УМФ
Лекция 7
1-й семестр – осень 2018 г
Системы уравнений с частными производными порядка 1. Автомодельные решения. Волны Римана.

Моргулис Андрей Борисович

КВМиМФ, а. 214

morgulisandrey@gmail.com

21 ноября 2018 г.

Инвариантность систем УрЧП

Система N УрЧП порядка 1 относительно m неизвестных функций независимой переменной $q \in \mathbb{R}^n$ отождествляется с множеством

$$\mathcal{E}_F = \{(p, q, z) \in \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \ F(p, q, z) = 0\}, \qquad (1)$$

где $F : (p, q, z) \mapsto F(p, q, z) \in \mathbb{R}^N$ – заданное отображение. Под решением данной системы, определённым в области $D \subset \mathbb{R}^n$ понимается отображение $u \in \mathrm{C}^1(D, \mathbb{R}^m)$, такое, что $Gr^{(1)}(u, D) \subset \mathcal{E}_F$.

Преобразование Ли – это преобразование $(p, q, z) \mapsto (P, Q, Z)$, отображающее 1-график в 1-график (см. лекцию 6). Точечное преобразование – диффеоморфизм вида $(q, z) \mapsto (Q(q, z), Z(q, z))$. Действие 1-поднятие точечного преобразования:

$$(p, q, z) \mapsto (P, Q, Z) \ z \mapsto Z(x, z); \ q \mapsto Q(x, z), \ P = (Z_q + Z_z p)(Q_q + Q_z p)^{-1}. \qquad (2)$$

Любое 1-поднятие (2) – преобразование Ли. Если $m > 1$, то верно обратное.

Определение 1. Система (1) называется инвариантной относительно некоторого преобразования Ли, если это преобразование отображает множество $\mathcal{E}_F$ в себя. Если данное преобразование Ли – 1-поднятие точечного преобразования, то система (1) называется инвариантной относительно этого точечного преобразования.

В результате преобразования Ли (точечного преобразования), 1-график (график) решения инвариантной системы отображается в 1-график (график) решения.

Инвариантные решения.

Определение 2. Решение системы (1), инвариантной относительно некоторого преобразования Ли (точечного преобразования), называется инвариантным относительно этого преобразования, если его 1-график (график) отображается на себя. Инвариантность решения u относительно преобразования $(q,z) \mapsto (Q(q,z), Z(q,z))$ эквивалентна равенствам $u(Q) = Z(q, u(q))$, $Q = Q(q, u(q))$, $\forall\, q \in D$.

Определение 3. Семейство $s \mapsto g(s) \in \mathrm{Diff}(\Omega)$, где Ω некоторая область, и $s \in \mathbb{R}$, назовём 1-параметрической группой, если $g(0) = id$ и $g(s_1) \circ g(s_2) = g(s_1 + s_2)\ \forall\, s$.
1-параметрическая группа диффеоморфизмов $g(s)$ порождает векторное поле

$$v(x) = \partial_s|_{s=0} g(x,s),\ \ g(x,s) = (g(s))(x),\ \ x \in \Omega$$

Если поток некоторого векторного поля неограниченно продолжаем по параметру (по времени), то он – 1-параметрическая группа диффеоморфизмов.
Пример 1. Преобразования подобия $g(s) : x \mapsto G(s)x$, $x \in \mathbb{R}^M$, $G(s) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\gamma_1 s} .. \mathrm{e}^{\gamma_M s})$ составляют 1-параметрическую группу. Соответствующее поле $v : x \to Vx$, $V = \mathrm{diag}(\gamma_1 .. \gamma_M)$. Преобразования подобия называют также скейлингом (scaling)
Определение 4. Инвариантность системы УрЧП и её решений относительно преобразований подобия называют скейлинговой инвариантностью. Скейлинг-инвариантные решения называются автомодельными.

