УМФ
Лекция 9
1-й семестр – осень 2018 г
Законы сохранения. Обобщённые решения. Задача Римана.

Моргулис Андрей Борисович
КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

3 декабря 2018 г.

Законы сохранения

Определение 1. Законом сохранения называется равенство вида $(\psi(u,x,t))_t + (\varphi(u,x,t))_x = f(x,u,t)$, где $u = u(x,t)$ – некоторая функция.

Пример 1. Уравнение Хопфа $u_t + uu_x = 0$ может быть записано в виде закона сохранения $u_t + (u^2/2)_x = 0$.

Что сохраняется? Пусть $\Pi = (a,b) \times (t_0, t_1)$, рис. 1.

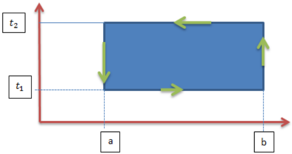


Рис. : 1. Прямоугольник $[a,b] \times [t_1, t_2]$ на плоскости (x,t).

Интегрируем закон сохранения по Π. Получаем

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_a^b f(u,x,t)\,dxdt = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(u,x,t)dt\Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \psi(u,x,t)dx\Big|_{t=t_0}^{t=t_1} \Longrightarrow$$

Что выражают законы сохранения

$$\int\limits_a^b \psi(u,x,t)\,dx\Big|_{t=t_0}^{t=t_1} = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b f(u,x,t)\,dxdt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi(u,a,t)dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi(u,b,t)dt \qquad (1)$$

Приращение количества ψ на отрезке (a, b) за время от t_0 до t_1 складывается из вклада источников (двойной интеграл), притока через левый край отрезка, и оттока через правый.

Когда квазилинейное уравнение имеет вид закона сохранения, понятие решения можно расширить и включить в рассмотрение функции, не имеющие непрерывных производных и даже разрывные функции. Это расширение с математической точки зрения мотивируется спонтанным возникновением разрывов по сценарию градиентной катастрофы, а с физической – потребностью в эффективном аппарате моделирования ударных волн.

Итак, расширяем понятие решения. С этой целью вводим кусочно-гладкие объекты.

Определение 2. Под гладкой дугой будем понимать образ $\gamma = r(\bar{I})$ взаимно однозначного отображения $r : I \to \gamma \subset \mathbb{R}^2$, такого, что $I \subset \mathbb{R}$ – конечный интервал, $r \in \mathrm{C}^1(\bar{I}, \mathbb{R}^2)$, и $r' \neq 0$ на $\bar{I}$.

Кусочно-гладкие области.

Определение 3. Область с компактной границей $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ называется кусочно-гладкой, если найдётся конечное множество $\Sigma_* = \{z_1, z_2, \dots, z_K\} \subset \mathbb{R}^2$ и M гладких дуг $\Sigma_m \subset \mathbb{R}^2$:

$$\partial\Omega = \Sigma_* \bigcup \left(\bigcup_{m=1}^{M} \Sigma_m \right), \ \Sigma_m \cap \Sigma_n \subset \varnothing, \ m \neq n, \ m, n = 1 \dots M, \ \Sigma_* \subset \overline{\bigcup_{m=1}^{M} \Sigma_m},$$

Пример 2. Прямоугольник – кусочно-гладкая область с компактной границей.

Пример 3. Круг и его внешность – кусочно-гладкие области с общей компактной границами. в смысле определения 3. Граничная окружность при стандартной параметризации – объединение одной гладкой дуги и ещё одной точки.

Пример 4. Дополнение пары кругов, касающихся в одной граничной точке – кусочно гладкая область с компактной границей.

Определение 4. Произвольная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ называется кусочно-гладкой, если её пересечение с любым кругом – кусочно-гладкая область.

Пример 5. Область $\{(x, y) : \ y > |\sin(x)|\}$ – кусочно-гладкая.

