УМФ
Лекция 8
1-й семестр – осень 2018 г
Задача Коши для систем уравнений с частными производными порядка 1. Теорема Коши-Ковалевской. Гиперболические системы.

Моргулис Андрей Борисович
КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

28 ноября 2018 г.

Задача Коши для общих систем УрЧП 1-го порядка

Задача Коши для общих систем УрЧП 1-го порядка

Рассмотрим систему m уравнений $F_j(x, t, u_x, u_t, u) = 0$ с m зависимыми переменными $(u_1, \ldots, u_m) = u \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ и двумя независимыми переменными $(x, t) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Здесь $(F_1, \ldots, F_m) = F : \mathcal{J}_{m,2} \to \mathbb{R}^m$ – гладкое отображение, $\mathcal{J}_{m,2} = \{a = (p^x, p^t, x, t, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times D \times \mathbb{R}^m\}$, $\dim \mathcal{J}_{m,2} = 3m + 2$

Определение 1. Задача Коши для такой системы заключается в нахождении её решения $u = u(x, t)$, удовлетворяющему *начальному условию (условию Коши)* $(u - \varphi)|_S = 0$, где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ – заданная векторная функция, и $S \subset D$ – заданная кривая.

Задача Коши для общих систем УрЧП 1-го порядка

Рассмотрим систему m уравнений $F_j(x, t, u_x, u_t, u) = 0$ с m зависимыми переменными $(u_1, \dots, u_m) = u \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ и двумя независимыми переменными $(x, t) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Здесь $(F_1, \dots, F_m) = F : \mathcal{J}_{m,2} \to \mathbb{R}^m$ – гладкое отображение, $\mathcal{J}_{m,2} = \{a = (p^x, p^t, x, t, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times D \times \mathbb{R}^m\}$, $\dim \mathcal{J}_{m,2} = 3m + 2$

Определение 1. Задача Коши для такой системы заключается в нахождении её решения $u = u(x, t)$, удовлетворяющему *начальному условию (условию Коши)* $(u - \varphi)|_S = 0$, где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ – заданная векторная функция, и $S \subset D$ – заданная кривая.

Определение 2. Поверхность S и векторная функция φ, заданные в начальном условии, называются *начальными.*

Определение 3. Решение системы, определённое в некоторой окрестности U произвольной точки $(x_0, t_0) \in S$ и удовлетворяющее начальному условию на $S \cap U$ называется *локальным*, или *решением в малом.*

Задача Коши для общих систем УрЧП 1-го порядка

Рассмотрим систему m уравнений $F_j(x, t, u_x, u_t, u) = 0$ с m зависимыми переменными $(u_1, \dots, u_m) = u \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ и двумя независимыми переменными $(x, t) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Здесь $(F_1, \dots, F_m) = F : \mathcal{J}_{m,2} \to \mathbb{R}^m$ – гладкое отображение, $\mathcal{J}_{m,2} = \{a = (p^x, p^t, x, t, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times D \times \mathbb{R}^m\}$, $\dim \mathcal{J}_{m,2} = 3m + 2$

Определение 1. Задача Коши для такой системы заключается в нахождении её решения $u = u(x, t)$, удовлетворяющему *начальному условию (условию Коши)* $(u - \varphi)|_S = 0$, где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ – заданная векторная функция, и $S \subset D$ – заданная кривая.

Определение 2. Поверхность S и векторная функция φ, заданные в начальном условии, называются *начальными.*

Определение 3. Решение системы, определённое в некоторой окрестности U произвольной точки $(x_0, t_0) \in S$ и удовлетворяющее начальному условию на $S \cap U$ называется *локальным*, или *решением в малом.*

Проблема локальной разрешимости задачи Коши: имеет ли задача Коши хотя бы локальное решение при произвольных начальных данных S, φ в окрестности произвольной точки $(x_0, t_0) \in S$?

Нормальные системы.

Определение 4. *Нормальная система* первого порядка с двумя независимыми переменными (x, t), имеет вид $p^t = \Phi(x, t, z, p^x)$. Нормальная задача Коши имеет вид $u_t = \Phi(x, t, u, u_x)$, $u|_{t=0} = \varphi$.