Вычисление инвариантных решений

1-параметрическая группа точечных преобразований $(q,z) \mapsto (Q(q,z,s), Z(q,z,s))$ порождает векторное поле

$$V(q,z) = \partial_s|_{s=0} Q(q,z,s), \quad W(q,z) = \partial_s|_{s=0} Z(q,z,s). \tag{3}$$

Инвариантность решения u системы УРЧП относительно 1-параметрическая группы точечных преобразований эквивалентна равенствам

$$u(Q(q,u(q),s)) = Z(q,u(q),s) \; \forall\, q \in D, \; \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Отсюда, дифференцированием по s находим

$$V(q,u)\nabla u_i = W_i(q,u), \; i = 1,\ldots,m. \tag{4}$$

где W, V определены в (3). Система (4) квазилинейна по u, и должна быть совместна с исходной. Условия их совместности часто позволяют найти инвариантные решения явно, или упростить их вычисление.

Пример 2. Пусть квазилинейная система уравнений m уравнений относительно m неизвестных функций двух переменных (x,t) имеет вид

$$A(z)p^x + B(z)p^t = 0, \; q = (x,t) \in \mathbb{R}^2, \; p^x \in \mathbb{R}^m, \; p^t \in \mathbb{R}^m, \; p = (p^x, p^t) \in \mathbb{R}^{2m}, \tag{5}$$

$$z \in \mathbb{R}^m, \; A(q) \in \mathbb{R}^{m\times m}, \; B(q) \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

Система (3) инвариантна относительно 1-параметрической группы преобразований подобия $x = k\xi$, $t = k\tau$, $z = \zeta$, $k = e^s$.

Автомодельные решения квазилинейной системы

1-поднятия этих преобразований доопределяются равенствами $p^x = p^\xi/k$, $p^t = p^\tau/k$. Инвариантным будет любое решение u, такое, что

$$xu_{ix} + tu_{it} = 0,\ i = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Решения системы (6) постоянны на характеристиках, а уравнение последних – $X' = X,\ T' = T$; отсюда $XT' - TX' = 0$. Следовательно, $\frac{X}{T}$ –интеграл уравнения характеристик: $\frac{X}{T} = \frac{x}{t}$ на характеристике, проходящей через точку (x, t). Поэтому ищем инвариантные решения в виде $u(x, t) = y(x/t)$. Подстановка в (5) дает

$$A(y)t^{-1} - xB(y)y'(k)t^{-2} = 0 \Leftrightarrow (A(y) - kB(y))\, y'(k) = 0,\ k = x/t \implies$$

$$k = \lambda(y),\ y' = Cw_0(y),\ (A(y) - \lambda(y)B(y))w_0(y) = 0,\ w_0(y) \neq 0\ \forall\, y \in \Omega \tag{7}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – область, и $\det(A - \lambda B) = 0$ в Ω.
Дифференцируем по k равенство $\lambda = k$, и находим $1 = y'\nabla\lambda = Cw_0\nabla\lambda$. Отсюда выражаем C, предполагая при этом, что $w_0(y)\nabla\lambda \neq 0$, и приходим к системе ОДУ

$$y' = C(y)w_0(y),\ C(y) = (w_0(y)\nabla\lambda)^{-1},\ y(k_0) = y_0,\ k_0 = \lambda(y_0) \tag{8}$$

В силу (5), $(k - \lambda(y))' = 0$ и $k_0 - \lambda(y_0) = 0 \Rightarrow k \equiv \lambda(y)$, что необходимо ввиду (7).

Пример автомодельного решения

Пример 3.

$$u_t + uu_x + vv_x = 0,\ v_t + vu_x + uv_y = 0; \quad A(u,v) = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix},\ B = E \Longrightarrow$$

$\det(A - \lambda B) = (u-\lambda)^2 - v^2.$
Матрица $A(u,v) - \lambda E$ вырождена при $\lambda^\pm = u \pm v$. Собственным значениям $\lambda^\pm$ соответствуют собственные векторы $w_0^\pm = (1, \pm 1)$; $C = w_0^\pm \nabla \lambda^\pm = 2$, и задача Коши (8) принимает вид

$$(y_1^\pm)' = 1/2,\ (y_2^\pm)' = \pm 1/2,\ y_i^\pm(k_0^\pm) = y_{0i}^\pm,\ i = 1,2;\ k_0^\pm = \lambda^\pm(y_0^\pm) = y_{01}^\pm \pm y_{02}^\pm,$$