Определение 5. Кусочно-гладкая область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ называется гладкой, если для каждой точки $z \in \partial\Omega$ найдётся окрестность U_z, окрестность нуля $\widetilde{U}_0$, диффеоморфизм $h : U_z \to \widetilde{U}_0$, и координаты $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ в $\widetilde{U}_0$ такие, что

Кусочно-гладкие функции

$$(\mathrm{i})\ h(U_z \cap \Omega) \subset \{\widetilde{x} < 0\}, \quad (\mathrm{ii})\ h(U_z \cap \partial\Omega) \subset \{\widetilde{x} = 0\}, \quad (\mathrm{iii})\ h(z) = 0.$$

Пример 5. Области из примера 3 – гладкие, область из примера 4 – нет, так как в окрестности точки касания окружностей невозможно удовлетворить условию (ii).

Определение 6. Пусть множество $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ замкнуто. Функция $u = u(x, t)$, определённая на $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$, называется кусочно-$\mathrm{C}^l$-гладкой, если найдётся $N < \infty$ кусочно-гладких областей $\Omega_k \subset \mathbb{R}^2$ и функций $u_k \in \mathrm{C}^l(\mathbb{R}^2)$, $k = 1..N$, таких, что

$$(\mathrm{i})\ \Omega_j \cap \Omega_k = \varnothing, \quad (\mathrm{ii})\ u = u_k \text{ на } \Omega_k, \quad (\mathrm{iii})\ \mathbb{R}^2 = \bigcup_{k=1}^{N} (\Omega_k \cup \partial\Omega_k), \quad (\mathrm{iv})\ \Sigma \subset \bigcup_{k=1}^{N} \partial\Omega_k.$$

Замечание 1. В силу определения, множество точек разрыва кусочно-гладкой функции u в любой ограниченной области Ω покрывается конечным числом гладких дуг. Они разбивают Ω на конечное число кусочно-гладких подобластей Ω_i, на каждой которых u непрерывна вплоть до её границы. Это разбиение индуцирует разбиение $\gamma = \partial\Omega$ на конечное число дуг γ_i, на каждой из которой непрерывно распределены предельные значения u, достигаемые изнутри прилегающей области Ω_i (см. рис. 2).

Обобщённые решения

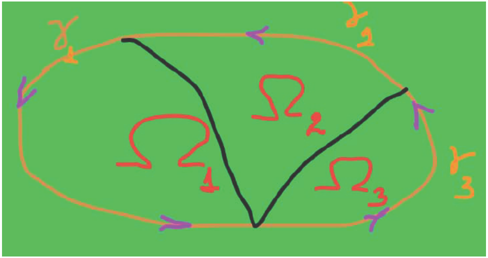


Рис. : 2. Разбиение области линиями разрыва (окрашены чёрным).

Определение 7. Кусочно-C^1-гладкую функцию u назовём обобщённым решением квазилинейного уравнения в форме закона сохранения в области D, если для любого $\Pi = (a, b) \times (t_0, t_1) \subset D$ имеет место интегральной тождество (1).

Замечание 2. Равенства (1) не содержат производных. Именно поэтому в них можно подставить кусочно-гладкую функцию u. При этом подинтегральные выражения в интегральных тождествах (1) терпят не более чем конечное число разрывов первого рода при переходе через точки множества Σ.

Обобщённое решение обобщает классическое!

Предложение 1. *Пусть обобщённое кусочно-*C^1*−гладкое решение и квазилинейного закона сохранения* $(\psi(u,x,t))_t + (\varphi(u,x,t))_x - f(x,u,t) = 0$ *непрерывно дифференцируемо в некоторой области* $D \subset \mathbb{R}^2$*. Тогда это уравнение выполняется в области* D *в классическом смысле.*

◀ Предположим противное. Введём $v = (\psi(u,x,t))_t + (\varphi(u,x,t))_x - f(x,u,t)$. По предположению, $v \in \mathrm{C}(D)$ и $\exists\ z_0 = (x_0, t_0) \in D:\ \ v(z_0) \neq 0$. Тогда найдётся прямоугольник $\Pi(z_0) = (a,b) \times (t_0, t_1)$, в котором $v(z) \neq 0$ всюду, и при этом выполнено интегральное тождество (1). Итак,

$$0 = \int\limits_a^b \psi(u,x,t)\,dx\Big|_{t=t_0}^{t=t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_a^b f(u,x,t)\,dxdt - \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi(u,a,t)dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi(u,b,t)dt =$$

$$= \int\limits_{\Pi(z_0)} \left((\psi(u,x,t))_t + (\varphi(u,x,t))_x - f(x,u,t)\right) dxdt = \int\limits_{\Pi(z_0)} \overbrace{v(x,t)}^{\neq 0}\, dxdt \neq 0.$$