Определение 5. *Нормальная нелинейная система m уравнений порядка N с m зависимыми переменными $(u_1, \ldots, u_m) = u \in \mathbb{R}^m$, и $n+1$ независимыми переменными $x = (x_1, \ldots, x_n)$, t,* имеет вид

$$\frac{\partial^N u_j}{\partial t^N} = \Phi_j(x, t, u, p),\ j = 1 \ldots, m,$$

где p – совокупность всевозможных частных производных порядка не выше N, *исключая* $\frac{\partial^N u}{\partial t^N}$. Нормальная задача Коши состоит из для нормальной системы (1) и начальных условий

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}|_{t=0} = \varphi_k,\ \ k = 0 \ldots N-1, \qquad (2)$$

Пример 1. Для волнового уравнения и уравнения Лапласа нормальны следующие задачи Коши $u_{yy} = \pm u_{xx}$, $u|_{x=0} = \varphi(y)$, $u_x|_{x=0} = \varphi_1(y)$. Для теплового уравнения задача Коши $u_t = u_{xx}$, $u|_{x=0} = \varphi(t)$, $u_x|_{x=0} = \varphi_1(t)$ также нормальна, а задача $u_t = u_{xx}$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$ НЕ нормальна.

Теорема Коши-Ковалевской

Определение 6. Пусть $D \subset \mathbb{R}^N$ – область. Векторная функция $g = g(z) \in \mathbb{R}^M$, $z \in D$, называется (вещественно) аналитической, если

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(z - z_0), \ \forall\, z_0 \in D$$

где g_k – однородный многочлен от N переменных степени k, с коэффициентами из $\in \mathbb{R}^M$, и ряд сходится абсолютно в некоторой окрестности точки z_0.

Замечание 1. Любой многочлен от z, z^*, $z \in \mathbb{C}$ – вещественно-аналитическая функция, но не комплексно-аналитическая. Например, $x^2 + y^2 = zz^*$ – не аналитическая функция.

Теорема 1 (Коши-Ковалевской). Нормальная задача Коши (1-2) с аналитическими Φ, φ_k, $k = 0 \dots N-1$ имеет локальное аналитическое решение в окрестности любой точки начальной прямой.

Напоминание: нормальная задача Коши может быть некорректна. Для системы $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ в лекции 5 приведены примеры решений (u, v), таких что $(u, v)|_{x=0} = (\varphi(y), 0)$, причём $\sup_y |\varphi(y)| \le \varepsilon$, но $\sup_y |u(x, y)| = 1$, как бы не были малы $\varepsilon > 0$ и $x > 0$. Именно, $u = \varepsilon \mathrm{ch}(\mu x) \sin(\mu y)$, $v = \varepsilon \mathrm{sh}(\mu x) \cos(\mu y)$. Результат достигается с ростом μ.

Проблема неаналитической задачи Коши

Пример 2. $u_x = v_y,\ u_y = -v_x; \quad u|_{x=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{k}} \cos(ky),\ v|_{x=0} = 0.$

Ряд в начальном условии сходится абсолютно, и его можно дифференцировать любое число раз. Формально используем разделение переменных. Получаем

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{k}} \operatorname{ch}(kx) \cos(ky)$$

Но этот ряд расходится $\forall\, x \neq 0$, так как его общий член не стремится к нулю, и на самом деле решение задачи не определено. Этот «парадокс» объясняется тем, что начальная функция не аналитическая.

Проблема: найти классы систем УрЧП для которых корректна неаналитическая задача Коши и другие постановки задач, обладающие указанным свойством.

Решение этой проблемы выделяет два класса систем: гиперболические (волновая система, волновое уравнение), для которых неаналитическая задача Коши корректна, и эллиптические (система Коши-Римана, уравнение Лапласа), для которых задача Коши некорректна, но корректны другие постановки задач. Тепловое уравнение в этом смысле ближе к эллиптическим уравнениям.

Гиперболические и эллиптические системы порядка 1

Определение 7. Пусть D – область в $\mathbb{R}^m$. Нормальная квазилинейная система порядка 1 $p^t + Ap^x = f$, $f = f(x,t,z)$, $A = A(x,t,z)$, $(x,t) \in D$ называется гиперболической в области $B \subset D \times \mathbb{R}^m$, если $\forall (x,t,z) \in B$ определены характеристические направления $\lambda_j = \lambda_j(x,t,z)$: $\det(A - \lambda_j E) = 0$, $j = 1 \dots J \le m$, и им соответствующие собственные векторы $\ell_i = \ell_i(x,t,z)$, $i = 1 \dots m$, матрицы $A^*(x,t,z)$ образуют базис.

Замечание 2. В книге Рождественского и др. собственные векторы матрицы A^* называются левыми собственными векторами матрицы A.

Определение 8. Нормальная гиперболическая квазилинейная система порядка 1 называется гиперболической в узком смысле в области $B \subset D \times \mathbb{R}^m$, если $\forall (x,t,z) \in B$ существует m различных характеристических направлений $\lambda_j = \lambda_j(x,t,z)$: $\det(A - \lambda_j E) = 0$, $j = 1..m$.