где $y_0^\pm = (y_0^\pm, y_{02}^\pm)$ можно выбрать произвольно. Отсюда решения:

$$u^\pm = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{t} + y_{01}^\pm \mp y_{02}^\pm\right);\ v^\pm = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{x}{t} + y_{02}^\pm \mp y_{01}^\pm\right), \tag{9}$$

где произвольные постоянные $y_0^\pm = (y_0^\pm, y_{02}^\pm)$ определяют значение решения на прямой $x = k_0 t$, $k_0 = y_{01}^\pm \pm y_{02}^\pm$.

Замечание 1. Система может не иметь вещественных автомодельных решений, если матрица $A - \lambda B$ невырождена при всех вещественных λ. Например,

$$u_t + uu_x + vv_x = 0,\ v_t - vu_x + uv_y = 0; \quad A(u,v) = \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix},\ B = E \Longrightarrow$$

Условие нелинейности

$\det(A - \lambda B) = (u - \lambda)^2 + v^2$, так что матрица $A(u, v) - \lambda E$ невырождена при $u^2 + v^2 > 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Замечание 2. Условие $w_0(y)\nabla\lambda \neq 0$ называют условием нелинейности. Оно необходимо для существования автомодельного решения системы (5). В частности, условие нелинейности исключает из рассмотрения линейные системы, где $A \equiv \mathrm{const}$, $B \equiv \mathrm{const}$, что влечет $\lambda = \mathrm{const}$. Хотя волновая система $u_t = v_x$, $v_t = u_x$ имеет решение $2u = \ln(k-1) - \ln(k+1)$, $k = x/t$, но $v = \int u_t dx$ уже зависит не только от k. Любопытно, что и система Коши-Римана $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ имеет решение $v = \mathrm{arctg}(k)$, $k = y/x$, при этом $u = \ln(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $u + iv = \ln(z)$, $z = x + iy$.

Замечание 3. Ввиду очевидной инвариантности системы (5) относительно сдвигов $(x, t) \mapsto (x + x_0, t + t_0)$ любое решение y задачи Коши (8) порождает семейство решений

$$u(x, t) = y(k), \ k = \frac{x - x_0}{t - t_0}. \tag{10}$$

Если функция y определена на интервале $(k_1, k_2) \ni k_0$, то решение (10) определено внутри двуполого сектора, высекаемого прямыми $x - x_0 = k_1(t - t_0)$ и $x - x_0 = k_2(t - t_0)$.

Автомодельное решение и характеристики

Замечание 4. Автомодельное решение (10) квазилинейной системы (5) постоянно на прямых $x - x_0 = k(t - t_0)$, но $k = \lambda(u)$, так что $x - x_0 = \lambda(u)(t - t_0)$. В точке (x_0, t_0) пересечения этих прямых автомодельное решение имеет особенность. Прямые $x - x_0 = \lambda(u)(t - t_0)$ играют ту же роль, что и характеристики $X - x = V(w)(T - t)$ уравнения Хопфа $w_t + V(w)w_x = 0$.

Рассмотрим квазилинейную систему

$$A(x, t, z)p^x + B(x, t, z)p^t = C(x, t, z), z \in \mathbb{R}^m, m \geq 2, \tag{11}$$

состоящую из m уравнений с m зависимыми переменными – компонентами $u \in \mathbb{R}^m$, и двумя независимыми переменными (x, t). Пусть в некоторой области $\Omega \in \mathbb{R}^2(x, t) \times \mathbb{R}^m(z)$ определена гладкая вещественная функция $\lambda(x, t, z)$, такая, что $\det(A - \lambda B) = 0$ всюду в Ω.

Определение 5. Характеристикой квазилинейной системы (11) называется интегральная кривая поля направлений $\lambda(x, t, z)$, где $z = u(x, t)$, и u – решение системы (11).

