УМФ
Лекция 4
1-й семестр – осень 2018 г
Нелинейные уравнения с частными производными первого порядка. Метод характеристик.
Контактные и канонические преобразования. Метод Якоби интегрирования гамильтоновых систем.

Моргулис Андрей Борисович
КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

Как решить уравнение $F(x, u_x, u) = 0$?

Как решить уравнение $F(x, u_x, u) = 0$?

(i) Построить НИМ $\Sigma_{S,\varphi}$– поднятие данных Коши S, φ. Возможность такого построения в общем случае обсудим позже.

Как решить уравнение $F(x, u_x, u) = 0$?

(i) Построить НИМ $\Sigma_{S,\varphi}$– поднятие данных Коши S, φ. Возможность такого построения в общем случае обсудим позже.

(ii) По теореме 1 лекции 3 получить из НИМ лежандрово многообразие, вложенное в уравнение $\mathcal{E} = \{J : F(J) = 0\}$. Убедиться в биективности канонической проекции построенного лежандрова многообразия (или некоторой его части, прилегающей к НИМ). Далее считаем, что однозначность установлена по крайней мере вблизи начальной кривой S.

Как решить уравнение $F(x, u_x, u) = 0$?

(i) Построить НИМ $\Sigma_{S,\varphi}$– поднятие данных Коши S, φ. Возможность такого построения в общем случае обсудим позже.

(ii) По теореме 1 лекции 3 получить из НИМ лежандрово многообразие, вложенное в уравнение $\mathcal{E} = \{J : F(J) = 0\}$. Убедиться в биективности канонической проекции построенного лежандрова многообразия (или некоторой его части, прилегающей к НИМ). Далее считаем, что однозначность установлена по крайней мере вблизи начальной кривой S.

(iii) Чтобы практически найти $u(x)$ при заданном x, поставим задачу Коши для характеристического поля

$\dot{Q} = F_p(P, Q, Z);\ \dot{P} = -(F_x + F_z P)(P, Q, Z);\ \dot{Z} = PF_p(P, Q, Z),$

$(P, Q, Z)|_{\tau=0} = (p, q, z)$, q – заданная точка, z, p – неизвестны.

Решаем характеристическую систему. Находим

$Q = Q(p, q, z, \tau);\ P = P(p, q, z, \tau),\ Z = Z(p, q, z, \tau).$

Как решить уравнение-II?

Как решить уравнение-II?

(iv) Соединим характеристикой точку (q, p, z) с точкой $(P, Q, Z) \in \Sigma_{S,\varphi}$. Пусть $S = \{q : \Phi(q) = 0\}$. Тогда $Z = \psi(Q)$, $P = \nabla\psi(Q)$, и $\psi(Q) = \varphi(Q)$ для всех $Q : \ \Phi(Q) = 0$. Следовательно,

$\Phi(Q) = 0, \ P(p, q, z, \tau) = \nabla\psi(Q), \ Z(x, p, u, \tau) = \varphi(Q)$, где $Q = Q(p, q, z, \tau)$

Имеем $2 + n$ уравнений с $2n + 2$ неизвестными p, q, z, τ. Выражаем $n + 2$ неизвестных p, z, τ через n-вектор q и находим, в частности, $u = z(q)$.

Как решить уравнение-II?

(iv) Соединим характеристикой точку (q,p,z) с точкой $(P,Q,Z)\in\Sigma_{S,\varphi}$. Пусть $S=\{q:\ \Phi(q)=0\}$. Тогда $Z=\psi(Q)$, $P=\nabla\psi(Q)$, и $\psi(Q)=\varphi(Q)$ для всех $Q:\ \Phi(Q)=0$. Следовательно,

$\Phi(Q)=0,\ P(p,q,z,\tau)=\nabla\psi(Q),\ Z(x,p,u,\tau)=\varphi(Q)$, где $Q=Q(p,q,z,\tau)$

Имеем $2+n$ уравнений с $2n+2$ неизвестными p,q,z,τ. Выражаем $n+2$ неизвестных p,z,τ через n-вектор q и находим, в частности, $u=z(q)$.

Построение $\Sigma_{S,\varphi}$. Почему НИМ нужно строить именно так?

Пусть $(u-\varphi)|_S=0$. $d_y\Phi\neq 0\implies \exists e\in\mathbb{R}^n:\ d_y\Phi(e)=1\implies$

$\forall\ \tilde\xi\in\mathbb{R}^n\ d_y\Phi(\tilde\xi-d_y\Phi(\tilde\xi)e)=0\implies d_yu(\tilde\xi-d_y\Phi(\tilde\xi)e)=d_y\varphi(\tilde\xi-d_y\Phi(\tilde\xi)e)\implies$

$d_yu(\tilde\xi)=d_y\varphi(\tilde\xi)+(d_y(u-\varphi))(e)d_y\Phi(\tilde\xi))\implies\nabla u=\nabla\varphi+\lambda\nabla\Phi,\ \lambda=(d_y(u-\varphi))(e)$

Построение $\Sigma_{S,\varphi}$. Вычисление λ. Выбор λ обеспечивает вложение $\Sigma_{S,\varphi}$ в уравнение, что выражается равенством

$$F(\nabla\psi(q),q,\varphi(q))=0\ \forall q\in S=\{q:\ \Phi(q)=0\},\ \text{где}\ \nabla\psi(q)=\nabla\varphi+\lambda\nabla\Phi \qquad (1)$$

Нехарактеристические точки задачи Коши.