Выполненные нами преобразования законны, так как производные обобщённого решение непрерывны по предположению. Полученное противоречие завершает доказательство. ▶

Начальные условия

Определение 8. Пусть u – кусочно C^1-гладкое решение закона сохранения $(\psi(u,x,t))_t + (\varphi(u,x,t))_x - f(x,u,t) = 0$ в области $D \subset \{(x,t) :\ t > 0\}$, причём $\partial D \cap \{t = 0\} = (x_0, x_1)$. Пусть u_0 – кусочно C^1-гладкая функция на $\mathbb{R}$. Говорят, что обобщённое решение u удовлетворяет начальному условию $u = u_0$ при $t = 0$, если для любого прямоугольника $\Pi_0 = (a,b) \times (0,t_1) \subset D$ выполняется равенство

$$\int\limits_a^b (\psi(u,x,t_1) - \psi(u_0,x,0))\,dx = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_a^b f(u,x,t)\,dxdt + \int\limits_0^{t_1} \varphi(u,x,t)dt\Big|_{x=a}^{x=b}. \qquad (2)$$

Предложение 2. Пусть выполнены условия (i) u – кусочно C^1-гладкое решение закона сохранения $(\psi(u,x,t))_t + (\varphi(u,x,t))_x - f(x,u,t) = 0$ в области $D \subset \{(x,t) :\ t > 0\}$, причём $\partial D \cap \{t = 0\} = (x_0, x_1)$; (ii) u_0 – кусочно C^1-гладкая функция на $\mathbb{R}$; (iii) $x_0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_N = x_1$, $I_k = [a_k, a_{k+1}]$ и $u_0 \in \mathrm{C}^1(\overline{I}_k)$; (iv) Пусть обощённое решение u удовлетворяет условию

$$\sup_{x\in J} |u(x,t) - u_0(x)| \to +0,\ \ t \to +0,\ \ \forall\ J = (b_0, b_1) \subset I_k.$$

Тогда u удовлетворяет начальному условию $u|_{t=0} = u_0$ в смысле определения 1. Доказательство пропустим.

Задача Римана

Определение 9. Задачей Римана называют задачу Коши для квазилинейного закона сохранения при разрывной начальной функции (как, например, на рис. 3).

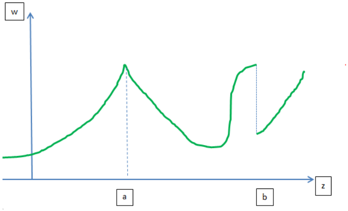


Рис. : 3. Кусочно гладкая начальная функция.

Простейший вариант задачи:

$$(\psi(u))_t + (\varphi(u))_x = 0;\ \ u|_{t=0} = u_0; \qquad u_0(x) = \begin{cases} u^+, x > 0, \\ u^-, x < 0 \end{cases} \tag{3}$$

где $u^{\pm}$ – заданные постоянные. Ищем решение, определённое в полуплоскости $\{t > 0\}$.

Автомодельные решения

Замечание 1. Закон сохранения (3) записывается в виде уравнения Хопфа

$$u_t + \lambda(u)u_x = 0,\ \ \lambda(u) = \varphi'(u)/\psi'(u) \tag{4}$$

Начальные данные (3) скейлинг-инвариантны:

$$v(kx) = v(x),\ \forall\ k > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Поэтому представляется естественным разыскивать автомодельное обобщённое решение

$$u = w(z),\ \ z = x/t, \tag{5}$$

где функция w, вообще говоря, кусочно $\mathrm{C}^{\mathbf{1}}$-гладкая на $\mathbb{R}$ (рис. 3). Чтобы удовлетворить начальному условию (3), потребуем выполнения равенств

$$\lim_{z\to\pm\infty} w = u^{\pm}. \tag{6}$$

Ввиду (6), разыскиваем w в виде

$$w(z) = \begin{cases} u^+,\ \ z > z^+ \\ u^-,\ \ z < z^- \\ W(z),\ \ z^- < z < z^+ \end{cases} \tag{7}$$

где функция $W = W(z),\ \ z \in (z^-, z^+)$ – непостоянное автомодельное решение.