Замечание 5. Вообще говоря, характеристики неизвестны, пока неизвестно решение. Однако, в случае линейной системы, $\lambda = \lambda(x, t)$, и характеристики известны до решения.

Автомодельные решения уравнений газодинамики

Уравнения баротропного (изоэнтропического) газа, без источников массы и без внешних сил имеют вид

$$\rho(u_t + uu_x) = P_x,\ \ \rho_t + (u\rho)_x = 0,\ \ P = P(\rho).$$

Примем уравнение состояния $P = c^2\rho$, $c = \mathrm{const} > 0$. Тогда

$$u_t + uu_x + c^2\rho^{-1}\rho_x = 0,\ \ \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0.$$

Данная система имеет вид (5), где $B = E$,

$$A = \begin{pmatrix} u & c^2/\rho \\ \rho & u \end{pmatrix}.$$

Имеется два вещественных собственных значения $\lambda^{\pm} = u \pm c$, и два собственных вектора $w^{\pm} = (c, \pm\rho)$. При этом $w^{\pm}\nabla\lambda^{\pm} = c$. Имеем уравнения

$$(y_1^{\pm})' = 1, \quad (y_2^{\pm})' = \pm y_2^{\pm}/c, y_1^{\pm}(k_0) = u_0^{\pm},\ \ y_2^{\pm}(k_0^{\pm}) = \rho_0^{\pm},\ \ k_0^{\pm} = u_0^{\pm} \pm c$$

где $u_0^{\pm}$ и $\rho_0^{\pm}$ – заданы.

Отсюда решения

$$u^{\pm}(k) = k - k_0 + u_0^{\pm} = k \mp c, \quad \rho^{\pm} = \rho_0^{\pm}\mathrm{e}^{\pm\frac{k - u_0^{\pm} \mp c}{c}}$$

Волны разрежения

Характеристиками будут прямые $x - x_0 = (u^\pm \pm c)(t - t_0)$, (x_0, t_0) – произвольная точка. В частности, при $u_0^\pm = 0$ имеем $\rho^\pm = \rho_0^\pm \mathrm{e}^{\pm\frac{k\mp c}{c}}$, $u^\pm = k \mp c$.

Пусть $(x_0, t_0) = (0, 0)$, и выбран знак $+$. Движение материальной частицы, находившейся в момент времени $\tau > 0$ в точке a определяется задачей Коши

$$X_t = u^+(X, t) = X/t - c, X|_{t=\tau} = a, t > 0.$$

Решение этой задачи Коши дает $X/t = c\ln(\tau/t) + a/\tau$. Тогда

$$\rho^+(X, t) = \rho_0^+ \mathrm{e}^{\left(\frac{\frac{X}{t} - c}{c}\right)} = A^+\tau/t, A^+ = \mathrm{const}.$$

Если выбран знак $-$, то имеем $X/t = -c\ln(\tau/t) + a/\tau$, и $\rho^-(X, t) = A^-\tau/t$, $A^- = \mathrm{const}$. Если $a/\tau = \pm c$, то $A^\pm = \rho_0^\pm$. Таким образом, при движении материальной частицы газа её «масса» уменьшается. Поэтому данные автомодельные решения называются волнами разрежения.

Замечание 6. Волной разрежения часто называют автомодельное решение произвольной квазилинейной системы, индуцированное действием 1-параметрической группы $(x, t) \mapsto \mathrm{e}^s(x, t)$.

Волны Римана

Определение 5. Квазилинейная система (11) записана в инвариантах Римана,если она имеет вид

$$r_t + \Lambda(r,x,t)r_x = f(x,t,r),\ \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_m) \qquad (12)$$

Зависимые переменные r_j называются инвариантами Римана. Волной Римана называется решение системы (12), такое что найдётся $j = 1..m$, такое, что $r_i = \mathrm{const}$, $i \neq j$, но $r_j \neq \mathrm{const}$.