Нехарактеристические точки задачи Коши.

Пример 1. Несовместность задачи Коши. Уравнение (1) может быть неразрешимо относительно λ. Это означает, что данные Коши несовместны с уравнением. Например, уравнение $p^2 - 1 = 0$ несовместно с данными Коши $S = \{y = 0\}, \varphi(x) = x + \mathrm{e}^x$. В самом деле, относительно λ имеем уравнение $(1 + \mathrm{e}^x)^2 + \lambda^2 = 1$, которое не имеет решения.

Определение 1. Задача Коши

$$F(\nabla u, q, u) = 0,\ u|_S = \varphi,\ S = \{q : \Phi(q) = 0\} \tag{2}$$

называется совместной в т. $q \in S$, если уравнение (1) в т. q имеет решение $\lambda(q)$.

Совместность не означает единственность решения $\lambda(q)$. Пример неединственности – уравнение эйконала.

Определение 2. Точка $q \in S$ называется нехарактеристической для задачи Коши (2),если (i) задача Коши совместна в т. q и характеристическая траектория, проходящая через точку $(p, q, \varphi(q))$,, где $p = \nabla\varphi(q) + \lambda(q)\nabla\Phi(q)$, и λ – решение уравнения (1) канонически проецируется в характеристику, некасательную к S в точке q.

Нехарактеристические точки задачи Коши-II.

Нехарактеристические точки задачи Коши-II.

Согласно определению характеристического потока $\dot{q} = F_p$. Поэтому $F_p(p, q, z)$ даёт направление характеристики, проходящей через точку q. Поэтому условие нехарактеристичности принимает вид

$$F_p(p, q, z)\nabla\Phi(q) \neq 0,\ z = \varphi(q),\ p = \nabla\varphi(q) + \lambda(q)\nabla\Phi(q).$$

В случае квазилинейного уравнения $ap = \gamma$, $a = a(q, z)$ – вектор, $\gamma = \gamma(q, z)$ – скаляр,

$$\lambda = \frac{a\nabla\varphi - \gamma}{a\nabla\Phi},\ a = a(q, \varphi(q)),\ \gamma = \gamma(q, \varphi(q)),\ \Phi(q) = 0$$

Решение $\lambda = \lambda(q)$ существует, для всех тех $q \in S$,при которых знаменатель не равен нулю, т.е. условие нехарактеристичности $a\nabla\Phi \neq 0$.

В случае задачи Коши в нормальной форме

$$u_t + H(\nabla u, x, t, u) = 0, u|_{t=0} = \varphi,\ \varphi = \varphi(x),\ q = (x, t),\ p = (p^t, p),\ \Phi(q) = t;$$

$F = p^t + H(p, q, z) = 0, \lambda = \lambda(q) = H(\nabla\varphi(x), x, 0, \varphi(x))$ всегда существует.

Теорема о существовании решений общей задачи Коши

Теорема 1. Пусть точка $q_0 \in S$ нехарактеристическая для задачи Коши (2). Тогда найдётся такая окрестность $\mathcal{U}_{q_0}$ точки q_0, что все точки $q \in S \cup \mathcal{U}_{q_0}$ нехарактеристические, и точки $(q, \nabla\varphi(q) + \lambda(q)\nabla\Phi(q), \varphi(q))$, $q \in S \cup \mathcal{U}_{q_0}$ образуют НИМ – поднятие данных Коши S, φ в уравнение $F = 0$.

Теорема 2. Задача Коши (2) имеет локальное решение в окрестности любой нехарактеристической точки.

Замечание 1. Каждому поднятию данных Коши φ, S в уравнение $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ в окрестности нехарактеристической точки соответствует ровно одно локальное решение задачи Коши. Таким образом, неединственность решения задачи Коши связана исключительно с неединственностью поднятия (как в уравнении эйконала). Заметим, что нормальная задача Коши и задача Коши для квазилинейного уравнения однозначно определяют поднятие в окрестности любой нехарактеристической точки.