Замечание 3. Даже если матрица A гладко зависит от (x,t,z) собственные векторы и собственные числа могут иметь особенности (поскольку корни многочлена не обязаны гладко зависеть от коэффициентов). Однако, если собственные числа не сталкиваются между собой, то и эти особенности не возникают. Гиперболичность в узком смысле исключает такие столкновения. В общем случае дополнительно предполагаем, что все λ_j и ℓ_j – гладкие функции.

Примеры гиперболических и эллиптических систем

Определение 9. Нормальная квазилинейная система порядка 1 $p^t + Ap^x = f$ называется эллиптической в области B, если $\det(A - \lambda E) \neq 0 \, \forall (x,t,z) \in B \, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Пример 3. Система Коши-Римана и волновая системы.

$$u_x = v_y, \ u_y = \pm v_x, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

где знак «$+$» соответствует волновой системе, а «$-$» – системе Коши -Римана. Первая – гиперболична, а вторая – эллиптична.

Пример 4. Система баротропной газодинамики с произвольной функцией $P = P(\rho)$

$$u_t + uu_x + \rho^{-1} P_\rho \rho_x = 0, \ \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \quad A = \begin{pmatrix} u & P_\rho/\rho \\ \rho & u \end{pmatrix}$$

гиперболична (в узком смысле) в области $P_\rho > 0$, и эллиптична в области $P_\rho < 0$.

Пример 5. Общая система газодинамики с произвольной функцией $P = P(\rho, s)$
$u_t + uu_x + \rho^{-1}(P_\rho \rho_x + P_s s_x) = 0, \ \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \ s_t + us_x = 0,$

$$A = \begin{pmatrix} u & P_\rho/\rho & P_s/\rho \\ \rho & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

гиперболична (в узком смысле) в области $P_\rho > 0$,и ни эллиптична, ни гиперболична в области $P_\rho < 0$ (т.к. есть $\lambda = u$)

Стационарная система двумерной газодинамики

Обозначения: x, y – декартовы координаты, $(u, v)(x, y)$ – проекции скорости материальной частицы, находящейся в точке (x, y) на оси координат Ox, Oy. Уравнения движения

$$uu_x + vu_y + \rho^{-1}P_\rho\rho_x = 0, \; uv_x + vv_x + \rho^{-1}P_\rho\rho_y = 0; \; u\rho_x + v\rho_y + \rho(u_x + v_y) = 0.$$

Полагаем $z = (u, v, \rho)$, $p^x = z_x$, $p^y = z_y$; записываем эту систему так:

$$D^x p^x + D^y p^y = 0, \; D^x = \begin{pmatrix} u & 0 & P_\rho/\rho \\ 0 & u & 0 \\ \rho & 0 & u \end{pmatrix}, \; D^y = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & P_\rho/\rho \\ 0 & \rho & v \end{pmatrix},$$

В каждой точке $(x, y) : u^2 + v^2 \neq 0$ хотя бы одна из матриц D^x, D^y обратима, и система может быть записана как нормальная. Пусть λ – одно из характеристических направлений этой системы. Тогда $dx/dy = \lambda = \eta^x/\eta^y$ при условии $v \neq 0$, или $dy/dx = \lambda = \eta^y/\eta^x$ при условии $u \neq 0$, где (η^x, η^y) – решение уравнения

$$\det(\eta^y D_x - \eta^x D^y) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \eta^y u - \eta^x v & 0 & \eta^y P_\rho/\rho \\ 0 & \eta^y u - \eta^x v & -\eta^x P_\rho/\rho \\ \rho\eta^y & -\rho\eta^x & \eta^y u - \eta^x v \end{pmatrix} = 0,$$

Стационарная система двумерной газодинамики-I

Имеем уравнение

$$0 = (\eta^y u - \eta^x v)\left((\eta^y u - \eta^x v)^2 - \left((\eta^x)^2 + (\eta^y)^2\right) P_\rho\right)$$

Полагаем $P_\rho = c^2 > 0$, и приходим к трём случаям

$$(a)\ \eta^y u - \eta^x v = 0;$$

$$(b)\ \eta^y u - \eta^x v - c\sqrt{(\eta^x)^2 + (\eta^y)^2} = 0; \quad (c)\ \eta^y u - \eta^x v + c\sqrt{(\eta^x)^2 + (\eta^y)^2} = 0;$$

Случай (a) даёт характеристическое направление, совпадающее с направлением поля скорости (u, v).