Пример 4. Система $u_t + vu_x = 0$, $v_t + uv_x = 0$ определяет две волны Римана:

$$u_t + v_0 u_x = 0,\ v = v_0 = \mathrm{const}, \quad v_t + u_0 v_x = 0,\ u = u_0 = \mathrm{const}.$$

В случае системы (12) с $f = 0$ волна Римана для каждого $j = 1..m$ определяется уравнением Хопфа

$$s_t + V(s)s_x = 0,\ s = r_j,\ V = \lambda_j(r_1^0,\dots,r_{j-1}^0,s,r_{j+1}^0,\dots,r_m^0),\ r_i^0 = \mathrm{const},\ i \neq j. \quad (13)$$

Следовательно, волны Римана дают, вообще говоря, примеры градиентной катастрофы решения задачи Коши, состоящей из системы (12) с $f = 0$, и начальных условий $r_i|_{t=0} = r_i^0 = \mathrm{const}$, $i \neq j$, $r_j|_{t=0} = \varphi \neq \mathrm{const}$.

Волны Римана постоянны на характеристиках $x - x_0 = V(s)(t - t_0)$, и потому представляют собой автомодельные решения: $s = y_j(k)$, $k = V(s) = \frac{x-x_0}{t-t_0}$, x_0, t_0 – точка пересечения характеристик.

Приведение к инвариантам Римана

Уравнения (8) имеют вид

$$y' = w(y),\ \ w_i(u) = \frac{\delta_{ij}\lambda_j(y)}{\frac{\partial \lambda_j}{\partial y_j}},\ \ i = 1..m.$$

Характеристика $x - x_0 = V(s)(t - t_0)$ уравнения Хопфа есть характеристика исходной квазилинейной системы в смысле определения 5. Таким образом, каждый инвариант Римана r_j постоянен на характеристике, касающейся поля направлений λ_j, и тем оправдывает свое название.

Не каждая квазилинейная система приводима к инвариантам Римана.

Теорема 1. Пусть система (11) полулинейна, так что $A = A(x,t)$, $B = B(x,t)$, причем существует m гладких функций $\lambda_j = \lambda_j(x,t)$, и m гладких векторных функций $w_j = w_j(x,t)$, образующих линейно-независимую систему в каждой точке (x,t), и таких, что $Aw_j - \lambda_j Bw_j = 0$ всюду. Тогда эта линейная система приводится к инвариантам Римана линейным преобразованием $z = Wr$,где W – матрица, столбцы которой – векторы w_j. Система в инвариантах Римана имеет вид (12), где

$$f(x,t,r) = (BW)^{-1}(C(x,t,Wr) - A(x,t,Wr)W_x r - B(x,t,Wr)W_t r).$$

◀ Переписывем условие теоремы в матричной форме: $AW = BW\Lambda$. Далее,

$$u_x = W_x r + W r_x,\; u_t = W_t r + W r_t, \Longrightarrow C = Au_x + Bu_t = A(W_x r + W r_x) + B(W_t r + W r_t) =$$

$$= (AW_x + BW_t)r + BW(\Lambda r_x + r_t) \Longrightarrow r_t + \Lambda r_x = (BW)^{-1}(C - (AW_x + BW_t)r)$$

что и требовалось (матрицы B, W невырождены по условию). ▶

Определение 6. Квазилинейная система (11) записана в нормальной форме (нормальна), если одна из матриц A, B – единичная.

Теорема 2. Пусть система (11) нормальна, так что $B = E$, и существует $3m$ гладких функций $\lambda_j = \lambda_j(x,t,z)$, $\mu_j = \mu_j(x,t,z)$, $R_j = R_j(x,t,z)$, и m гладких векторных функций $\ell_j = \ell_j(x,t,z)$, таких, что $\forall\,(x,t,z)$ верно следующее:

$$(i)\; A^*\ell_j - \lambda_j\ell_j = 0;\; (ii) \text{ векторы } \{\ell_j\}_{j=1}^m \text{ образуют базис; } (iii)\; \mu_j\ell_j = \nabla_z R_j;$$

(где градиент составляется из частных производных по z_k, $k = 1..m$). Если при этом отображение $z_j \mapsto R_j(x,t,z)$, $j = 1..m$, – диффеоморфизм на свой образ при каждом (x,t), то преобразование $r_j = R_j(x,t,z)$, $j = 1..m$, приводит систему к инвариантам Римана.