Диффеоморфизмы и точечные преобразования

Диффеморфизм $h : (x, y) \mapsto (X, Y)$ индуцирует преобразование функций и их производных

$$V \mapsto v = V(X(x,y), Y(x,y)),\ v_x = V_X X_x + V_Y Y_x;\ v_y = V_X X_y + V_Y Y_y.$$

Следовательно, каждому $h \in \mathrm{Diff}(D, D_1)$ можно сопоставить $\widehat{h} : \mathcal{J}(D) \to \mathcal{J}(D_1)$

$$\widehat{h} : (P, Q, Z) \mapsto (p, q, z),\ P = (P^X, P^Y),\ p = (p^x, p^y),\ Q = (X, Y),\ q = (x, y);$$

$$p^x = P^X X_x + P^Y Y_x,\ p^y = P^X X_y + P^Y Y_y,\ z = Z,\ X = X(x,y),\ Y = Y(x,y) \qquad (3)$$

Пусть $\Gamma = \mathrm{Gr}_1(V) = \{(P, Q, Z) = (V_X(Q), V_Y(Q), X, Y, V(Q))\}$. Рассмотрим $\gamma = \widehat{h}\Gamma$. Имеем $X = X(x,y),\ Y = Y(x,y)$

$$z = V(X, Y),\ p^x = V_X X_x + V_Y Y_x = v_x;\ p^y = V_X X_y + V_Y Y_y = v_y,$$

Следовательно, $\gamma = \widehat{h}\Gamma$ – 1- график, при условии, что Γ – 1-график.

Построение $\widehat{h}$ по h – частный случай конструкции, называемой поднятием точечного преобразования. Цель поднятия – построение преобразования, сопоставляющего 1-графику 1-график

Определение 3. Точечным называется взаимно-однозначное преобразование вида

$$Z = Z(x,y,z),\ X = X(x,y,z),\ Y = Y(x,y,z) \text{ или } Q = Q(q,z),\ Z = Z(q,z)$$

Точечные преобразования графика

Например, любой диффеоморфизм $h : q \mapsto Q$ порождает точечное преобразование $Z = z,\ \ Q = h(q)$.

Пусть $\gamma_0 = \mathrm{Gr}(v) = \{(q, z) = (q, v(q))\}$ и $h : (q, z) \mapsto (Q, Z)$ точечное преобразование. Тогда $\Gamma_0 = g\gamma_0 = \{(Q = Q(q, v(q)), Z = Z(q, v(q)))\}$.

Если отображение $r : q \mapsto Q(q, v(q))$ обратимо в окрестности $\mathcal{U}$ точки q_0, то $\Gamma_0 \cap h\mathcal{U} = \mathrm{Gr}(V),\ V(Q) = Z(q, v(q)),\ q = R(Q),\ R = r^{-1}$ на $h\mathcal{U}$.
Указанная локальная обратимость имеет место при условии

$$\det \frac{\partial r}{\partial q} = \det \left(\frac{\partial Q}{\partial q} + (\nabla v) \otimes \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \neq 0,\ \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right)_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j},\ \left((\nabla v) \otimes \frac{\partial Q}{\partial z} \right)_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial q_j}.$$

Пусть преобразование $q = R(Q)$ определено и $V(Q) = Z(q, v(q))$. Тогда

$$\nabla_Q V = \left(\frac{\partial Z}{\partial q} + \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial q} \right) \frac{\partial R}{\partial Q} = \left(\frac{\partial R}{\partial Q} \right)^* \left(\frac{\partial Z}{\partial q} + \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial q} \right), \text{ где}$$

$$\frac{\partial R}{\partial Q} = \left(\frac{\partial r}{\partial q} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial Q}{\partial q} + (\nabla v) \otimes \frac{\partial Q}{\partial z} \right)^{-1},\ R = r^{-1},\ r(q) = Q(q, v(q))$$

Поднятие точечных преобразований

Определение 4. Поднятием точечного преобразования $Q = Q(q,z),\ Z = Z(q,z)$ называется преобразование $(p,q,z) \mapsto (P,Q,Z)$, где

$$P = \left(\frac{\partial Z}{\partial q} + \frac{\partial Z}{\partial z} p\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial q} + p \otimes \frac{\partial Q}{\partial z}\right)^{-1}, Q = Q(q,z),\ Z = Z(q,z).$$

(Правое умножение вектора на матрицу=обычное умножение на сопряжённую)

Теорема 3. Пусть точечное преобразование $Q = Q(q,z),\ Z = Z(q,z)$ определено в окрестности точки $(q_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, и найдётся $p_0 \in \mathbb{R}^n$, такой, что матрица $\frac{\partial Q}{\partial q} + p_0 \otimes \frac{\partial Q}{\partial z}$ невырождена при $q = q_0, z = z_0$. Пусть $v : \mathrm{Gr}_1(v) \ni (p_0, q_0, z_0)$. Тогда найдётся окрестность $\mathcal{N}$ точки (p_0, q_0, z_0) такая что поднятие указанного точечного преобразования отображает $\mathcal{N} \cap \mathrm{Gr}_1(v)$ в 1-график в 1-график функции $V(Q) = Z(q, v(q))$, где $q = R(Q)$, $R = r^{-1}$, $r : q \mapsto Q(q, v(q))$.

