УМФ
Лекция 1
1-й семестр – осень 2017 г
Линейные уравнения с частными производными первого порядка

Моргулис Андрей Борисович
КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

14 августа 2018 г.

Общие определения.

Общие определения.

Обозначения

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – заданная область, $p \in \mathbb{N}$, и

$$F : D \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d_{\mathbf{1},n}} \times \mathbb{C}^{d_{\mathbf{2},n}} \times \ldots \times \mathbb{C}^{d_{p,n}} \to \mathbb{C}, \quad \text{где} \quad d_{j,n} = \frac{(n+j-1)!}{j!(n-1)!};$$

$d_{j,n}$ – число различных частных производных $\frac{\partial^j f}{\partial {x_\mathbf{1}}^{j_\mathbf{1}} \ldots \partial {x_n}^{j_n}}$, $j_1 + \ldots + j_n = j$ функции $f = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Общие определения.

Обозначения

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – заданная область, $p \in \mathbb{N}$, и

$$F : D \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d_{\mathbf{1},n}} \times \mathbb{C}^{d_{\mathbf{2},n}} \times \ldots \times \mathbb{C}^{d_{p,n}} \to \mathbb{C}, \quad \text{где} \quad d_{j,n} = \frac{(n+j-1)!}{j!(n-1)!};$$

$d_{j,n}$ – число различных частных производных $\frac{\partial^j f}{\partial x_{\mathbf{1}}{}^{j_{\mathbf{1}}} \ldots \partial x_n{}^{j_n}}$, $j_1 + \ldots + j_n = j$ функции $f = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Определение.

Уравнением с частными производными порядка p относительно функции $u : D \to \mathbb{C}$ называется уравнение вида

$$F(x, u, \partial u, \partial^2 u, ..., \partial^p u) = 0, \quad x \in D,$$

где $u = u(x)$, и $\partial^k u$, $k = 1, \ldots, p$ – множества частных производных порядка k от функции u в точке x.

Решение уравнения с частными производными.

Решение уравнения с частными производными.

Обозначение

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$; $\mathrm{C}^m(D)$ – множество функций, m раз непрерывно дифференцируемых в D; $\mathrm{C}^\infty(D)$ – множество функций, любое число раз непрерывно дифференцируемых в D.

Решение уравнения с частными производными.

Обозначение

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$; $\mathrm{C}^m(D)$ – множество функций, m раз непрерывно дифференцируемых в D; $\mathrm{C}^\infty(D)$ – множество функций, любое число раз непрерывно дифференцируемых в D.

Определение

Функция $u : D \to \mathbb{C}$ называется классическим решением уравнения с частными производными порядка p, если $u \in \mathrm{C}^p(D)$, и подстановка u в уравнение обращает его в тождество.

Пример. Уравнение: $u_{x_1} = 0$; решение: $u(x) = c(x_2, \dots, x_n)$, c – произвольная функция.

Наряду с классическими в литературе рассматриваются обобщённые решения, для которых требование $u \in \mathrm{C}^p(D)$ в том или ином смысле ослабляется. Случается, что уравнение не имеет классического решения, но имеет обобщённое.

Линейные уравнения.

Определение.

Уравнение с частными производными порядка p называется линейным, если определяющая его функция F такова, что $\forall\, x \in D, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, u, v \in \mathrm{C}^p(D)$

$$F(x, \alpha u + \beta v, \partial(\alpha u + \beta v), \partial^2(\alpha u + \beta v), ..., \partial^p(\alpha u + \beta v)) =$$

$$\alpha F(x, u, \partial u, \partial^2 u, ..., \partial^p u) + \beta F(x, v, \partial v, \partial^2 v, ..., \partial^p v).$$

Уравнение с частными производными называется линейным неоднородным, если определяющая его функция F такова, что $\forall\, x \in D, u \in \mathrm{C}^p(D)$

$$F(x, u, \partial u, \partial^2 u, ..., \partial^p u) = F_0(x, u, \partial u, \partial^2 u, ..., \partial^p u) + f(x)$$

где F_0 определяет линейное уравнение.

Часто линейные неоднородные уравнения в литературе называют просто линейными, а уравнения, линейные в смысле нашего определения называют линейными однородными.

Примеры уравнений 1-го порядка.

Обозначение

$u = u(x,t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$; по умолчанию t – временная координата.

Линейные уравнения.

