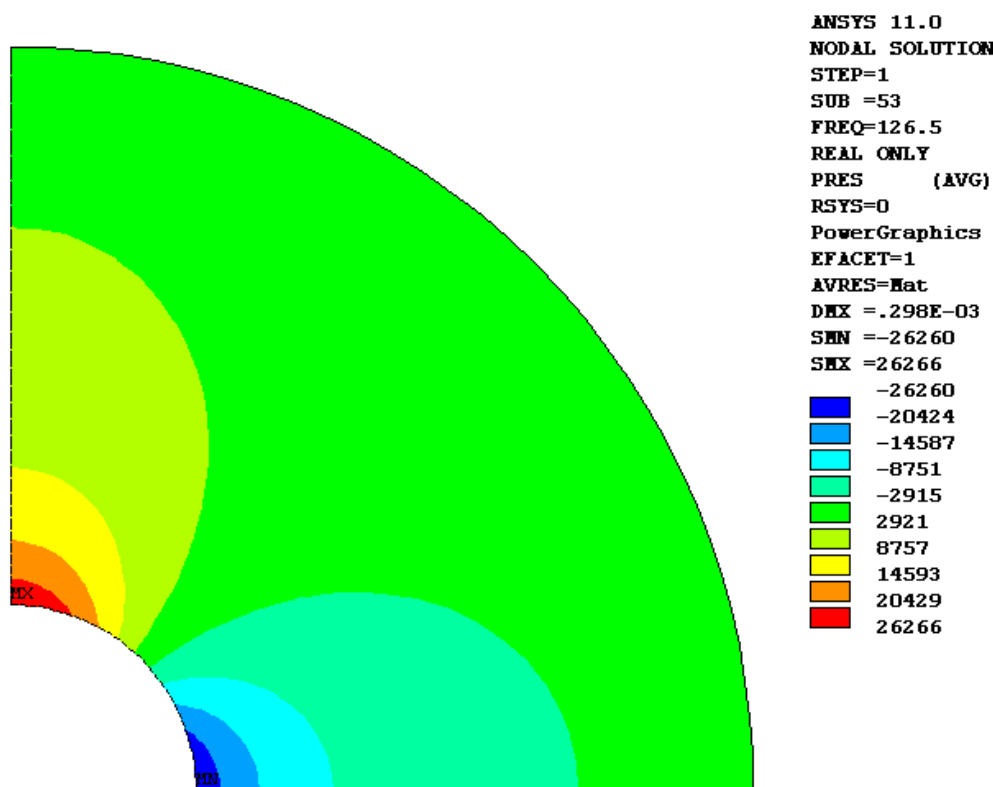


Рис. 6. Распределение вещественной части давления на частоте $f_r=126.5$ Гц

После выполнения команд **SET,NEAR,,,1,FRES** и **PLNSOL,PRES**, аналогичную картину можно получить для мнимой части давления на резонансной частоте и убедиться в том, что значения давления будут значительно меньше.

Наконец, выведем картину деформированной формы на резонансной частоте. Для этого сначала нужно выбрать только твердотельные элементы (типа 1) **ESEL,S,TYPE,,1** и вернуть автоматическое масштабирование значений смещений **/DSCALE,,AUTO**.

Затем нужно считать результаты на данной частоте для вещественной части решения **SET,NEAR,,,0,FRES** и вывести картину деформированной формы вместе с границей исходного положения излучателя, пройдя по меню *Plot Results -> Deformed Shape -> Def+undef edg -> OK* или выполнив команду **PLDISP,2**. Для получения большего сходства с первой собственной формой излучателя без жидкости,

показанной в левой верхней четверти рис. 2, можно раскрасить элементы по номерам материальных свойств без вывода самих номеров материальных свойств: *PltCtrls->Numbering->Elem/Attrib numbering->Material numbers-> [NUM] Numbering shown with ->Colors only->OK*. Результат всех этих действий показан на рис. 7. Из этого рисунка видно, что деформированная форма по общей структуре повторяет первую собственную форму излучателя без жидкости, приведенную на рис. 2. (Собственная форма определяется с точностью до произвольного множителя, поэтому знак ее смещений не существен.)