◀ Невырожденность матрицы $\frac{\partial Q}{\partial q} + p \otimes \frac{\partial Q}{\partial z}$ в точке (p_0, q_0, z_0) влечёт существование у этой точки такой окрестности $\mathcal{N}$, в которой эта матрица невырождена всюду. Поэтому в $\mathcal{N}$ определено поднятие в смысле определения 4. Если $(p_0, q_0, z_0) \in \mathrm{Gr}_1(v)$, то в этой точке отображение $r : q \mapsto Q(q, v(q))$ удовлетворяет условию теоремы об обратном отображении. Поэтому, сужая, если нужно $\mathcal{N}$, добьёмся, чтобы в окрестности $\mathcal{N}_0 = \pi\mathcal{N}$ точки q_0 было определено и дифференцируемо отображение $R = r^{-1}$. Далее нужно просто повторить рассмотрение точечного преобразования графика функции. ▶

Контактные преобразования

Замечание 2. Пусть $h : (q, z) \mapsto (Q(q, z), Z(q, z))$ – точечное преобразование, $\widehat{h}$ – поднятие h, $v = v(q)$ – функция, и $r = Q(p, v(q))$. 1-график функции v параметризуется отображением графика $G_1^v : q \mapsto (\nabla v(q), q, v(q))$, отображение $\widehat{h} \circ G_1^v$ параметризует $\widehat{h}\mathrm{Gr}_1(v)$, и $r = \pi \circ \widehat{h} \circ G_1^v$. Невырожденность матрицы $\frac{\partial Q}{\partial q} + p \otimes \frac{\partial Q}{\partial z}$ в точке $J_0 = (p_0, q_0, z_0)$ означает что r имеет максимальный ранг, а это, по определению критической точки, означает, что точка $J_1 = \widehat{h}(J_0)$ некритическая для π. Следовательно, утверждение теоремы 3 можно переформулировать так: *образ 1-графика при поднятии точечного преобразования есть 1-график некоторой функции в окрестности любой своей точки, некритической для канонической проекции.*

Определение 5. Отображение

$$h : (p, q, z) \mapsto (P, Q, Z), P = P(p, q, z),\ \ Q = Q(p, q, z), Z = Z(p, q, z),$$

называется контактным, если образ 1-графика есть 1-график некоторой функции в окрестности любой своей точки, некритической для канонической проекции.

Контактное преобразование h отображает решение уравнения $F(P, Q, Z) = 0$ в решение уравнения $\mathcal{F}(p, q, z)$, $\mathcal{F} = F \circ h$

Замечание 3. Поднятия точечных преобразований НЕ ИСЧЕРПЫВАЮТ контактные преобразования.

Преобразование Лежандра. Производящие функции

Пример 2. Преобразование Лежандра $\Lambda : (p,q,z) \mapsto (-q,p,z-pq)$, то есть $P=-q,\ Q=p,\ Z=z-pq$. Тогда

$$\Lambda\circ G_1^v : q \mapsto (P,Q,Z),\ P=-q,\ Q=\frac{\partial v}{\partial q}(q), Z=v(q)-q\frac{\partial v}{\partial q}(q),\ r=\pi\circ\Lambda\circ G_1^v : q\mapsto \frac{\partial v}{\partial q}.$$

Условие некритичности точки $(P_0,Q_0,Z_0)=\Lambda(p_0,q_0,z_0)$ имеет вид $\det\mathcal{H}_v(q_0)\neq 0$, где $\mathcal{H}_v$ – матрица Гессе функции v. Одновременно это условие означает локальную обратимость отображения r. Определим $V(Q)=v(q)-q\frac{\partial v}{\partial q}(q),\ Q=\frac{\partial v}{\partial q}(q)$. Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial Q}=\frac{\partial(v(q)-qQ)}{\partial Q}=-q+\left(\frac{\partial v}{\partial q}-Q\right)\frac{\partial q}{\partial Q}=-q=P.$$

Итак, преобразование Лежандра – контактное преобразование.

Замечание 4. В литературе под именем преобразование Лежандра часто выступает несколько другой объект: преобразование функций, сопоставляющее функции $g=g(x),\ x\in\mathbb{R}^n$ функцию $\bar g(y)=\max_x(yx-g(x))$. При этом $y=\frac{\partial g}{\partial x}$ (необходимое условие экстремума). В частности, такое преобразование (формально) претерпевает функция $v=v(q)$ при отображении графиков, порождённом преобразованием Лежандра в смысле примера 2. При этом роли $x,y,\ g,\bar g$ играют $q,Q,\ v,V$.

Производящие функции

Лемма 1. Пусть $\Phi = \Phi(q, Q, z)$ – заданная функция. Пусть преобразование $h : (p, q, z) \mapsto (P, Q, Z)$ неявно задано равенствами

$$Z = \Phi(q, Q, z), \;\; P = \frac{\partial \Phi}{\partial Q}(q, Q, z), \;\; \frac{\partial \Phi}{\partial z}(q, Q, z) p = -\frac{\partial \Phi}{\partial q}(q, Q, z) \qquad (4)$$

Тогда h – контактное преобразование.