Введём полярные координаты в плоскости скоростей $u = V\cos\alpha$, $v = V\sin\alpha$, $V = \sqrt{u^2 + v^2}$. Положим $\eta^x = \cos\beta$, $\eta^y = \sin\beta$. Случаи (b) и (c) объединятся так:

$$V\sin(\alpha - \beta) = \pm c.$$

Отсюда находим ещё два характеристических направления в области $V > c$.

Итак, система гиперболическая при $V > c$ (в сверхзвуковой области), и смешанного типа при $V < c$ (в дозвуковой области). Дозвуковую систему нельзя назвать эллиптической, так как есть характеристическое направление (a))

Расширение понятия характеристического направления

Пример уравнений двумерной газодинамики подсказывает обобщение определения характеристического направления и гиперболичности на общую квазилинейную систему с двумя независимыми переменными (x, t) вида

$$A(x,t,z)p^x + B(x,t,z)p^t = f(x,t,z) \in \mathbb{R}^m, \;\; A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}, \;\; p^x, p^t \in \mathbb{R}^m; \qquad (3)$$

Определение 10. Направление (η^x, η^t), $(\eta^x)^2 + (\eta^y)^2 \neq 0$ на плоскости независимых переменных (x, t) называется характеристическим для квазилинейной системы (3), если $\det(\eta^t A - \eta^x B) = 0$.

Замечание 3. Если матрица B обратима, то система может быть записана в нормальной форме $p^t + A_1 p^x = f_1$, $A_1 = B^{-1}A$. Для таких систем характеристические направления были ранее введены определением 7. Согласно ему, они заданы собственными числами $\lambda \in \mathbb{R}$ матрицы A_1. Каждое из них определяет характеристическое направление в смысле определения 10: $\eta^x/\eta^t = \lambda, \eta^t \neq 0$. С другой стороны, пусть направление (η^x, η^t) – характеристическое в смысле определения 10, и $\det(B) \neq 0$. Тогда $\eta^t \neq 0$, иначе $\det(\eta^t A - \eta^x B) = \eta^x \det B \neq 0$, и

$$0 = \det(\eta^t A - \eta^x B) = (\det(B)/\det(B))\det(\eta^t A - \eta^x B) = \eta^t \det(B)\det(B^{-1}A - \lambda E)$$

так что $\lambda = \eta^x/\eta^t$ – собственное значение A_1.

Определение 11 . Квазилинейная система (3) называется гиперболической в области B пространства (x, t, z), если

Расширение понятия гиперболичности и эллиптичности

$$\forall\,(x,t,z)\in B\ \mathbb{R}^m=\bigoplus_{(\eta^x,\eta^t)}\ker(\eta^t A^*-\eta^x B^*)$$

где прямая сумма берётся по всем различным характеристическим направлениям.

Замечание 4. Подразумевается, что направления $(\eta^x,\eta^t)(x,t,z)$ и базисы подпространств $\ker(\eta^t A^*-\eta^x B^*)$ заданы гладкими векторными функциями переменных (x,t,z).

Определение 11 . Квазилинейная система (3) называется эллиптической в области B пространства (x,t,z), если $\forall(x,t,z)\in B$ уравнение $\det(\eta^t A-\eta^x B)=0$ не имеет решений $(\eta^x,\eta^t)\in\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$.

Теорема 2. Точечное преобразование вида $Q=Q(q)$, $Z=Z(z,q)$ квазилинейной системы $F(p,q,z)=0$, $q\in\mathbb{R}^n$, $z\in\mathbb{R}^m$, $p\in\mathbb{R}^{m\times n}$ сохраняет её квазилинейность.

◄ Матрица Якоби диффеморфизма $(q,z)\mapsto(Q,Z)$ при указанных Q,Z имеет блочно-треугольный вид

$$\begin{pmatrix} Q_q & 0\\ Z_q & Z_z\end{pmatrix}$$

Эта матрица невырождена, а потому невырождены её диагональные блоки Q_q, Z_z. Строим поднятие $(p,q,z)\mapsto(P,Q,Z)$, $P=(Z_q+Z_z p)Q_q^{-1}\implies p=Z_z^{-1}(PQ_q-Z_q)$.

