УМФ
Лекция 1
1-й семестр – осень 2018 г
Транспортное уравнение с двумя независимыми переменными

Моргулис Андрей Борисович
КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

5 сентября 2018 г.

Общий вид уравнения

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область, рассмотрим уравнение

$$\alpha(x,y)u_x + \beta(x,y)u_y = \gamma(x,y,u), \ (x,y) \in D, \tag{1}$$

где α, β, γ – заданные функции, а функция $u = u(x,y)$ подлежит определению. *С этого места по умолчанию все заданные и неизвестные функции предполагаются непрерывно-дифференцируемыми столько раз, сколько того требуют текущие рассмотрения.*

Уравнение (1) может иметь очень много решений. Например, однородное уравнение

$$u_x = 0 \tag{2}$$

имеет решения $u = \varphi(y)$, где функция φ произвольна, и это решение – общее, в том смысле, что любое решение уравнения (2) представимо в указанном виде.

Общее однородное уравнение

$$\alpha u_x + \beta u_y = 0, \tag{3}$$

в некотором смысле сводится к (2), и его общее решение также определяется произвольной функцией одной переменной.

Характеристики

Определение 1. Характеристиками уравнения (3) называются фазовые кривые векторного поля

$$\mathbf{V}: (x, y) \mapsto (\alpha(x, y), \beta(x, y)) \tag{4}$$

Напомним, что фазовой кривой данного векторного поля называется кривая, в каждой своей точке касающаяся этого поля. Если $x = \xi(\tau)$, $y = \eta(\tau)$ – решение системы ОДУ

$$\dot{x} = \alpha(x, y), \ \dot{y} = \beta(x, y), \ \dot{()} = \frac{d()}{d\tau}, \tag{5}$$

то отображение $\tau \mapsto (\xi(\tau), \eta(\tau))$ параметризует фазовую кривую, так что она совпадает с траекторией точки $(\xi(\tau), \eta(\tau))$, пробегаемой при изменении τ.

Лемма 1. Пусть $\chi \subset D$ – характеристика уравнения (3), $(x_1, y_1) \in \chi$, $(x_2, y_2) \in \chi$. Пусть u – решение уравнения (3). Тогда

$$u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2).$$

◀ Пусть отображение $\tau \mapsto (\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau))$ параметризует характеристику χ. Тогда

$$\exists \ \tau_1, \tau_2 : \ x_1 = \tilde{x}(\tau_1), \ y_1 = \tilde{y}(\tau_1), \ x_2 = \tilde{x}(\tau_2), \ y_2 = \tilde{y}(\tau_2)$$

Общее решение

$$u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1)=\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{d}{d\tau}u(\tilde{x}(\tau),\tilde{y}(\tau))d\tau=$$

(дифференцируем сложную функцию)

$$=\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\left(u_x(\tilde{x}(\tau),\tilde{y}(\tau))\frac{d\tilde{x}}{d\tau}+u_y(\tilde{x}(\tau),\tilde{y}(\tau))\frac{d\tilde{y}}{d\tau}\right)d\tau=$$

$$=\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\alpha(\tilde{x}(\tau),\tilde{y}(\tau))u_x(\tilde{x}(\tau),\tilde{y}(\tau))+\beta(\tilde{x}(\tau),\tilde{y}(\tau))u_y(\tilde{x}(\tau),\tilde{y}(\tau))\right)d\tau=0,$$

так как подинтегральное выражение равно нулю в силу уравнения (3). ▶

Рассмотрим отрезок кривой $S\in D$; пусть точки этого отрезка «нумеруются» координатой σ. Пусть через каждую точку $\sigma\in S$ проходит отрезок характеристики χ_σ. Пусть u – решение уравнения (3), определённое в некоторой области $D_1\subset D,\ S\subset D_1$. Тогда $u\equiv\mathrm{const}$ на χ_σ, и поэтому $u=\varphi(\sigma)$ в некоторой области $D_0\subset D_1,\ D_0\supset S$, см. рис. 1.

Рисунок 1

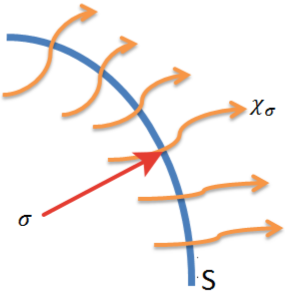


Рис. : 1. Криволинейный отрезок S нарисован синим, характеристики – оранжевым.