◀ Из третьего уравнения системы (4)

$$Q = Q(p, q, z) \implies Z(p, q, z) = \Phi(q, Q(p, q, z), z), \;\; P(p, q, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial Q}(q, Q(p, q, z), z).$$

Действие $h \circ G_1^v$ неявно задано соотношениями

$$Z = \Phi(q, Q, z), \;\; P = \frac{\partial \Phi}{\partial Q}(q, Q, z), \;\; \frac{\partial \Phi}{\partial z}(q, Q, z) \frac{\partial v}{\partial q}(q) = -\frac{\partial \Phi}{\partial q}(q, Q, z), \;\; z = v(q) \;\; (5)$$

Нужно показать, что $P = \frac{\partial V}{\partial Q}$, $V(Q) = \Phi(q, Q, v(q))$, где $q = R(Q)$ выражено из двух последних уравнений системы (5). Имеем

$$\frac{\partial V}{\partial Q} = \frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial \Phi}{\partial Q} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial Q} = P + \frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial Q} = P. \;\; ▶$$

Определение 6. Функция Φ порождающая систему (4), называется производящей функцией контактного преобразования, определяемого системой (4).

Пример 3. Производящая функция преобразования Лежандра $\Phi = z - qQ$
Известно, что любое контактное преобразование локально определяется некоторой производящей функцией.
Определение 7. Каноническим называется контактное преобразование с производящей функцией $\Phi = z - S(Q, q)$, где S – некоторая функция, которая также называется производящей.
В случае канонического преобразования определяющая система (4) имеет вид

$$Z = z - S(q, Q),\ P = -\frac{\partial S}{\partial Q}(q, Q),\ p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, Q) \tag{6}$$

Замечание 5. Канонические преобразования преобразуют уравнение Гамильтона-Якоби $H(p, q) = \mathrm{const}$ в уравнение Гамильтона-Якоби $H_1(P, Q) = \mathrm{const}$, решение переходит в решение, характеристические траектории – в характеристические траектории. Уравнение последних имеет вид

$$\dot{p} = -H_q, \quad \dot{q} = H_p. \tag{7}$$

Определение 8. Система ОДУ (7) называется гамильтоновой системой в канонической форме. Функция H называется гамильтонианом системы.
Каноническое преобразование отображает гамильтонову систему в канонической форме в гамильтонову систему в канонической форме.

Метод Якоби.

Методом Якоби называют процедуру интегрирования гамильтоновых систем ОДУ (7) с помощью канонических преобразований (6).

Идея метода такова: заметим, что гамильтонианы вида $H_1(P,Q) = K(P)$, порождают тривиальные гамильтоновы системы

$$\dot{P} = 0, \quad \dot{Q} = K_P(P) \Longrightarrow Q = Q_0 + tK_P(P_0), \quad P_0 = \mathrm{const}, \ Q_0 = \mathrm{const}.$$

Например, такая система у нас возникала при рассмотрении простейшего уравнения эйконала.

Найдём каноническое преобразование $(p,q) \to (P,Q)$, преобразующее исходный гамильтониан $H(p,q)$ в гамильтониан $K(Q)$. В новых координатах (P,Q) решение гамильтоновой системы будет линейной функцией $P = P_0 - tK_Q(Q_0)$, $P_0 = \mathrm{const}, Q = \mathrm{const}$. Решение $(p(t), q(t))$ восстанавливается обратным каноническим преобразованием.

Замена P на Q – просто дань традиции, тем более, что импульсы и координаты равноправны ввиду преобразования Лежандра.

Пусть $S = S(q,Q)$ – производящая функция искомого канонического преобразования. Тогда $p = \frac{\partial S}{\partial q}$, так что S – решение уравнения Гамильтона-Якоби

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}(q,Q), q\right) = K(Q), \ Q = (Q_1, \ldots, Q_n) \ \text{– параметр.} \tag{8}$$

Разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби.

Требуется найти целое семейство решений уравнения (8), зависящее от параметров $Q_1, .., Q_n$, n – размерность пространства координат. При этом правая часть уравнения (8) не задана, а определяется в процессе решения задачи. Общего способа построения такого семейства нет, но во многих важных частных случаях результат даёт следующая процедура.

Пусть уравнение (8) записано в виде

$$\Phi_1\left(H_1\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, q_1, K\right), \frac{\partial S}{\partial q_2}, q_2, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_n, K\right) = 0. \tag{9}$$

Полагаем $S = S_1(q_1, Q_1, K) + S_{12}(q_2, \dots, q_n, Q, K)$, и сводим (9) к уравнениям

$$H_1\left(\frac{\partial S_1}{\partial q_1}, q_1, K\right) = K_1(Q_1); \quad \Phi_1\left(K_1(Q_1), \frac{\partial S_{12}}{\partial q_2}, q_2, \dots, \frac{\partial S_{12}}{\partial q_n}, q_n, K\right) = 0, \tag{10}$$

Разрешим первое уравнение в (9) относительно $\frac{\partial S_1}{\partial q_1}$, и получим

$$\frac{\partial S_1}{\partial q_1} = \psi_1(q_1, Q_1, K) \implies S_1 = \int \psi_1(q_1, Q_1, K)dq_1. \tag{11}$$

Пусть теперь второе уравнение в (10) переписано в виде

$$\Phi_2\left(Q_1, H_2\left(p_2, \frac{\partial S_{12}}{\partial q_n}, Q_1, K\right), \frac{\partial S_{12}}{\partial q_3}, q_3, \dots, \frac{\partial S_{12}}{\partial q_n}, q_n, K\right) = 0. \tag{12}$$

Разделение переменных - II.

