

Тема 4 а)

Контрольные задания

Вычисление пределов и дифференцирование

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x$.
2. Дана последовательность, заданная общим членом $x_n = \frac{n^2 + 1}{3n^2 - 4} + \frac{\sqrt{n} + 5}{n + 2}$. Найти ее предел при $n \rightarrow \infty$.
3. Найти пределы функции $y = \frac{1}{1 + 2^{1/x}}$ при $x \rightarrow +0$ и при $x \rightarrow -0$.
4. Найти первую и вторую производную функции $y = x + \sin x$, задав функцию и ее производную а) как выражение, б) как функциональный оператор. В обоих случаях вычислить значение производных в точке $x = \pi/2$.
5. Найти производную $\frac{d^5}{dx^5} (5x^6 \ln x)$ с помощью команды `diff` и с помощью оператора `D`.
6. Найти частную производную $\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} (x^6 \sin(y^3))$ с помощью команды `diff` и с помощью оператора `D`.
7. Найти все частные производные первого и второго порядка для заданной функции. При необходимости упростить ответ.

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}.$$

Исследование функции

8. Определить средствами Maple точки разрыва и виды разрывов для заданных ниже функций. Исследовать указанные функции с помощью команд `iscont`, `discont`, `singular`. Вычислить односторонние пределы в точках разрыва для определения характера разрыва (устранимый разрыв I рода, неустранимый разрыв I рода, разрыв II рода). Записать ответ в текстовом комментарии. Для иллюстрации ответа построить графики указанных функций.

1) $y = \frac{\sin x}{x}$

4) $y = e^{\frac{1}{x}}$

2) $y = \operatorname{signum}(x)$

5) $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

3) $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$

6) $y = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$.

9. Найти глобальные и локальные экстремумы (с указанием характера экстремума: минимум или максимум) и точки экстремумов функций: $y = \operatorname{arctan}(x) - \frac{\ln(1 + x^2)}{2}$, $y = x^4 - x^2$. Использовать команды `extrema`, `minimize`, `maximize`. Для иллюстрации ответа построить графики указанных функций.

10. Найти экстремумы функции и точки экстремумов на заданном интервале: $f(x) = x \sin x + \cos x - x^2/4$, $x \in [-1,1]$ и указать их характер. Использовать команды **extrema**, **minimize**, **maximize**. Для иллюстрации ответа построить графики указанных функций.
11. С помощью команд **extrema**, **minimize**, **maximize** найти экстремумы и точки экстремумов функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Построить график функции с указанием координат экстремумов на рисунке.
12. Провести полное исследование функции $y = \frac{x^2(x-1)}{x+1}$ по схеме (стр. 9 в Теме 4 а):
- 1) Область определения функции
 - 2) Непрерывность и точки разрыва функции (использовать **iscont**, **discont**, **singular**, вычисление односторонних пределов)
 - 3) Исследование функции на четность и нечетность (использовать **type(f, evenfunc(x))**, **type(f, oddfunc(x))**)
 - 4) Исследование функции на периодичность
 - 5) Нахождение вертикальных и наклонных асимптот
 - 6) Исследование функции на глобальные и локальные экстремумы, нахождение глобальных минимумов и максимумов, локальных минимумов и максимумов. Найти точки экстремума и значения функции в точках экстремума (использовать **extrema**, **maximize**, **minimize** с опцией **location**)
 - 7) Построение графика функции с указанием координат экстремумов графике в виде min: (xmin, ymin), max: (xmax, ymax).

Локальные и условные экстремумы функции многих переменных

13. Найти условный экстремум функции. Проверить полученные наборы значений переменных и записать ответ в текстовом комментарии.
 $f(x, y, z) = y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xz - 2xy$, при $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1$
14. Найти значения переменных, при которых линейная функция $f(x, y, z) = x + y + z$ имеет максимум, если требуется выполнение условий $x+y \leq 2$, $z \leq 1$.

Разложение в ряд и аппроксимация

15. Разложить в степенной ряд и в ряд Тейлора $f(x) = \arcsin x$ в окрестности $x = 0$ и $x = -1$ до восьмого порядка. Сравнить действия двух команд. Почему может не существовать разложение функции в ряд Тейлора? Для поиска ответа на вопрос найдите производные функции в указанных точках. Сформулировать ответ в текстовом комментарии.
16. Найти несколько частичных сумм ряда Маклорена функции $f = (1 - x^2) \arctg x$ для $n=3, 5, 10, 20$. Построить в одних осях графики самой функции и ее приближений в виде частичных сумм ряда Маклорена на отрезке $[-1, 1]$. Изобразить исходную функцию черной сплошной линией, а графики ее приближений – пунктирными линиями разных цветов. Добавить легенду с подписями кривых.
17. Разложить в ряд Тейлора функцию двух переменных $f(x, y) = \arctg \frac{x-y}{1+xy}$ до десятого порядка в окрестности точки $(0, 0)$.
18. Задана таблица значений некоторой функции в точках. Найти функцию, которая проходит через эти точки и построить ее график. Обозначить точки интерполяции на графике (команда **pointplot**).

x	10	15	17	20
y	3	7	11	17