Локальность и касание характеристик

Указанное представление решение имеет место в некоторой окрестности каждой неособой точки поля $\mathbf{V} = (a, b)$.

Точка $z \in D$ называется особой точкой векторного поля $\mathbf{V}$, если $\mathbf{V}(z) = 0$.

Если отрезок S проходит через особую точку σ_0, то значение $\varphi(\sigma_0)$ не определено. Дело в том, что особая точка представляет собой целую вырожденную характеристику, и может быть предельной точкой для разных характеристик, рис. 2. Пример: особая точка $(0, 0)$ поля

$$\alpha(x, y) = x, \quad \beta(x, y) = y.$$

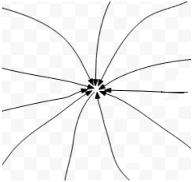
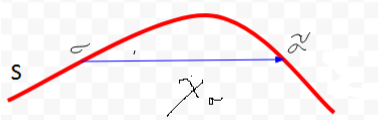


Рис. : 2. Характеристики вблизи особой точки

Расположение S и $\mathbf{V}$, и свойства функции φ.

Некоторые качественные свойства кривой S и поля $\mathbf{V}$ отражаются в качественных свойствах функции φ. Например, см. рис. 3, слева,

$$S \cap \chi_\sigma = \{\sigma, \tilde{\sigma}\} \Longrightarrow \varphi(\sigma) = \varphi(\tilde{\sigma}).$$



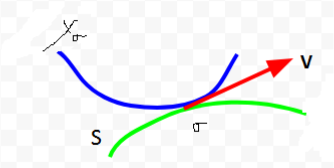


Рис. : 3. Слева: возврат характеристики χ_σ (синим) на отрезок S (красным). Справа: касание характеристики χ_σ (синим) и отрезка S (зелёным).

Лемма 2. Пусть характеристика χ_σ касается в точке σ кривой S (рис. 3, справа). Тогда $\varphi'(\sigma) = 0$.

◀ Пусть отображение $r : s \mapsto (\tilde{\xi}(s), \tilde{\eta}(s))$ параметризует кривую S. Касание кривых S и χ_σ в точке σ означает, что $\exists\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :\ r'(\sigma) = \lambda \mathbf{V}(r(\sigma))$, то есть

Задача Коши.

$$\tilde{\xi}'(\sigma) = \lambda\alpha(\tilde{\xi}(\sigma), \tilde{\eta}(\sigma)), \quad \tilde{\eta}'(\sigma) = \lambda\beta(\tilde{\xi}(\sigma), \tilde{\eta}(\sigma));$$

далее, по построению, $\varphi(\sigma) = u(r(\sigma)) = u(\tilde{\xi}(\sigma), \tilde{\eta}(\sigma))$, и

$$\varphi'(\sigma) = \tilde{\xi}'(\sigma)u_x(\tilde{\xi}(\sigma), \tilde{\eta}(\sigma)) + \tilde{\eta}'(\sigma)u_y(\tilde{\xi}(\sigma), \tilde{\eta}(\sigma)) = \lambda\alpha(\tilde{\xi}(\sigma), \tilde{\eta}(\sigma))u_x(\tilde{\xi}(\sigma), \tilde{\eta}(\sigma)) +$$

$$+\lambda\beta(\tilde{\xi}(\sigma), \tilde{\eta}(\sigma))u_y(\tilde{\xi}(\sigma), \tilde{\eta}(\sigma)) = 0$$

ввиду уравнения (3). ▶

Пусть заданы область $D \subset \mathbb{R}^2$, кривая $S \subset D$ и функция ψ, определенная в D.

Определение 2. Задачей Коши для уравнения 1-го порядка

$$F(u_x, u_y, x, y, u) = 0, \quad z = (x, y) \in D \tag{4}$$

называется задача нахождения решения u уравнения (4), определённого в D и удовлетворяющего условию

$$(u - \psi)|_S = 0, \tag{5}$$

Определение 3. Под решением задачи Коши (4-5) в окрестности $\mathcal{U}_\zeta$ точки $\zeta \in S$ будем понимать решение u уравнения (4), определённое в $\mathcal{U}_\zeta$, и удовлетворяющее условию (5) на криволинейном отрезке $S_\zeta = \mathcal{U}_\zeta \cap S$.

Задача Коши для однородного транспортного уравнения.

