Основы теории напряженного состояния

§1. Понятие напряженного состояния в точке. Виды напряженных состояний

При оценке прочности элементов конструкций и деталей машин выполняется анализ наиболее опасных точек или частей этих конструкций, для этого в этой точке выделяется бесконечно малый параллелепипед (кубик) и выясняется наличие действующих напряжений по его граням (площадкам) (рисунок 1.1).

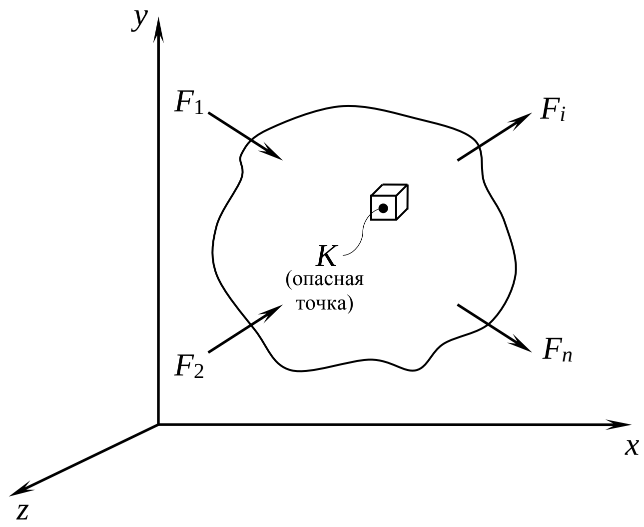


Рисунок 1.1

Рассмотрим более подробно выделенный кубик с действующими по его площадкам нормальными и касательными напряжениями (рисунок 1.2).

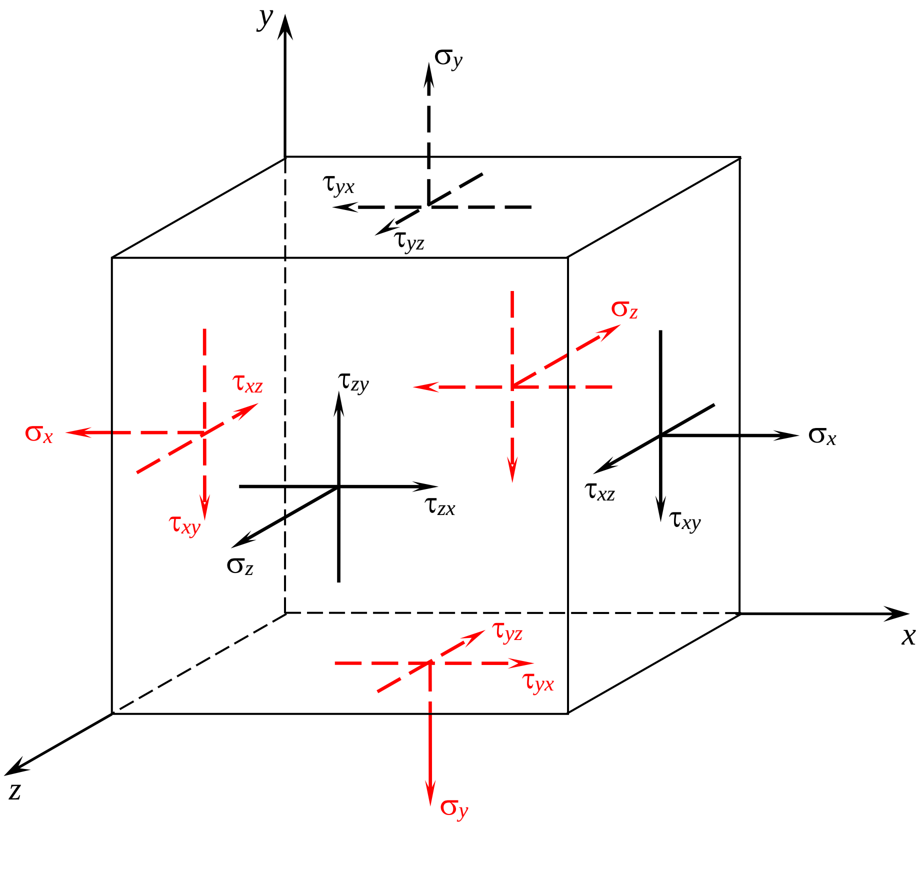


Рисунок 1.2

По шести площадкам кубика действуют 18 компонентов напряжений, которые попарно равны между собой, соответственно с одинаковыми индексами, и согласно закона парности касательных напряжений

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= -\tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= -\tau_{zy} \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

Для удобства записи этих напряжений применяется матричный способ. В итоге получают так называемый тензор напряжений:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \qquad (1.2)$$

Таким образом, под напряженным состоянием точки понимается совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по различным площадкам и направлениям, проходящим через заданную точку. В общем случае, напряженное состояние в точке характеризуется шестью компонентами напряжений – тремя нормальными и тремя касательными.