◀ Образуем $m \times m-$матрицу L, расположив по её строкам векторы ℓ_j, $j = 1..m$.

Приведение к инвариантам Римана-II

Введем матрицы $M = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Пусть $R_z = (R_{jz_k})$ $j, k = 1..m$, – матрица Якоби отображения $R : z \mapsto r$, $z = (z_1, .., z_m)$, $r = (r_1, .., r_m)$.
Переписываем условия теоремы в матричной форме: $LA = \Lambda L$, $R_z = ML$. Отсюда следуют равенства $\Lambda R_z = \Lambda ML = M\Lambda L = MLA = R_z A$ (коммутация $M\Lambda = \Lambda M$ имеет место в силу диагональности сомножителей). Итак, $\Lambda R_z = R_z A$.
Пусть теперь $r_t + \Lambda(x, t, r) r_x = f$. Полагаем $r = R(x, t, z)$, $z = u(x, t)$. Имеем

$$f = r_t + \Lambda r_x = R_z u_t + \Lambda R_z u_x + R_t + \Lambda R_x = R_z(u_t + Au_x) + R_t + \Lambda R_x \implies$$

$u_t + Au_x = C$, где $C = R_z^{-1}(f - R_t - \Lambda R_x)$, что и требовалось ►

Замечание 7. Условие (iii) теоремы 2 – условие существования интегрирующего множителя μ_j у каждой из векторных функций ℓ_j. Для того, чтобы векторная функция со значениями в $\mathbb{R}^m$, $m = 3, 4, ..$, такового имела, необходимо, чтобы она удовлетворяла некоторым условиям, выраженным *равенствами*. В такой ситуации можно сказать, что векторные функции со значениями $\mathbb{R}^m$, $m = 3, 4, ..$, как правило, интегрирующего множителя не имеют. При $m = 2$ ситуация противоположна: интегрирующий множитель существует для произвольной векторной функции со значениями в $\mathbb{R}^2$. Отсюда

Следствие 1. При $m = 2$ условие (iii) теоремы 2 вытекает из остальных её условий.

Инварианты Римана баротропной газодинамики.

Замечание 8. Условия теоремы 2 в общем случае не необходимы.

Замечание 9. Следствие 1 означает, что в случае двух неизвестных функций приводимость системы УрЧП порядка 1 с двумя независимыми переменными к инвариантам Римана скорее правило, чем исключение.

Замечание 10. Необходимое и достаточное условие приводимости к инвариантам Римана известно, но мы не будем его разбирать. Заметим лишь, что оно налагает на систему ограничения типа равенств, поэтому многомерная ситуация противоположна двумерной: правилом оказывается неприводимость к инвариантам Римана. Тем не менее, некоторые важные для приложений системы оказываются среди исключений, например, система уравнения переноса многокомпонентной смеси электрополем (см. лекцию 6, а также книгу Жукова из списка рекомендованной литературы).

Пример 5. Баротропная (изоэнтропическая) газодинамика.

$$A = \begin{pmatrix} u & c^2/\rho \\ \rho & u \end{pmatrix}; \quad A^* = \begin{pmatrix} u & \rho \\ c^2/\rho & u \end{pmatrix}, \quad c^2 = \frac{dP}{d\rho}.$$

Матрица A^* имеет собственные значения $\lambda^\pm = u \pm c$, и два собственных вектора $\ell^\pm = (\rho, \pm c)$. Для векторов $\rho^{-1}\ell^\pm = (1, \pm c/\rho)$ и найдутся скалярные функции $r^\pm$: $1 = r_u^\pm$, $\pm c/\rho = r_\rho^\pm$; именно,

Волны Римана в баротропном газе

$$r^{\pm} = u \pm Q(\rho), \quad Q(\rho) = \int c(\rho)d\rho/\rho,$$

т.е. интегрирующий множитель равен $1/\rho$ для обоих векторных функций $\ell^{\pm}$. Система баротропной газодинамики в инвариантах Римана пишется так:

$$r_t^{\pm} + \lambda^{\pm}(r^+, r^-)r_x^{\pm} = 0, \quad \lambda^{\pm}(r^+, r^-) = (r^+ + r^-)/2 \pm c(\rho), \; Q(\rho) = (r^+ - r^-)/2. \quad (14)$$