Сильные и слабые разрывы

Возможно, $z^+ = \infty$, или $z^- = \infty$. Тогда должно выполняться соответствующее предельное равенство (6).

Определение 10. Точку z, обладающую окрестностью, в которой w непрерывно дифференцируема назовём точкой C^1-гладкости функции w. Точки, не принадлежащие множеству точек гладкости функции w назовём точками разрыва.

Пусть Σ – множество точек разрыва кусочно C^1-гладкой функции w.
Определение 11. Точку $z \in \Sigma$ назовём точкой сильного (слабого разрыва), если в ней w, w' терпят разрывы 1-го рода (w непрерывна, а w' терпит разрыв 1-го рода).

Замечание 2. В случае кусочно C^1-гладкой функции любая точка разрыва есть точка слабого или сильного разрыва.

Определение 12. Луч $x = zt$, $t > 0$ назовём линией сильного (слабого) разрыва автомодельного решения $u = w(x/t)$, если z – точка сильного (слабого разрыва) функции w.

Определение 13. Обобщённое автомодельное решение назовём слабо разрывным, если все его разрывы – слабые.

С целью дальнейшего упрощения решения, предполагаем, что верно одно из двух: или решение слаборазрывно, и имеет ровно два слабых разрыва при $z = z^-$ и $z = z^+$, $z^+ \neq z^-$ (при условии, что $z^\pm$ конечны, см. (7)), или терпит ровно один сильный разрыв при $z = z^+ = z^-$.

Слабо разрывные решения

В случае слаборазрывного решения (7) функция W – гладкая. По непрерывности, $W(z^{\pm}) = u^{\pm}$. При этом W и $z^{\pm}$ определяются из уравнений

$$z = \lambda(W), \;\; z^{\pm} = \lambda(u^{\pm}), \;\; \lambda(u) = \varphi'(u)/\psi'(u); \qquad (8)$$

при этом должно выполняться неравенство $z^{+} > z^{-}$, тогда интервал (z^{-}, z^{+}) определён (рис. 4). В противном случае слаборазрывного решения с двумя разрывами не существует.

Рис. : 4. Справа – схема устройства слаборазрывного решения (7) в простейшем случае. Кирпично-красным окрашены характеристики $x = ut$, $u = z \in (z^{-}, z^{+})$, $z^{\pm} = u^{\pm}$. Слева – график w для слаборазрывного автомодельного решения (кирпично-красная линия) в случае $\lambda(u) = u$.

Сильно разрывные решения

$$w(z) = \begin{cases} u^+, & z > \mathcal{D} \\ u^-, & z < \mathcal{D} \end{cases} \qquad (9)$$

где $\mathcal{D} = z^+ = z^-$. Определим D. С этой целью подставим выражение (9) в интегральное тождество (1), определяющее обощённое решение, где $\varphi = \varphi(u)$, $\psi = \psi(u)$. Это тождество заведомо имеет место, если пробный прямоугольник $\Pi = (a, b) \times (t_0, t_1)$ не пересекается с линией разрыва $x = \mathcal{D}t$ (так как в этом случае u постоянна на $\overline{\Pi}$).

Пусть линия разрыва пересекает пробный прямоугольник, как показано на рис. 5.

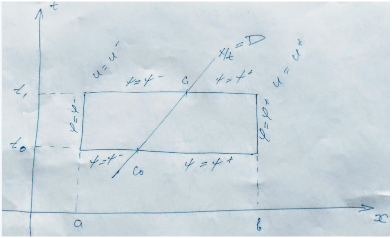


Рис. : 5. Линия сильного разрыва автомодельного решения пересекает пробный прямоугольник

Условие Гюгонио

Разумеется, возможны и другие картины пересечения, но мы рассмотрим только случай, изображённый на рис. 5. Разбор остальных не требует новых идей и не приводит к другим типам условий, определяющим линию разрыва.