При изменении положения (ориентации) кубика в пространстве изменяются действующие по его граням напряжения, при этом существует такое положение кубика, называемое главным, при котором все касательные напряжения исчезают, или обращаются в нуль. Тогда по главным площадкам, где τ обращается в нуль, будут действовать только главные нормальные напряжения – σ_1, σ_2, σ_3.

Главные напряжения подчиняются следующему алгебраическому неравенству:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \qquad (1.3)^*$$

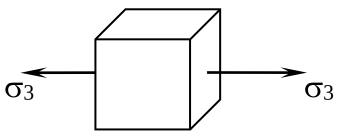
(Например, 100 > 10 > – 300)

Учитывая сказанное, тензор главных напряжений можно записать следующим образом

$$T_{\text{гл.}} = \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{vmatrix}. \qquad (1.4)$$

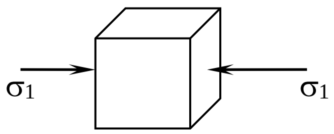
В зависимости от действующих главных напряжений все многообразие напряженных состояний можно привести к трем основным видам – линейному, плоскому и объемному.

1. Линейное напряженное состояние (одноосное напряженное состояние), при котором из трех главных напряжений действует только одно главное напряжение.



растяжение

$\sigma_1 \neq 0 \qquad \sigma_2 = 0 \qquad \sigma_3 = 0$



сжатие

$\sigma_1 = 0 \qquad \sigma_2 = 0 \qquad \sigma_3 \neq 0$

$\cancel{\sigma_1 = 0 \qquad \sigma_2 \neq 0 \qquad \sigma_3 = 0}$, т.к. нарушается неравенство (1.3)

Линейное напряженное состояние возникает при деформации растяжения или сжатия, а также при деформации изгиба в крайних волокнах (рисунок 1.3).

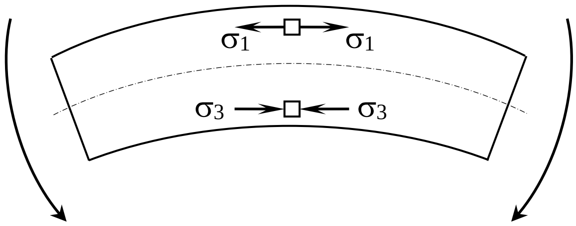


Рисунок 1.3

Полный анализ плоского напряженного состояния был рассмотрен в главе «Растяжение-сжатие» (глава 3).

2. Плоское напряженное состояние (двухосное) возникает, когда только одно главное напряжение обращается в нуль.

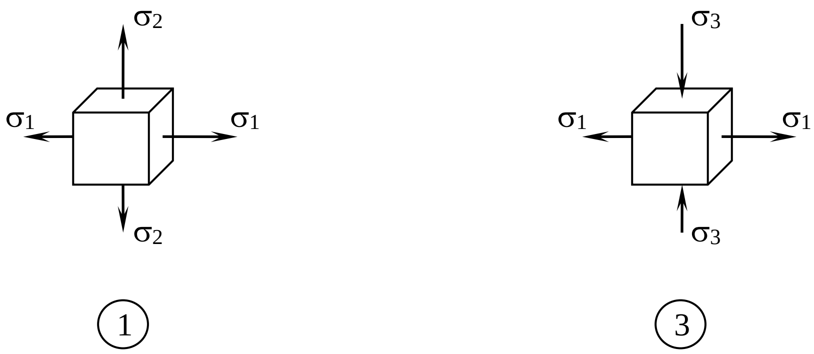
$\sigma_1 \neq 0 \qquad \sigma_2 \neq 0 \qquad \sigma_3 = 0$

$\sigma_1 = 0 \qquad \sigma_2 \neq 0 \qquad \sigma_3 \neq 0$

$\sigma_1 \neq 0 \qquad \sigma_2 = 0 \qquad \sigma_3 \neq 0$

$\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0 \qquad \sigma_3 = 0$

и т.д.