Инвариантность характеристических направлений

Отсюда видно, что p выражается через P линейно, так что построенное поднятие преобразует систему, линейную по p в систему, линейную по P. ▶

Пусть $q = (x, t) \in \mathbb{R}^2$. Поднятие преобразования $Q = Q(q)$, $Z = Z(z, q)$ и его обратного выглядят так

$$\xi = \xi(x,t),\ \tau = \tau(x,t),\ \zeta = \zeta(x,t,z) \in \mathbb{R}^m, \tag{4}$$

$$x = x(\xi,\tau),\ t = t(\xi,\tau),\ z = z(\xi,\tau,\zeta) \in \mathbb{R}^m \tag{5}$$

$$p^x = p^\xi \xi_x + p^\tau \tau_x + z_\zeta \zeta_x,\ p^t = p^\xi \xi_t + p^\tau \tau_t + z_\zeta \zeta_t. \tag{6}$$

В результате данного преобразования система (3) сохранит свой вид, но матрицы A, B и правая часть f изменятся. Точнее, будем иметь

$$\widetilde{A} p^\xi + \widetilde{B} p^\tau = \widetilde{f},\ \widetilde{A} = \xi_x A + \xi_\tau B,\ \widetilde{B} = \tau_x A + \tau_t B. \tag{7}$$

Отсюда видно, что характеристические направления (η^ξ, η^τ), (η^x, η^t) систем (7) и (3) связаны невырожденным линейным преобразованием

$$\begin{pmatrix} \eta^x \\ \eta^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_t & -\xi_t \\ -\tau_x & \xi_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^\xi \\ \eta^\tau \end{pmatrix},\ \det \begin{pmatrix} \tau_t & -\xi_t \\ -\tau_x & \xi_x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \tau_x & \tau_t \end{pmatrix} \neq 0 \tag{8}$$

где последнее неравенство вытекает из гладкой обратимости преобразования $(x, t) \mapsto (\xi, \tau)$.

Нормализация задачи Коши

Итак, доказана

Теорема 3. Число характеристических направлений системы (3) – инвариант преобразования (4-6).

Рассуждения, аналогичные только что проведённым, показывают, что решение h уравнения $(\eta^t A^* - \eta^x B^*)h = 0$, записанного в точке (x, t, z), есть решение уравнения $(\eta^\tau \widetilde{A}^* - \eta^\xi \widetilde{B}^*)h = 0$, при условии, что точки (ξ, τ, ζ) и (x, t, z), связаны преобразованием (4-5), а направления (η^x, η^t) и (η^ξ, η^τ) – преобразованием (8).

Отсюда и из теоремы 3 следует

Теорема 4. Эллиптичность или гиперболичность системы (3) – инвариант преобразования (4-6).

Рассмотрим общую задачу Коши для общей квазилинейной системы (3). Пусть начальное условие имеет вид $u = \psi$ на S, где $\psi = \psi(x, t) \in \mathbb{R}^m$ – заданная гладкая векторная функция, и $S = \{(x, t) : \phi(x, t) = 0, \nabla\phi(x, t) \neq 0\}$.

Определение 12. Точку $(x_0, t_0) \in S$ назовём нехарактеристической точкой задачи Коши для системы (3) с данными ψ, S, если направление касательной к кривой S в этой точке – нехарактеристическое для системы (3) в точке $(x_0, t_0, \psi(x_0, t_0))$.

Теорема 5. Задача Коши для системы (3) с данными ψ, S в окрестности любой нехарактеристической точки $(x_0, t_0) \in S$ может быть приведена к нормальной форме преобразованием (4-5).

Нормализация задачи Коши-II

◀ Направление нормали к кривой S в т. $(x_0, t_0) \in S$ задает вектор (ϕ_x^0, ϕ_t^0), где $\phi_x^0 = \phi_x(x_0, t_0)$, $\phi_t^0 = \phi_t(x_0, t_0)$. Направление касательной к кривой S в т. $(x_0, t_0) \in S$ задает вектор $(-\phi_t^0, \phi_x^0)$. Нехарактеристичность направления $\eta^x = -\phi_t^0$, $\eta^t = \phi_x^0$ равносильна неравенству $\det(\phi_x^0 A_0 + \phi_t^0 B_0) \neq 0$, где $A_0 = A(x_0, t_0, \psi^0)$, $B_0 = B(x_0, t_0, \psi^0)$.

Предположим дополнительно, что $\Phi_t^0 \neq 0$. Рассмотрим преобразование (4-5), где положим $z = \zeta, x = \xi, \tau = \phi(x, t)$. Это преобразование обратимо в окрестности точки (x_0, t_0), так как его матрица Якоби в этой точке невырождена. Тогда поднятие (4-6) приведёт систему (3) к виду (7), где $\widetilde{A} = A$, $\widetilde{B} = \phi_t B + \phi_x A$ с начальным условием $\widetilde{u}|_{\tau=0} = \widetilde{\psi}$, $\widetilde{\psi}(\xi, \tau) = \psi(x(\xi, \tau), t(\xi, \tau))$.