Решения, введённые определением 3, называют локальными или решениями «в малом». Решение, удовлетворяющее (4-5) всюду в заданной области называют глобальным или решением «в целом».

Кривую S часто называют начальной кривой, а функцию ψ – начальной функцией. Пару S, ψ называют начальными данными или данными Коши.

На практике вычислить решение задачи Коши для однородного транспортного уравнения можно так:

1. фиксируем (x, y) и проводим через эту точку характеристику $\chi_{x,y}$; с этой целью решаем задачу Коши для ОДУ

$$X' = \alpha(X, Y), \;\; Y' = \beta(X, Y), \quad ()' = d()/ds, \quad (X, Y)|_{s=0} = (x, y); \tag{6}$$

находим $X = X(x, y, s)$, $Y = Y(x, y, s)$;

2. продолжаем $\chi_{x,y}$ до пересечения с S и находим координаты $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ точки пересечения; с этой целью выражаем s через (x, y) из условия $(X(x, y, s), Y(x, y, s)) \in S$, таким образом находим $s = \tau(x, y)$, и полагаем

$$\xi = X(x, y, \tau(x, y)), \quad \eta = Y(x, y, \tau(x, y)); \tag{7}$$

3. полагаем

$$u(x, y) = \psi(\xi(x, y), \eta(x, y)). \tag{8}$$

Неявное выражение решения задачи Коши

На практике начальная кривая S часто задаётся непараметрически, то есть, как множество решений одного уравнения с двумя неизвестными (x, y); например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задаёт окружность. В общем случае

$$S = \{(x, y) : \ \Phi(x, y) = 0, \ \Phi_x^2(x, y) + \Phi_y^2(x, y) > 0\}, \tag{9}$$

где функция Φ задана, а неравенство $\Phi_x^2(x, y) + \Phi_y^2(x, y) > 0$ гарантирует, что множество решений уравнения $\Phi(x, y) = 0$ действительно представляет собой гладкую кривую, или распадается на несколько таких кривых.

Если начальная кривая задана непараметрически в виде (9), то $\tau(x, y)$ неявно задаётся уравнением

$$\Phi(X(x, y, \tau), Y(x, y, \tau)) = 0. \tag{10}$$

Таким образом, решение задачи Коши $u = u(x, y)$ неявно задаётся задачей Коши для ОДУ (6), функциональным уравнением (10) и формулами (7-8).

Пример 1. Задача Коши: $u_t + cu_x = 0, \ c = \mathrm{const}, \ u|_{t=0} = \psi(x)$. Уравнения характеристик

$$T' = 1, \quad X' = c, \ X|_{s=0} = x, \ T|_{s=0} = t \Longrightarrow T = t + s, \ X = x + cs.$$

Начальную поверхность зададим уравнением $t = 0$, отсюда $\tau(x, t) = -t$, и характеристика, исходящая из точки (x, t) пересекает начальную поверхность в точке $\xi(x, t) = x - ct$. Итак, ответ: $u(x, t) = \psi(x - ct)$.

Решение конкретных задач Коши

Пример 2. Задача Коши: $yu_y + xu_x = 0, \quad u|_{x^2+y^2=1} = xy$. Уравнения характеристик

$$X' = X, \quad Y' = Y, \ X|_{s=0} = x, \ Y|_{s=0} = y \Longrightarrow Y = y\mathrm{e}^s, \ X = x\mathrm{e}^s.$$

Уравнение (10) принимает вид

$$X^2 + Y^2 = (y^2 + x^2)\mathrm{e}^{2\tau} = 1 \Longrightarrow \tau = -\ln r, \ r = \sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow$$

Координаты точки пересечение характеристики и начальной поверхности

$$\xi = x\mathrm{e}^\tau = \frac{x}{r}, \ \eta = y\mathrm{e}^\tau = \frac{y}{r}.$$

Ответ: $u(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Решение примера 2 непродолжаемо в начало координат, так как последнее – особая точка векторного поля, заданного коэффициентами уравнения.

Пример 3. Задача Коши: $u_y + u_x = 0, \quad u|_{x^2+y^2=1} = x$. Уравнения характеристик

$$X' = 1, \quad Y' = 1, \ X|_{s=0} = x, \ Y|_{s=0} = y \Longrightarrow Y = y + s, \ X = x + s.$$

Уравнение (10) принимает вид

$$(y+\tau)^2 + (x+\tau)^2 = 1 \Longrightarrow \tau = \tau^{\pm} = \pm\sqrt{1+2xy} - x - y, \ 2xy + 1 > 0,$$

см. рис. 4. В области $2xy + 1 > 0$ (рис. 4, «тень») решение τ не существует.