Плоское напряженное состояние возникает при деформации кручения, сдвига, среза, изгиба и при некоторых видах сложного сопротивления, в частности, плоское напряженное состояние имеет место в стенках сосудов небольшой толщины, нагруженных внутренним или наружным давлением (рисунок 1.4).

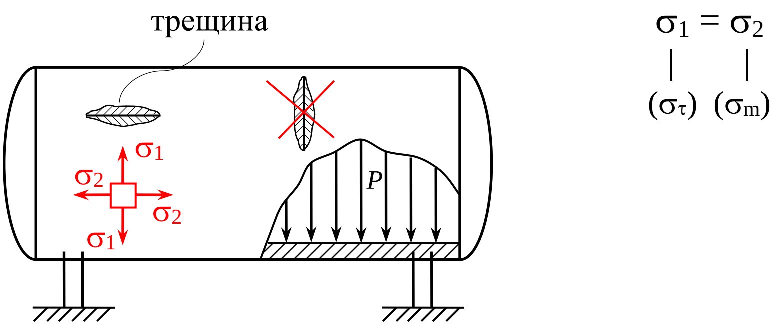


Рисунок 1.4

3. Объемное напряженное состояние (трехосное), при котором все три напряжение не равны нулю.

Объемное напряженное состояние встречается в элементах тяжело нагруженных конструкций, в частности, в толстостенных сосудах, нагруженных давлением, а так же в деталях, имеющих соединения с натягом (с посадкой).

§2. Прямая и обратная задачи при плоском напряженном состоянии

В теории напряженного состояния часто решают задачи по определению напряжений на не главных или главных площадках. Такие задачи называются, соответственно, прямой и обратной и для их решения можно использовать аналитический или графический способ.

Графический способ заключается в построении круговых диаграмм напряжений, называемых кругами Мора (Отто Кристиан Мор). Рассмотрим более подробно решение прямой и обратной задач.

<u>ПРЯМАЯ ЗАДАЧА</u>

Дано:

Главная площадка и действующие на ней главные напряжения σ_1 и σ_2. Задан угол наклона α к площадке ($\alpha > 0$), для которой определяются нормальные и касательные напряжения.

Найти:

$$\sigma_\alpha \ (\text{или } \sigma_x),\ \ \sigma_\beta \ (\text{или } \sigma_y),\ \ \tau_\alpha = -\tau_\beta \ (\text{или } \tau_{xy} = -\tau_{yx}).$$

Решение:

Площадка главная, значит $\tau = 0$.

Аналитическое решение:

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2\alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2\alpha; \\ \sigma_\beta = \sigma_1 \cdot \sin^2\alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2\alpha; \\ \tau_\alpha = -\tau_\beta = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Зависимость (2.1) представляет собой уравнение окружности, записанное в параметрической форме, поэтому прямая задача имеет следующее графическое решение (рисунок 2.1).