Матрица $\widetilde{B}(\xi^0, \tau^0, \widetilde{\psi}^0) = \phi_x^0 A_0 + \phi_t^0 B_0$ невырождена. Следовательно, матрицы $B(\xi, \tau, \zeta)$ невырождены $\forall\, (\xi, \tau, \zeta)$ из некоторой окрестности точки $(\xi^0, \tau^0, \widetilde{\psi}^0)$. Умножение на B^{-1} приводит систему к нормальной форме. Если $\Phi_t^0 = 0$, то $\Phi_x^0 \neq 0$. В таком случае повторяем всё проделанное, заменяя τ на ξ. ▶

Следствие 1. Аналитическая задача Коши для системы (3) с данными ψ, S имеет локальное решение в окрестности любой нехарактеристической точки $(x_0, t_0) \in S$.

Следствие 2. Задача Коши для гиперболической системы (3) с данными ψ, S в окрестности любой нехарактеристической точки $(x_0, t_0) \in S$ может быть приведена к нормальной форме с сохранением гиперболичности.

Задача Коши для системы в инвариантах Римана

Определение 12. Характеристикой квазлинейной системы (3) называется кривая на плоскости (x, t), касающаяся в каждой точке этой плоскости харктеристического направления $(\eta^x, \eta^t)(x, t, u)$, где $u = u(x, t)$ – решение системы (3).

Замечание 5. Характеристики, вообще говоря, неизвестны, до тех пор пока не найдено какое-нибудь решение системы. Если взять другое решение, то и характерстки изменятся. Например, в случае уравнения $u_t + uu_x = 0$ характеристика, проходящая через точку (x, t) – прямая $X - x = u(x, t)(T - t)$. В случае полулинейных систем характеристики НЕ зависят от решения.

Рассматриваем задачу Коши

$$r_t + \Lambda r_x = f(x, t, r), \;\; r|_{t=0} = \psi, \;\; \Lambda = \Lambda(x, t, r) = \mathrm{diag}(\lambda_1(x, t, r), \ldots, \lambda_m(x, t, r)). \quad (9)$$

Наметим ход доказательства существования решения задачи (9). Предположим, что известно решение $r = r(x, t)$ задачи (9). Определяем функции $X_j = X_j(x, t, \tau)$, $j = 1..m$, как решения задачи Коши

$$X_{j\tau} = \lambda_j(X_j, \tau, r(X_j, \tau)), \quad X_j|_{\tau=t} = x, \quad j = 1..m. \quad (10)$$

Полагаем $Z_j(x, t, \tau) = r_j(X_j(x, t, \tau), \tau)$, $j = 1..m$, $Z = (Z_1, ..Z_m)$. Тогда

$$Z_{j\tau} = r_{j\tau}(X_j, \tau) + \lambda_j(X_j, \tau, r(X_j, \tau))r_{jx}(X_j, \tau) = f_j(X_j, \tau, r(X_j, \tau)), \;\; j = 1..m.$$

Ввиду начального условия, $\psi_j(X_j(x, t, 0)) = Z_j(x, t, 0)$.

Редукция к неподвижной точке. Простые итерации.

Пусть теперь *дана* некоторая векторная функция $r = r(x,t)$. Составляем задачу Коши (10). Решение этой задачи порождает нелинейное отображение $\mathcal{L} : r \mapsto X$, $X = (X_1, .., X_m)$. Определяем отображение

$$\mathcal{N} : r \mapsto \rho, \;\; \rho_j(x,t) = \psi_j(X_j(x,t,0)) + \int\limits_0^t f_j(X_j, \tau, r(X_j(x,t,\tau), \tau) d\tau, X = \mathcal{L}r$$

Оказывается, если r – неподвижная точка оператора $\mathcal{N}$, т.е. $r = \mathcal{N}r$, то r – решение задачи Коши (9). Для доказательства существования неподвижной точки построения решения можно использовать метод простой итерации. Именно, выбираем r_0 и генерируем последовательность $r_k = \mathcal{N}r_{k-1}$. Если $r_k \to r$ в метрике, в которой оператор $\mathcal{N}$ непрерывен, то r – неподвижная точка. Достаточное условие сходимости простой итерации даёт принцип сжимающих отображений.

Последовательность итераций $\{r_k\}$ может не сходиться, тем не менее, неподвижными точками будут пределы любой сходящейся подпоследовательности $\{r_{k_n}\}$, а существование последней можно извлечь из компактности множества $\{r_k\}$.

Продолженная система

Дело осложняется ещё и тем, что неизвестно, в какой области определено решение, так как неясно продолжаемо ли решение задачи Коши (10) при данной векторной функции r на весь отрезок $[0, t]$.