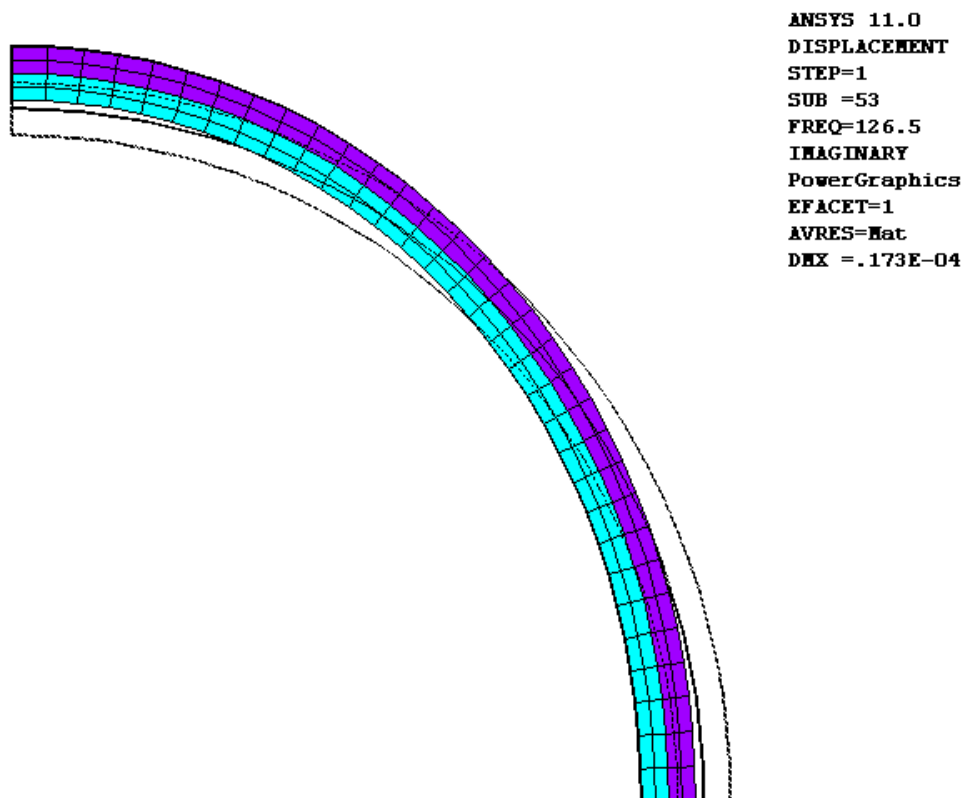


Рис. 7. Деформированная форма кольца на резонансной частоте $f_r=126.5$ Гц, (вещественная часть)

Вычислительные эксперименты с варьированием параметра густоты конечно-элементной сетки SM показывают, что $f_r=127$ Гц при $SM=0.5$, $f_r=126.5$ Гц при $SM=1$, $f_r=126$ Гц при $SM=2$. Как видно, с уменьшением максимального размера конечных элементов частота уменьшается, что следует и из общих теоретических выводов о характере сходимости собственных частот. Однако это изменение в значении первой резонансной частоты оказывается менее 1 %, что свидетельствует об удовлетворительном выборе параметров конечно-элементной сетки. (Допустима даже более грубая сетка.)

Если же при $SM=1$ варьировать размеры акустической области, изменяя параметр $KRA=RA/R3$ от 2 до 8, то можно заметить, что значение $f_r=126.5$ Гц не будет

меняться. Таким образом, выбранные размеры акустической области также являются вполне удовлетворительными и допустимы даже меньшие размеры. (Здесь однако не анализируются максимальные значения перемещений и акустического давления, которые вычисляются с большей погрешностью.)

Наконец, вместо размещения акустических элементов FLUID129 на удаленной границе $r=R_a$ акустической области можно задать импедансные граничные условия, заменив в файле **FE_Mod_CP_3_ha.inp** блок команд

```
! Определение бесконечных элементов FLUID129
CSYS,1
NSEL,S,LOC,X,RA    ! Выбор узлов на импедансной границе
TYPE,4 $ REAL,4 $ MAT,3
ESURF
ESEL,ALL
NSEL,ALL
CSYS,0
```

на следующий

```
! импедансные граничные условия
CSYS,1
NSEL,S,LOC,X,RA    ! Выбор узлов на импедансной границе
SF,ALL,IMPD,1      ! Установка импедансного граничного условия
NSEL,ALL
CSYS,0
```

Расчеты показывают, что для рассматриваемой задачи вполне допустимы оба варианта моделирования неотражающей акустической границы, но первый подход оказывается немного точнее.