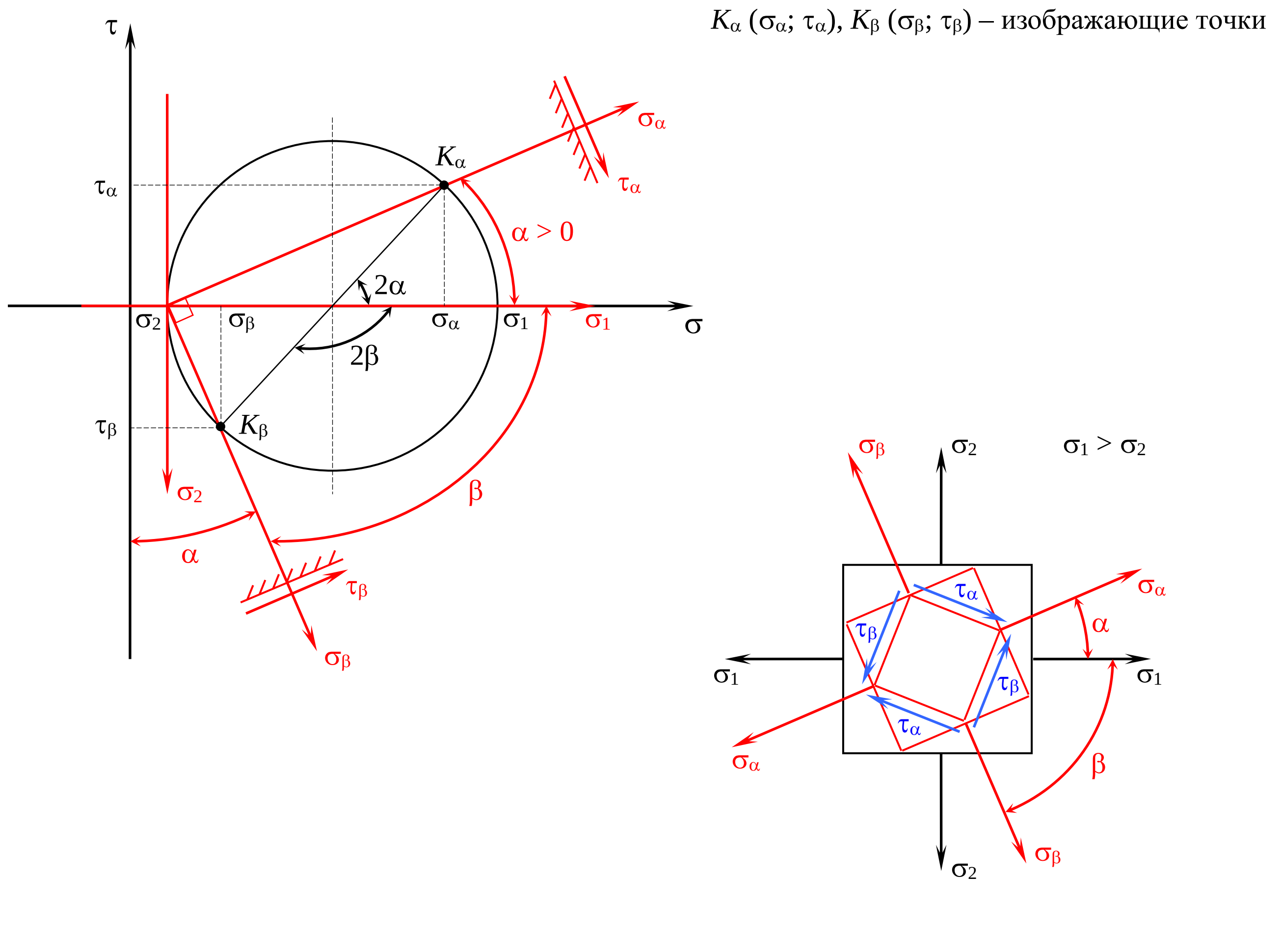


Рисунок 2.1

K_α, K_β – точки, которые показывают исходные площадки с действующими по ним направлениями.

Для установления направления искомых площадок и напряжений находится положение полюса на круге. Для этого необходимо из точки на круге с известными напряжениями (σ_1, σ_2) проводятся лучи и устанавливается точка пересечения этих лучей. Эта точка является полюсом, который обладает свойством, что соединение его с любой точкой на круге указывает направление данного напряжения.

τ_α и τ_β сходятся – σ_1

τ_α и τ_β расходятся – σ_2

<u>ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА</u>

Дано:

Неглавная площадка и действующие по ней нормальные и касательные напряжения σ_α, σ_β, $\tau_\alpha = \tau_\beta$.

Найти:

Положение главной площадки и величины главных напряжений (α_0, σ_1, σ_2).

Решение:

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\beta - \sigma_\alpha}, \tag{2.2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_\alpha - \sigma_\beta\right)^2 + 4\tau_\alpha^2}, \tag{2.3}$$

$$\tau_{\text{экстр}} \geq \tau_{\substack{\max \\ \min}} \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \alpha = \pm 45^\circ. \quad (\text{к главной площадке})$$

Графическое решение обратной задачи выполняется в обратном порядке решения прямой задачи (рисунок 2.2).