Ещё трудность: не все системы приводятся к инвариантам Римана. Эта трудность преодолевается так. Рассматриваем общую гиперболическую задачу Коши

$$u_t + A(x, t, u)u_x = f(x, t, u), \ \ u|_{t=0} = \psi. \tag{11}$$

Дифференцируем (11) по x и полагаем $v = u_x$. Находим

$$v_t + A(x, t, u)v_x = (f_u - A_x - A_u v)v + f_x; \quad u_t = f - Av. \qquad (12).$$

Равенства (12)представляют собой систему $2m$ уравнений с зависимыми переменными $(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.

Определение 13. Система (12) называется *продолженной* системой (11).

Теорема 6. Продолженная гиперболическая система записывается в инвариантах Римана $(u, r) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, где $v = Wr$, $AW = W\Lambda$, и

$$u_t = h(x, t, u, r); \ \ r_t + \Lambda(x, t, u)r_x = g(x, t, u, r), \ \ \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, .., \lambda_m). \tag{13}$$

Доказательство сводится к непосредственной проверке.

Замечание 6. Продолженная система имеет $m + 1$ различных характеристические направлений $\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0$; последнее – кратности m,

Редукция к неподвижной точке без инвариантов Римана

и ему соответствуют характеристики $x = \mathrm{const}$. Направлениям $\lambda_j = \lambda_j(x,t,u)$, $j = 1\ldots m$ соответствуют характеристики зависящие только от u, как и у исходной системы.

Замечание 7. Начальные условия для продолженной системы ставят особым образом: $u|_{t=0} = \varphi$, $v|_{t=0} = \varphi_x$, или, для инвариантов, $Wr|_{t=0} = \varphi_x$. При таких начальных условиях $v = u_x$ при всех t, и u – решение исходной системы.

Замечание 8. Если система (11) полулинейна (линейна), то и продолженная система (12) полулинейна (линейна).

Итак, исследование общей нормальной задачи Коши (11) с помощью продолжения сводится к исследованию системы в инвариантах. Однако, при этом неизбежны избыточные предположения о гладкости данных. Есть способ обойти использование инвариантов Римана и продолженной системы.

С этой целью рассмотрим сперва задачу Коши для линейной системы

$$w_t + B(x,t)w_x = g(x,t), \;\; w|_{t=0} = \psi, \tag{14}$$

Решение этой системы порождает линейный оператор $\mathcal{W} : \psi \mapsto w$. Система (11) определяет соответствие между заданной функцией $u = u(x,t)$ и системой (14) следующим образом:

$$B(x,t) = A(x,t,u(x,t)), \quad g(x,t) = f(x,t,u(x,t)). \tag{15}$$

Области зависимости, влияния и определённости.

Таким образом, $u \mapsto W(u)$. Определяем отображение $\mathcal{K} : u \mapsto W(u)\psi$. Неподвижная точка $u = \mathcal{K}u$ – решение исходной задачи Коши (11). Реализация описанной схемы требует тщательного изучения линейной задачи (14).

Пусть $u = u(x,t)$ – решение задачи (11). Обозначим $\gamma_j(x_0,t_0)$ интегральную кривую поля направлений $\lambda_j(x,t,u(x,t))$. Кривая $\gamma_j(x_0,t_0)$, очевидно, параметризуется отображением $t = \sigma, x = X_j(\sigma, x_0, t_0)$, где X_j решение задачи Коши $X_j' = \lambda_j(X, \sigma, u(X,\sigma))$, $X_j(t_0) = x_0$.

Пусть $\gamma_j(x_0,t_0) \cap Ox \neq \varnothing \ \forall j$. Положим $\alpha_j(x_0,t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^j(x_0,t_0) \cap Ox = X_j(t,x_0,t_0)|_{t=0}$.

Определение 14. Интервал $\mathcal{I}_u(x_0,t_0) = (\min_j \alpha_j(x_0,t_0), \max_j \alpha_j(x_0,t_0))$ (где $\gamma^j(x_0,t_0) \cap Ox \neq \varnothing \ \forall j$) называется областью зависимости решения u в т. (x_0,t_0).

Определение 15. Область $\{(x,t) : \mathcal{I}_u(x,t) \cap (x_0,x_1) \neq \varnothing\}$ называется областью влияния интервала (x_0,x_1) на решение u задачи Коши (11).

Определение 16.Область $\mathcal{G}_u(x_1,x_2) = \{(x,t) : \mathcal{I}_u(x,t) \subset (x_1,x_2)\}$ называется областью определённости решения u задачи Коши (11) с начальным интервалом (x_1,x_2).

