Задачи включают параметры a, b, ω, m, n. Параметры определяются по номеру варианта. Соответствие между ними устанавливает известный вам список. Условия задач включают функцию $f = f(x)$ и интервал $(0, \ell)$, которые определены следующим образом:

$$f(x) = \left(\frac{2}{h}\right)^{m+n+2} (x-A)^{n+1} (h+A-x)^{m+1} \Theta(x-A) \Theta(A+h-x) ; \tag{1}$$

$$\ell = h + B, \tag{2}$$

где Θ – функция Хевисайда,

$$A = \min(a, b), \ B = \max(a, b), \ h = \frac{m+n+a+b+\omega}{5}. \tag{3}$$

1. Рассмотрите задачу Коши

$$(\gamma x - y)u_y - (x + \gamma y)u_x + = 0, \ u|_S = x^m y^n,$$

где S – эллипс с полуосями $a > b$, оба фокуса лежат на оси Ox декартовых координат Oxy с началом отсчёта в фокусе лежащем слева от середины межфокуного отрезка, если смотреть вдоль оси Oy,

$$\gamma = \frac{p}{e\omega}, \ p = \frac{b^2}{a}, \ e = \sqrt{1 - b^2/a^2}.$$

Запишите задачу в полярных координатах $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Воспользуйтесь фокальным уравнением эллипса[1]

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}.$$

Визуализируйте графики $\{u(x,0), 0 < x < 2c\}$, и $\{u(x,0), c-a < x < 0\}$ где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – фокальное расстояния (половина межфокусного). В первом случае точка $(x, 0)$ пробегает межфокусный отрезок, а во втором случае – левый отрезок большой полуоси, отсечённый началом координат. Почему графики плохо себя ведут вблизи начала координат?

2. Решите задачу Коши

$$u_t + u^m u_x = 0, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R} \ \ u|_{t=0} = f + \omega^{-1},$$

и на этой основе визуализируйте «опрокидывание волны». Постройте характеристики, соответствующую решению данной задачи.

Рекомендация. Для визуализации графика решения $(x, u(x,t))$ (при фиксированном t) используйте команду `implcitplot`. В ней нужно указывать интервалы изменения u и x. Их нужно выбрать так, чтобы анимация давала достаточно ясную картину явления. Я рекомендую взять примерную область значений начальной функции за интервал изменения u, а за интервал изменения x выбрать так, чтобы внутрь него проектировались основные (наиболее заметные) «пики» и «впадины» графика начальной функции. Советую взять $x \in (0, \ell)$. Чтобы визуализировать характеристики, нужно анимировать тот же `implcitplot`, что и при анимации решения, но за параметр анимации принять u, и анимировать линии на плоскости (x, t), указав при этом опцию `trace`. При этом за нижнюю границу диапазона u лучше сдвинуть от минимума начальной функции на небольшое положительное число, например, 0.1.

[1] Числа p и e называют фокальным параметром и эксцентриситетом эллипса.