

Модуль 2 «Математический анализ, линейная алгебра и векторный анализ в Maple».
Задания для повторения

Задание 1. Исследовать функцию $y = 2x - \sqrt[3]{x^2}$ на непрерывность, найти точки разрыва, точки сингулярности, точки отсутствия гладкости (если есть) средствами Maple. Найти локальные экстремумы с указанием их характера. Построить график и указать на нем точки локальных экстремумов в виде loc max (x_{max} , y_{max}) и loc min (x_{min} , y_{min}). Для вывода надписи и чисел можно использовать команду `textplot` и опцию `typeset` (см. `help`).

Задание 2. Исследовать заданную функцию $f(x) = \frac{2-x^2}{1-x^4}$ по приведенной ниже схеме и построить график функции. Все выводы должны быть подкреплены соответствующими исследованиями (вспомнить определения из курса математического анализа!) и использованием необходимых команд Maple.

1. Исследование на четность/нечетность
2. Область определения функции, точки разрыва и их характер (при необходимости исследовать точки разрыва по определению, вычислив односторонние пределы и производные в этих точках).
3. Уравнения вертикальных и наклонных асимптот (если есть асимптоты)
4. Исследование функции на локальные экстремумы (минимальные и максимальные значения функции, точки минимума и максимума с помощью команд `extrema`, `minimize`, `maximize`)
5. График функции:
 - а) Общий вид графика
 - б) Часть графика в районе локальных экстремумов (если требуется)

Задание 3. Найти частичные суммы ряда Маклорена функции $f = x^3 \arccot x$ для $n=3..10$. Построить в одних осях графики самой функции и ее приближений в виде частичных сумм ряда Маклорена двумя способами: 1) с помощью команд `taylor` и `plot`, 2) с помощью `TaylorApproximation` пакета `Student`. Для частичной суммы при $n=10$ визуально определить интервал изменения независимой переменной, на котором разложение в ряд наилучшим образом аппроксимирует заданную функцию.

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = 2x^3$. Изобразить область на графике.

Задание 5. Определить минимальное количество слагаемых в сумме $\sum_{n=1}^N \frac{2^n}{n!}$, при котором значения частичной суммы и бесконечной суммы совпадают до 6 знака включительно после десятичной точки.

Задание 6. Построить график функции $y = \sin(x^2) \cdot e^{x/2}$. Определить любые два корня в интервале $[-3,3]$, такие, чтобы кривая между корнями была расположена выше оси Ox и образовывала с ней замкнутую область. Вычислить площадь этой области.

Задание 7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ -5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти ее определитель, обратную матрицу,

вычислить ранг и несколько норм (максимальную строчную, максимальную столбцовую и спектральную). Исследовать матрицу на симметричность, ортогональность и положительную/отрицательную определенность.

Задание 8. Записать и решить систему линейных алгебраических уравнений (команда solve). Перевести систему в матричный вид (с помощью соответствующей команды Maple!), выделив матрицу системы A и вектор правой части b, решить матричное уравнение вида $Ax=b$.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 3x + y + z = 6 \\ 2x + y + 2z = 6 \end{cases}$$

Задание 9. Провести спектральный анализ матрицы СЛАУ из предыдущего задания. Найти собственные числа и их кратность и соответствующие собственные векторы. Проверить найденные собственные числа и собственные векторы по определению, подставив их в уравнение $Ax=\lambda x$. С помощью команд Maple найти характеристический многочлен и его корни, а также Жорданову нормальную форму. Сравнить все результаты.

Задание 10. 1) Привести матрицу из задания 8 к верхнетреугольной форме. С полученной матрицей и вектором правой части из единиц решить СЛАУ методом обратной подстановки (команда BackwardSubstitute). 2) Привести матрицу из задания 8 к нижнетреугольной форме. С полученной матрицей и вектором правой части из двоек решить СЛАУ методом прямой подстановки (команда ForwardSubstitute).

Задание 11. Найти градиент скалярной функции $\varphi = x - 2y + 3z$. Найти дивергенцию и ротор градиента $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$ и $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi$.