Замечание 9. В линейном случае области зависимости, влияния и определённости зависят лишь от характеристических направлений λ_j, но не от решения u.

Пусть система (11) линейна. Тогда можно считать, что она записана в инвариантах

$$r_t + \Lambda(x,t) r_x = Mr + b, \quad r|_{t=0} = \varphi, \quad M = M(x,t),\ b = b(x,t), \ (16)$$

Линейная задача Коши

Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{G}(I_0)$ – область определённости решений с начальным отрезком I_0 (эта область общая для всех решений, так как характеристики не зависят от решений); полагаем $G_T = \{(x,t) \in \mathcal{G}(I_0): \ t \in (0,T)\}$, T – произвольно.

Рассмотрим задачу Коши:

$$X_{j\tau} = \lambda_j(X_j, \tau), \ X_j|_{t=\tau} = x \in G_T, \quad X_j = X_j(x,\tau,t), \ j = 1..m;$$

Полагаем $\xi_j(a,t) = X_j(a,0,t)$, $a \in I_0$, $\alpha_j(x,t) = X_j(x,t,0)$, $(x,t) \in G_T$. Имеем $\xi_j(\alpha_j(x,t),t) = x$. Определяем векторную функцию $z = (z_1, ..z_m)$, полагая $z_j(a,t) = r_j(\xi_j(a,t),t)$, $a \in I_0$, $t \in (0,T)$. Имеем $r_k(x,t) = z_k(\alpha_k(x,t),t)$, $r_k(\xi_j(a,t),t) = z_k(\alpha_k(\xi_j(a,t),t),t)$, и

$$z_{jt} = \sum_k M_{jk}(\xi_j,t) z_k(\alpha_k(\xi_j,t),\tau) + b(\xi_j,t), z_j|_{t=0} = \varphi(a), \ \xi_j = \xi_j(a,t), \ j = 1..m.$$

Интегрированием сводим это дифференциальное уравнение к интегральному:

$$(\mathcal{T}z)_j(a,t) = \varphi_j(a) + \int_0^t \left(\sum_k M_{jk}(\xi_j,\tau) z_k(\alpha_k(\xi_j,\tau),\tau) + b(\xi_j,\tau) \right) d\tau, \tag{17}$$

где $\xi_j = \xi_j(a,\tau)$, $j = 1,..,m$, и векторная функция z определена в области $I_0 \times (0,T)$.

Квазилинейная задача Коши

Уравнение (16) линейно и неоднородно. Его можно записать в виде в виде $z = \mathcal{T}_0 z + y$,

$$(\mathcal{T}_0 z)_j(a,t) = \sum_k \int_0^t M_{jk}(\xi_j,\tau) z_k(\alpha_k(\xi_j,\tau),\tau)d\tau, \quad y_j(a,t) = \varphi_j(a) + \int_0^t b(\xi_j,\tau)d\tau,$$

где $\xi_j = \xi_j(a,\tau)$, $j = 1,..,m$. Оператор $\mathcal{T}$ линеен.

Неподвижная точка z оператора $\mathcal{T} : z \mapsto \mathcal{T}_0 z + y$ – решение уравнения (17). Предположим, существование этой неподвижной точки установлено. Тогда $r_j(x,t) = z_j(\alpha_j(x,t))$, $(x,t) \in \mathcal{G}(I_0)$ – решение задачи в инвариантах (16), а по нему, если нужно, восстанавливаем решение задачи (14).

Возвращаемся к квазилинейной задаче Коши (11). Строим итерационный процесс: пусть u^N –очередное приближение, и оно определено в области G_T^N. Строим линейную задачу (14) по правилу (15), где вместо u подставляем u^N. Находим решение линейной задачи u^{N+1}, заданное в области G_T^{N+1}, и т.д.

Оказывается, при достаточно малых T получается последовательность областей, стягивающихся к некоторой области G_T, и на этой области последовательность u^N сходится к решению системы (11).

Малость T определяется данными задачи, включая начальную функцию.

Локальность решения

Замечание 9. Случай политропного газа с $\gamma = 3$ сводится к двум несвязанным уравнениям Хопфа, и таким образом даёт примеры градиентной катастрофы решения задачи Коши гиперболической системы. Заметим, что в полулинейной системе такая катастрофа невозможна, но решение может взорваться за конечное время. Если система квазилинейна, но $f = 0$, то наоборот, невозможен взрыв, но возможна градиентная катастрофа. В линейных системах не бывает ни того, ни другого.

Решение линейной системы определено во всей области определённости решений с начальным отрезком I_0 при любой начальной функции. Эта область общая для всех решений, так как характеристики не зависят от решений.