Полагаем $S_{12} = S_{22}(q_3, \dots, q_n, Q, K) + S_2(q_2, Q_1, Q_2, K)$, и сводим (12) к уравнениям

$$H_2\left(\frac{\partial S_2}{\partial q_2}, q_2, Q_1\right) = K_2(Q_1, Q_2);\;\; \Phi_2\left(K_1, K_2, \frac{\partial S_{22}}{\partial q_3}, q_3, \dots, \frac{\partial S_{22}}{\partial q_n}, q_n, K\right) = 0, \qquad (13)$$

Разрешим первое уравнение в (13) относительно $\frac{\partial S}{\partial q_2}$, и получим

$$\frac{\partial S_2}{\partial q_2} = \psi_2(q_1, Q_1, Q_2, K) \Longrightarrow S = \int \psi_2(q_2, Q_1, Q_2, K)dq_2. \qquad (14).$$

В благоприятном случае указанные шаги можно повторять до тех пор, пока переменные полностью не разделятся, так что на последнем шаге получим

$$H_n\left(\frac{\partial S_n}{\partial q_n}, q_n, Q_1, .., Q_{n-1}, K\right) = K_n(Q_1, .., Q_n);\;\; \Phi_{n-1}(K_1, ..K_n, K) = 0 \qquad (15)$$

Выразив S_n из первого уравнения в (15), найдём

$$S(q_1, ..q_n, Q_1, ..Q_n) = S_1(q_1, Q_1, K) + S_2(q_1, q_2, Q_1, Q_2, K) + \dots + S_n(q_1, ..q_n, Q_1, ..Q_n, K),$$

где переменные $K, Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ зависимы в силу второго уравнения в (15), которое принимает вид $\Phi_n(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, K) = 0$.

Два притягивающих центра.

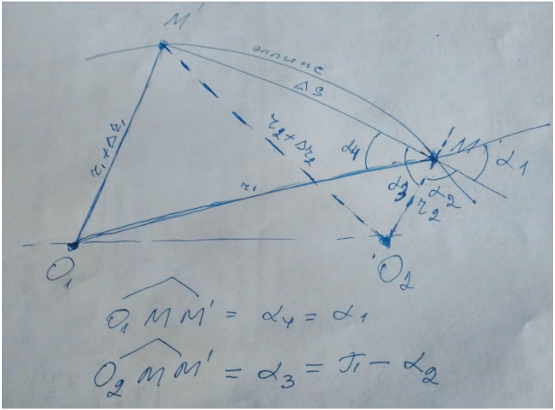

Рис. : 1.

Речь идёт о движении материальной частицы под действием сил притяжения к двум неподвижным центрам O_1, O_2 (см. рис. 1).

Два притягивающих центра. Декартовы координаты.

На частицу, расположенную в точке M действуют сила $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2$, где $\overrightarrow{F}_i = \frac{k_i\overrightarrow{MO_i}}{r^3}$, и k_i – физические константы. Отсюда $F_i = k_i\nabla\frac{1}{r_i}$, и $F = \nabla(\frac{k_1}{r_1} + \frac{k_2}{r_2})$. Второй закон Ньютона даёт уравнения движения

$$\ddot{x} = -U_x, \quad \ddot{y} = -U_y, \quad U(x,y) = -\left(\frac{k_1}{r_1} + \frac{k_2}{r_2}\right) \qquad (16)$$

Здесь масса частицы взята за 1, и x, y – декартовы координаты, с началом в центре отрезка O_1O_2, ось $Ox = \overrightarrow{O_1O_2}$.

Положим $p^x = \dot{x}$, $p^y = \dot{y}$, и перепишем систему (16) в канонической гамильтоновой форме (7):

$$\dot{p}^x = -H_x, \ \dot{p}^y = -H_y, \ \dot{x} = H_{p^x}, \ \dot{y} = H_{p^y}; \quad H = (p^x)^2/ + (p^y)^2/2 + U(x,y). \qquad (17)$$

Рассмотрим функцию L, сопряжённую с H посредством инволюции Лежандра (в смысле замечания 4 выше):

$$H(p^x, p^y, x, y) = \max_v(\langle p, v\rangle - L), \quad L = v^2/2 - U(x,y), \qquad (18)$$

где $\langle p, v\rangle$ означает значение линейной однородной функции p на векторе v, представляющем скорость частицы;

Два притягивающих центра. Эллиптические координаты.

v^2 – квадрат длины вектора v, $v^2/2$, U – кинетическая и потенциальная энергии. Функция L называется лагранжианом системы (16). Функцию p можно выразить с помощью двух числовых коэффициентов $\langle p, v\rangle = p^x\dot{x} + p^y\dot{y}$, где $(\dot{x}, \dot{y})$ декартовы координаты вектора v.