В волне Римана, по определению, одна из функций $r^{\pm}$ постоянна. Если, например, $r^- = \mathrm{const}$, то есть выбран знак «-», то $u = Q + r_0^-$, $r^+ = 2Q + r_0^-$, $\lambda^+ = u + c = Q + c + r_0^-$, и уравнение (14) в этом частном случае имеет вид

$$\rho_t^+ + \lambda^+ \rho_x^+ = 0, \; \lambda^+ = (Q(\rho^+) + c(\rho^+) + r_0^-) = \left(\rho^+ \left(Q(\rho^+) + r_0^-\right)\right)_{\rho^+} = (\rho^+ u)_{\rho^+}.$$

Таким образом, плотность в волне Римана описывается, конечно, уравнением неразрывности, где скорость явно выражена через плотность:

$$\rho_t^+ + (u^+\rho^+)_x = 0, \quad u^+ = Q(\rho^+) + r_0^- \quad (15)$$

Автомодельные решения уравнений (15) называют центрированными волнами Римана. Таких волн две, и они определяются уравнениями:

$$\lambda^{\pm} = (\rho^{\pm}u^{\pm})_{\rho^{\pm}} = k, \; u^{\pm} = \pm Q(\rho^{\pm}) + r_0^{\mp}, \; r_0^{\mp} = \mathrm{const}, \; k = \frac{x - x_0}{t - t_0}. \quad (16)$$

Волны Римана в политропном газе

Рассмотрим политропный газ

$$\frac{P}{P_*} = \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^{\gamma}, \qquad c^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{\gamma P_*}{\rho_*}\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^{\gamma-1}, \ \gamma > 1.$$

где P_* и ρ_* – некоторые отсчётные значения плотности и давления.
В этом случае $Q(\rho) = \frac{2c(\rho)}{\gamma-1}$, и уравнения политропного газа в инвариантах Римана выглядят так

$$r_t^+ + (\alpha r^+ + \beta r^-)r_x^+ = 0,\ r_t^- + (\alpha r^- + \beta r^+)r_x^- = 0,\ \alpha = \frac{1+\gamma}{4},\ \beta = \frac{3-\gamma}{4}. \tag{17}$$

Примечательно, что $\alpha + \beta = 1$.

Замечание 10. В случае $\gamma = 3$ система (15) распадается на пару не связанных друг с другом уравнений Хопфа $r_t^{\pm} + r^{\pm} r_x^{\pm} = 0$.

Особый случай $\gamma = 1$ соответствует изотермическому газу $P = c^2\rho$, $c = RT_0 = \mathrm{const}$ (R – газовая постоянная, T_0 – постоянная абсолютная температура). В этом случае

$$Q(\rho) = c\ln\rho,\ \rho = \mathrm{e}^{\frac{r^+ - r^-}{2c}}, \qquad r_t^{\pm} + \frac{r^+ + r^- \pm 2c}{2} r_x^{\pm} = 0.$$

Волны Римана в политропном газе-I

Рассмотрим центрированные волны. Возвращаемся к уравнениям (16), где полагаем $r^- = r_0^- = \mathrm{const}$, $u^+ = r_0^- + Q(\rho^+)$, $Q(\rho) = \frac{2c(\rho)}{\gamma-1}$. Имеем

$$k = \frac{d}{d\rho^+}\left(\rho^+\left(\frac{2c(\rho^+)}{\gamma-1} + r_0^-\right)\right) \Leftrightarrow c(\rho^+) = \nu(k - r_0^-),\ k > r_0^-,\ \nu = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}. \quad (18)$$