«Тени» и разрывы

Это означает, что характеристики из этой области не приходят на начальную поверхность, а потому решение задачи Коши непродолжаемо в эту область.

В области $2xy+1>0$ решение задачи Коши должно выражаться в одном из двух видов

$$u^{\pm}=x+\tau^{\pm}=-y\pm\sqrt{1+2xy}.$$

В частности, на начальной кривой $x^2+y^2=1$, а потому $u^{\pm}=-y\pm|x+y|$. Выбираем знак так, чтобы удовлетворить начальному условию. Отсюда ответ : $u=u^{+}$ при $x+y>0$, $\quad u=u^{-}$ при $x+y<0$.

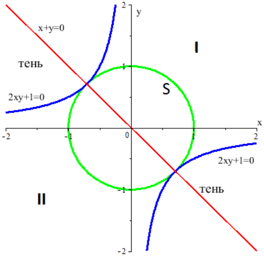


Рис. : 4. К примеру 3. В области I $x+y>0, 2xy+1>0$, в области II $x+y<0, 2xy+1>0$, в областях тени $2xy+1<0$. Характеристики – перпендикуляры к красной кривой.

Характеристические точки.

Определение 4. Точки начальной кривой, в которых она касается характеристик уравнения называются характеристическими.

Точки пересечения единичной окружности и красной кривой на рис. 4 – характеристические.
Пример 3 показывает, что характеристические точки усложняют глобальную структуру решения. Так, решение примера 3 определено в областях I и II, но непродолжаемо через красную линию и не определено в областях тени. В частности, задача Коши не имеет, вообще говоря, решения в окрестности характеристической точки. Причина в том, что начальная функция задается произвольно, и потому не обязана удовлетворять условию в характеристической точке, вытекающему из леммы 2.

Теорема 1. Задача Коши

$$\alpha(x,y)u_x + \beta(x,y)u_y = 0, \quad (u-\psi)|_S = 0$$

имеет локальное решение в окрестности любой нехарактеристической точки $\zeta \in S$.
◀. Выберем столь малую окрестность $\mathcal{U}_\zeta$, что $\exists\, s_0 : \forall\, z = (x,y) \in \mathcal{U}_\zeta$ задача Коши (6) имеет решение $X = X(x,y,s)$, $Y = Y(x,y,s)$, $|s| < s_0$. Будем считать, что $S_\zeta = S \cap \mathcal{U}_\zeta$ задана непараметрически в виде (9). Доказательство сводится к проверке существования $\tau(x,y)$.

Существование $\tau(x, y)$

Относительно τ имеем уравнение (10), а его решение эквивалентно построению неявной функции

$$G(x, y, \tau) = 0, \; G(\xi, \eta, 0) = 0, \quad G(x, y, \tau) = \Phi(X(x, y, \tau), Y(x, y, \tau)), \; (\xi, \eta) = \zeta.$$

$$G_\tau(\xi, \eta, 0) = X'(\xi, \eta, 0)\Phi_x(X(\xi, \eta, 0), Y(\xi, \eta, 0)) + Y'(\xi, \eta, 0)\Phi_y(X(\xi, \eta, 0), Y(\xi, \eta, 0)),$$

где

$$(X(\xi, \eta, 0), Y(\xi, \eta, 0)) = (\xi, \eta), X'(\xi, \eta, 0) = \alpha(\xi, \eta), Y'(\xi, \eta, 0) = \beta(\xi, \eta)$$

в силу (6), так что

$$G_\tau(\xi, \eta, 0) = \alpha(\xi, \eta)\Phi_x(\xi, \eta) + \beta(\xi, \eta)\Phi_y(\xi, \eta) \neq 0,$$

так как точка $(\xi, \eta) = \zeta$ нехарактеристическая. В силу теоремы о неявной функции, существует и единственная функция $\tau = \tau(x, y) : \; \tau(\xi, \eta) = 0.$ ▶

Замечание 1. Известно, что направление касательной к кривой, непараметрически заданной уравнением (9),в точке $(\xi, \eta) = \zeta$ определяется уравнением

$$h_1\Phi_x(\xi, \eta) + h_2\Phi_y(\xi, \eta) = 0.$$