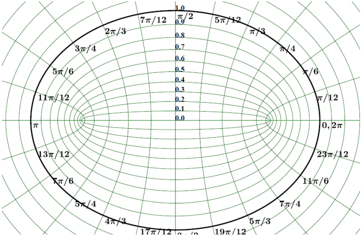

Рис. : 2. Рисунок из Википедии, Автор: SharkD https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3569780

Следующий шаг – выразить гамильтониан через эллиптические координаты,

$$\xi = r_1 + r_2, \quad \eta = r_1 - r_2;$$

так что координатные линии $\xi = \mathrm{const}$, $\eta = \mathrm{const}$ – софокусные эллипсы и гиперболы, соответственно (рис. 2).

Коэффициенты Лямэ и лагранжиан.

Пусть $M = (x, y)$, $M' = (x + \Delta x, y + \Delta y)$. Тогда $|MM'|^2 = (\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$. Устремив $M' \to M$, находим $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. Переходим к новым координатам: $x = X(\xi, \eta)$, $y = Y(\xi, \eta)$, $dx = X_\xi d\xi + X_\eta d\eta$, $dy = Y_\xi d\xi + Y_\eta d\eta$. Отображение $\eta \mapsto (X, Y)|_{\xi=\mathrm{const}}$ параметризует эллипсы координатной сетки, отображение $\xi \mapsto (X, Y)|_{\eta=\mathrm{const}}$ – гиперболы той же сетки. Векторы (X_ξ, Y_ξ), (X_η, Y_η) определяют направления касательных к гиперболе и эллипсу, пересекающимся в точке (ξ, η). Как видно из рисунка 2, эти направления ортогональны. Итак, $(ds)^2 = a^2(d\xi)^2 + b^2(d\eta)^2$.

Определение. Величины a^2, b^2 называются коэффицинтами Лямэ. Криволинейные координаты для которых $(ds)^2$ содержит только полные квадраты называются отогональными.

Запишем кинетическую энергию в новых координатах. Имеем $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, где $\dot{x} = X_\xi \dot{\xi} + X_\eta \dot{\eta}$, $\dot{y} = Y_\xi \dot{\xi} + Y_\eta \dot{\eta}$. Ввиду ортогональности координат,

$$v^2 = a^2 \dot{\xi}^2 + b^2 \dot{\eta}^2, \tag{19}$$

Перейдём к потенциальной энергии.

$$-U = \frac{k_1}{r_1} + \frac{k_2}{r_2} = \frac{k_1 r_2 + k_2 r_1}{r_1 r_2} = 2\frac{k_1(\xi - \eta) + k_2(\xi + \eta)}{\xi^2 - \eta^2} = 4\frac{\mu_1 \xi + \mu_2 \eta}{\xi^2 - \eta^2}, \tag{20}$$

где $2\mu_1 = k_1 + k_2$, $2\mu_2 = k_2 - k_1$.

Гамильтониан в эллиптических координатах

Поскольку лежандрова инволюция не зависит от выбора координат, находим выражение $H(p^{\xi}, p^{\eta}, \xi, \eta)$ аналогично (18):

$$H = \max_{v}(\langle p, v\rangle - L), \quad L = v^2/2 - U(\xi, \eta), \text{ где } \langle p, v\rangle = \dot{\xi}p^{\xi} + \dot{\eta}p^{\eta}, \tag{21}$$

v^2 и U взяты из (19),(20). Отсюда

$$p^{\xi} = a^2\dot{\xi}, \ , p^{\eta} = b^2\dot{\eta}, \ H = \frac{(p^{\xi})^2}{2a^2} + \frac{(p^{\eta})^2}{2b^2} - 4\frac{\mu_1\xi + \mu_2\eta}{\xi^2 - \eta^2}. \tag{22}$$

Найдём коэффициенты Лямэ a, b. Пусть M смещается до M' по координатному эллипсу (рис. 1), так что $\xi = \mathrm{const}$. Применяем теорему косинусов к треугольникам O_1MM', O_1MM' и устремляем M' к M. В пределе $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$ (это известное свойство эллипса!). Таким образом,

$$dr_1 = -cos\alpha ds, \ dr_2 = \cos\alpha ds, \ d\eta = -2\cos\alpha ds \implies b^2 = \frac{1}{4\cos^2\alpha}.$$

Аналогичное рассмотрение координатной гиперболы $\eta = \mathrm{const}$ даёт

$$dr_1 = \sin\alpha ds, \ dr_2 = \sin\alpha ds, \ d\xi = 2\sin\alpha ds \implies a^2 = \frac{1}{4\sin^2\alpha}.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для двух центров

Из треугольника O_1MO_2 находим

$$\cos(2\alpha) = \frac{4c^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}, \text{ где } 2c = |O_1O_2|.$$

Затем, по формуле двойного угла находим a^2, b^2, и, ввиду формул (19) и (22), приходим к равенству

$$H = 2(p^\xi)^2\frac{\xi^2 - 4c^2}{\xi^2 - \eta^2} + 2(p^\eta)^2\frac{4c^2 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} - 4\frac{\mu_1\xi + \mu_2\eta}{\xi^2 - \eta^2} \tag{23}$$

где $2\mu_1 = k_1 + k_2$, $2\mu_2 = k_2 - k_1$, $2c$ – расстояние между центрами притяжения.