Рассмотрим движение частиц газа. Полагаем

$$X_t = u^+(X,t),\ X|_{t=\tau} = a, \quad K = X/t,\ k_0 = a/\tau.$$

Тогда

$$K_t = \frac{u^+ - K}{t} = -\frac{c(\rho^+)}{t} = \frac{\nu(r_0^- - K)}{t},\ K > r_0, \Longrightarrow \frac{r_0^- - K}{r_0^- - k_0} = \frac{\tau^\nu}{t^\nu} \overset{(18)}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{c(\rho^+)}{c(\rho_0^+)} = \frac{\tau^\nu}{t^\nu},\ c(\rho) = \mathrm{const}\,\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \Longrightarrow \frac{\rho^+(X,t)}{\rho_0^+} = \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\frac{2}{1+\gamma}},\ c(\rho_0^+) = \nu(k_0 - r_0^-). \quad (19)$$

Считаем отсчётной ту характеристику, где $k = k_0$. Предполагаем, что на ней $u^+ = 0$. Тогда

$$r_0^- = -Q(\rho_0^+) = -\frac{2c(\rho_0^+)}{\gamma-1},$$

Волны Римана в политропном газе-II

Выбираем отсчётную характеристику так, что на ней $\rho = \rho_*$, т.е. $\rho_0^+ = \rho_*$. С этой целью полагаем

$$k_0 = \frac{c(\rho_*)}{\nu} - Q(\rho_*) = c(\rho_*)\left(\frac{1}{\nu} - \frac{2}{\gamma - 1}\right) = c_*, \;\; c_* = c(\rho_*) = \sqrt{\frac{\gamma P_*}{\rho_*}}.$$

Из (20) выражаем $K = r_0^- + (k_0 - r_0^-)(\tau/t)^\nu$; отсюда

$$K = \frac{c_*}{\gamma - 1}\left(\frac{(\gamma+1)\tau^\nu}{t^\nu} - 2\right), \;\; \nu = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \;\; \rho^+(X, t) = \rho_*\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\frac{2}{1+\gamma}};$$

τ — момент прохождения частицы газа через отсчётную характеристику.

Таким образом, каждая частица газа двигается так, что, при $t \to +\infty$

$$K \to r_0^- + 0 = -\frac{2c_*}{\gamma - 1} + 0, \quad \rho^+ \to +0, \;\; Q(\rho^+) \to 0, \;\; \lim_{t\to\infty} u^+ = r_0^- + 0,$$

то есть, газ разреживается, а его скорость растёт от нуля до $-\frac{2c_*}{\gamma-1}$ (по абсолютной величине).

Теперь считаем $r^+ = r_0^+ = \mathrm{const}$. Действуем, как в случае $r^- = \mathrm{const}$, и находим

$$c^- = c(\rho_0^-) = \nu(r_0^+ - k), \;\; k < r_0^+, \;\; \nu = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \;\; r_0^+ = \frac{2c_*}{\gamma - 1}, \tag{20}$$

Волны Римана в политропном газе-III

где c_* – скорость звука на отсчётной характеристике, где $u^- = 0$. В материальной частице газа

$$K = \frac{c_*}{\gamma - 1}\left(\frac{2-(\gamma+1)\tau^\nu}{t^\nu}\right), \ \nu = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \ \rho^-(X,t) = \rho_*\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\frac{2}{1+\gamma}};$$

τ — момент прохождения частицы газа через отсчётную характеристику
$k = k_0 = -c_*$.
Итак, при $t \to +\infty$,

$$K \to r_0^+ - 0 = \frac{2c_*}{\gamma-1} - 0, \ \rho^- \to +0, \quad Q(\rho^-) \to 0, \quad \lim_{t\to\infty} u^- = r_0^+ - 0,$$

так что газ разреживается, а его скорость растёт от нуля до $\frac{2c_*}{\gamma-1}$.

Замечание 11. Как видно из (18) и (20), с ростом *автомодельной* переменной $k = \frac{x-x_0}{t-t_0}$, плотность в центрированной волне растёт при $r^- = \mathrm{const}$, и убывает при $r^+ = \mathrm{const}$ (это следует из монотонности $c(\rho)$). Поэтому в первом случае волна Римана называется волной сжатия, а во втором волной разрежения (в книге Рождественского, например).