- Транспортное уравнение (перенос примеси) $u_t - cu_x = \alpha u + \beta$;
  α, β, c – заданные функции, c – скорость несущей среды; $\alpha = \beta = 0$ – нет источников (примеси).

Примеры уравнений 1-го порядка.

Обозначение

$u = u(x,t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$; по умолчанию t – временная координата.

Линейные уравнения.

- Транспортное уравнение (перенос примеси) $u_t - cu_x = \alpha u + \beta$; α, β, c – заданные функции, c – скорость несущей среды; $\alpha = \beta = 0$ – нет источников (примеси).

Нелинейные уравнения.

- уравнение Хопфа $u_t - uu_x = 0$ – нелинейный перенос: скорость несущей среды зависит от неизвестной функции (опрокидывание волн, градиентная катастрофа)
- уравнение Гамильтона-Якоби $u_t^2 + u_x^2 - 1 = 0$ (t – пространственная координата) – оптика, образование каустик.

Примеры линейных уравнений 2-го порядка.

- уравнение теплопроводности (диффузии): $u_t - u_{xx} = 0$;
- волновое уравнение $u_{tt} - u_{xx} = 0$ – распространение волн (механических, акустических, электроманитных);
- уравнение Лапласа $u_{tt} + u_{xx} = 0$ (t – пространственная координата) – стационарные поля без источников (электрические, тепловые, гравитационные;);
- уравнение Гельмгольца $u_{tt} + u_{xx} + \lambda u = 0$ – акустика;
- уравнение Шредингера $\hbar(iu_t + \hbar u_{xx}) - E(x)u = 0$ (функция E задана) – квантовая механика, $\hbar \in \mathbb{R}$ – числовой параметр;

Примеры нелинейных уравнений 2-го порядка.

- Уравнение Бюргерса $u_t - \nu u_{xx} - uu_x = 0$, ($\nu > 0$ – параметр) – влияние трения на нелинейный перенос;
- Нелинейное уравнение Клейна-Гордона $u_{tt} - u_{xx} + \sin(u) = 0$ – нелинейная оптика;
- $u_{tt} + u_{xx} + \alpha e^{\beta u} = 0$ ($\alpha, \beta = \mathrm{const}$, t – пространственная координата)– химическая физика, теория горения;
- уравнение Гинзбурга-Ландау $u_t = u(\alpha + \beta|u|^2) + \gamma u_{xx}$ – сверхтекучесть, фазовый переход, возбуждение нелинейных бегущих волн;
- Нелинейное уравнение Шредингера $iu_t + u|u|^2 + \nu u_{xx} = 0$ – нелинейные волновые процессы;
- Уравнение средней кривизны $\left(\frac{u_t}{\sqrt{1+u_t^2+u_x^2}}\right)_t + \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_t^2+u_x^2}}\right)_x = h(x)$ (t – пространственная координата, функция h задана) – тонкие плёнки; мыльные пузыри; дифференциальная геометрия;
- Уравнение Ампера-Монжа $u_{tt}u_{xx} - u_{xt}^2 = f(x)$ (t – пространственная координата, функция f задана) – дифференциальная геометрия.

Уравнения 3-го и 4-го порядка.

- уравнения Кортевега-де Вриза (КдВ) $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$; – волновые процессы;
- уравнение пограничного слоя: $u_x u_{xt} - u_x u_{tt} = u_{ttt}$ (t – пространственная координата) – гидроаэродинамика, расчёт летательных аппаратов;
- уравнение Обухова-Чарни $(\Delta\psi - \alpha^2\psi)_t + \psi_x(\Delta\psi)_y - \psi_y(\Delta\psi)_x + \beta\psi_x - \gamma\psi_y = 0,\ \Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy}$ (x, y – пространственные координаты, $\alpha \equiv \mathrm{const}$, β, γ – заданные функции) – циркуляция атмосферы и океана;
- уравнение Соболева: $(\Delta u)_{tt} + u_{zz} = 0, u = u(x, y, z, t)$ – колебания вращающейся жидкости;
- бигармоническое уравнение $\Delta^2\psi = u_{xxxx} + u_{yyyy} + 2u_{xxyy} = 0$ – напряжённо-деформированные состояния упругих пластин; плоское движение очень вязкой жидкости;
- уравнение плоских течений вязкой несжимаемой жидкости $(\Delta\psi)_t + \psi_x(\Delta\psi)_y - \psi_y(\Delta\psi)_x = \nu\Delta^2\psi, \nu = \mathrm{const} > 0$