В соответствии с методом Якоби, ищем производящую функцию $S = S(\xi, \eta, Q_1, Q_2)$ канонического преобразования (6), приводящую гамильтониан (23) к тривиальному гамильтониану $K(Q)$. Производящую функцию ищем из уравнения Гамильтона-Якоби (8), которое в нашем случае имеет вид

$$(S_\xi)^2(\xi^2 - 4c^2) + (S_\eta)^2(4c^2 - \eta^2) = 2(\mu_1\xi + \mu_2\eta) + K(\xi^2 - \eta^2), \tag{24}$$

где $K = K(Q)$ найдём позднее. Уравнение (24) имеет вид (9), где

$$H_1 = (p^\xi)^2(\xi^2 - 4c^2) - K\xi^2 - 2\mu_1\xi; \quad \Phi_1 = H_1 + (p^\eta)^2(4c^2 - \eta^2) - 2\mu_2\eta + K\eta^2.$$

Разделение переменных для двух центров

Уравнения (10) пишем с $K_1(Q_1) = Q_1$, так что

$$(p^\xi)^2(\xi^2 - 4c^2) - K\xi^2 - 2\mu_1\xi = Q_1; \quad Q_1 + (p^\eta)^2(4c^2 - \eta^2) - 2\mu_2\eta + K\eta^2 = 0.$$

Теперь полагаем $H_2 = (p^\eta)^2(4c^2 - \eta^2) - 2\mu_2\eta + K\eta^2$, $\Phi_2 = Q_1 + H_2$ и получаем уравнение типа (12); сводим его к уравнениям (13), где полагаем $K_2(Q_1, Q_2) = -Q_1$, так что

$$(p^\eta)^2(4c^2 - \eta^2) - 2\mu_2\eta + K\eta^2 = -Q_1, \quad \Phi_2 = Q_1 - Q_1 = 0.$$

Мы пришли к финальным уравнениям (15), где второе уравнение заведомо выполнено, а K – свободный параметр. Итак, переменные полностью разделились, и мы выражаем искомую производящую функцию в квадратурах (полагая $Q = Q_1$)

$$S(\xi, \eta, Q, K) = \int \sqrt{\frac{Q + K\xi^2 + 2\mu_1\xi}{\xi^2 - 4c^2}}\, d\xi + \int \sqrt{\frac{2\mu_2\eta - Q - K\eta^2}{4c^2 - \eta^2}}\, d\eta \qquad (25)$$

Обозначим M, P импульсы, парные к координатам Q, K. В этих новых координатах гамильтониан равен K, и решение исходной системы имеет вид $P = P_0 - t$, $M = \mathrm{const}$, $Q = \mathrm{const}$, $K = \mathrm{const}$.

Описание движений

Чтобы выразить движение частицы в эллиптических координатах ξ, η, нужно обратить каноническое преобразование (6) с производящей функцией (25), что в нашем случае приводит к уравнениям

$$P_0 - t = -\frac{\partial S}{\partial K}(\xi, \eta, Q, K), \;\; M = -\frac{\partial S}{\partial Q}(\xi, \eta, Q, K).$$

где S задана в (25). Отсюда нужно выразить ξ, η через t, P_0, Q, K, M. Тогда импульсы примут вид

$$p^{\xi} = \frac{\partial S}{\partial \xi} = \sqrt{\frac{Q + K\xi^2 + 2\mu_1\xi}{\xi^2 - 4c^2}}; \;\; p^{\eta} = \frac{\partial S}{\partial \eta} = \sqrt{\frac{2\mu_2\eta - Q - K\eta^2}{4c^2 - \eta^2}};$$

Для построения конкретной траектории, скажем, проходящей через точку $\xi_0, \eta_0, p_0^{\xi}, p_0^{\eta}$ нужно определить значения P_0, Q, K, M из уравнений

$$P_0 = -\frac{\partial S}{\partial K}(\xi_0, \eta_0, Q, K), \;\; M = -\frac{\partial S}{\partial Q}(\xi_0, \eta_0, Q, K),$$

$$p_0^{\xi} = \sqrt{\frac{Q + K\xi_0^2 + 2\mu_1\xi_0}{\xi_0^2 - 4c^2}}; \;\; p_0^{\eta} = \sqrt{\frac{2\mu_2\eta_0 - Q - K\eta_0^2}{4c^2 - \eta_0^2}}$$