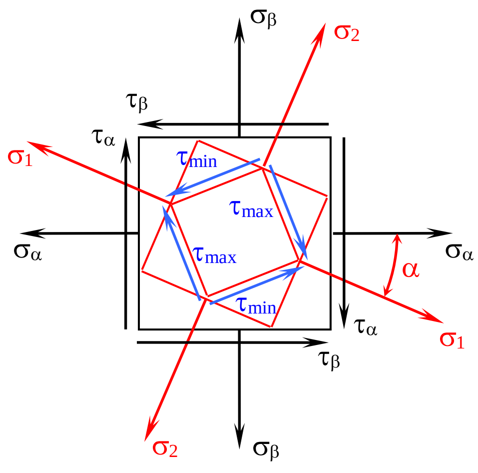
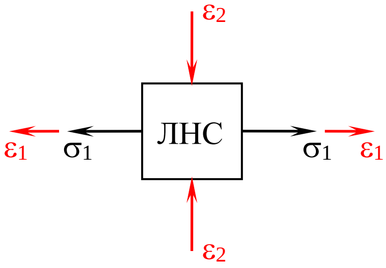


Рисунок 2.2

В теории напряженного состояния чаще встречается задача обратная, так как это необходимо для установления экстремальных, или опасных, напряжений и выполнения оценки прочности конструкции.

§3. Обобщенный закон Гука. Потенциальная энергия упругой деформации при сложном напряженном состоянии

Ранее была получена зависимость, выражающая закон Гука для линейного напряженного состояния (глава 3).



$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} \\ \varepsilon' = \varepsilon_2 &= -\mu \cdot \varepsilon_1 = - - \mu \cdot \frac{\sigma_1}{E} \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Получим аналогичные зависимости для плоского или объемного напряженных состояний, которые называются сложным напряженным состоянием.

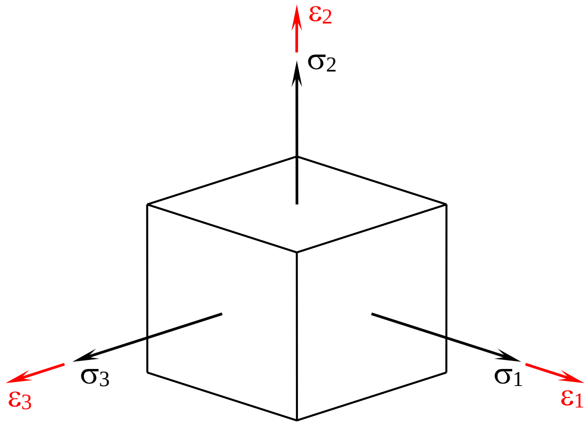


Рисунок 3.1

Найдем главную деформацию по направлению ε_1 как сумму деформаций от напряжений σ_1, σ_2, σ_3, которые являются, соответственно, одно продольной и двумя поперечными:

$$\varepsilon_1 = \underbrace{\varepsilon_{1(\sigma_1)}}_{\text{прод.}} + \underbrace{\varepsilon_{1(\sigma_2)} + \varepsilon_{1(\sigma_3)}}_{\text{попереч.}}. \qquad (3.2)$$

Подставим (3.1) в (3.2), получим:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_2}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_3}{E}. \qquad (3.3)$$

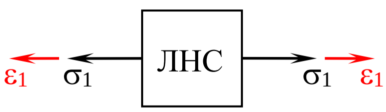
(3.2) – обобщенный закон Гука.

Аналогично получаем две другие главные деформации ε_2 и ε_3.

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned}}$$

Потенциальная энергия упругой деформации

Для случая линейного напряженного состояния была получена зависимость для удельной потенциальной энергии упругой деформации следующего вида:



$$u = \frac{\sigma_1 \cdot \varepsilon_1}{2}. \qquad (3.4)$$

Получим аналогичную зависимость для удельной потенциальной энергии упругой деформации в случае плоского или объемного напряженный состояний. Для этого составим сумму произведений главных напряжений на соответствующие главные деформации аналогично (3.4):

$$u_{\text{снс}} = \frac{\sigma_1 \cdot \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \cdot \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \cdot \varepsilon_3}{2}. \tag{3.5}$$

С учетом (3.3) перепишем (3.5) следующим образом:

$$u = \frac{1}{2E} \cdot \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot \left(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1\right)\right]. \tag{3.6}$$

(3.6) – уравнение потенциальной энергии упругой деформации для сложного напряженного состояния.

Потенциальная энергия упругой деформации затрачивается как на изменение формы, так и на изменение объема деформируемого тела, то есть

$$u = u_{\Phi} - u_V. \tag{3.7}$$