Полагаем $\varphi^{\pm} = \varphi(u^{\pm})$, $\psi^{\pm} = \psi(u^{\pm})$. Тогда интегральное тождество (1), записанное для пробного прямоугольника, изображённого на рис. 5, принимает вид

$$(\varphi^{+} - \varphi^{-})(t_1 - t_0) + \psi^{+}\left((b - c_1) - (b - c_0)\right) + \psi^{-}\left((c_1 - a) - (c_0 - a)\right) = 0$$

Отсюда находим $(\varphi^{+} - \varphi^{-})(t_1 - t_0) = (\psi^{+} - \psi^{-})(c_1 - c_0)$, где $c_1 - c_0 = \mathcal{D}(t_1 - t_0)$. Итак, относительно $\mathcal{D}$ имеем уравнение

$$\mathcal{D}[\psi]_{\xi} = [\varphi]_{\xi}, \tag{10}$$

$$\text{где } [\psi]_{\xi} = \psi^{+} - \psi^{-}, \quad [\varphi]_{\xi} = \varphi^{+} - \varphi^{-} \quad \forall \xi = \mathcal{D}t \tag{11}$$

Уравнение (10) представляет собой частный случай так называемого условия Гюгонио на сильном разрыве. Обозначение

$$[f]_{\xi} \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to \xi + 0} f(x) - \lim_{x \to \xi - 0} f(x), \tag{12}$$

далее будет использоваться постоянно. Величину $[f]_{\xi}$ называют *скачком* f в т. ξ.

Пример решения задачи Римана.

Замечание 3. Как видно из предложения 1, обобщённое решение удовлетворяет закону сохранения в дифференциальной форме в любой области, лежащей в дополнении объединения всех линий разрыва.

Замечание 4. *Обратное к утверждению, высказанному в замечании 3, верно лишь при условии, что все разрывы слабые.* Например, любая кусочно-постоянная функция удовлетворяет любому дифференциальному закону сохранения вида (3) в любой области, для того, чтобы такая функция была обобщённым решением конкретного закона сохранения необходимо условие Гюгонио.

Замечание 5. Автомодельные решения обоих рассмотренных типов удовлетворяют начальному условию. Это вытекает из предложения 2.

Пример 1. Уравнение Хопфа $u_t + uu_x = 0$, $\psi = u$, $\varphi(u) = u^2/2$. Гладкое при $t > 0$ автомодельное решение определяется уравнением $\lambda(W) = z$, где $\lambda(u) = u$. Поэтому $W(z) = z$, $z^{\pm} = u^{\pm}$. Если $u^- > u^+$, то $z^- > z^+$, и автомодельного слаборазрывного решения с двумя линиями разрыва нет. Если $u^- < u^+$, то автомодельное слаборазрывное решение имеет вид

$$u(x,t) = w(x/t), \quad w(z) = \begin{cases} u^+, \ z > u^+ \\ u^-, \ z < u^- \\ z, \ u^- < z < u^+ \end{cases} \tag{13}$$

Неединственность и проблема селекции решений

Пример 2. Уравнение Хопфа $u_t + uu_x = 0$, $\psi = u$, $\varphi(u) = u^2/2$. Ищем автомодельное решение с одной линией сильного разрыва $x = \mathcal{D}t$. Пишем условие Гюгонио $\mathcal{D}[u] = [u^2/2] = [u](u^+ + u^-)/2$. Находим решение

$$u(x,t) = w(x/t), \quad w(z) = \begin{cases} u^+, & z > \mathcal{D} \\ u^-, & z < \mathcal{D} \end{cases} \quad \mathcal{D} = \frac{u^+ + u^-}{2}. \tag{14}$$

Следовательно, кусочно-постоянное разрывное решение существует при любых заданных $u^\pm$.

Замечание 6. Уравнение Хопфа можно трактовать как перенос некоей субстанции со скоростью, зависящей от её концентрации. В нашем случае они равны и могут принимать всего два значения. Решение (14) описывает скачок концентрации, двигающийся вдоль оси Ox со скоростью $\mathcal{D}$, то есть ударную волну. Скорость этой ударной волны равна $\mathcal{D}$. Она *не* совпадает ни с одной из двух возможных скоростей среды. $\mathcal{D}$ называют *скоростью разрыва*.

При $u^+ > u^-$ задача Римана (3) имеет как минимум два решения: слабо разрывное (13) и сильно разрывное (14). Следовательно, решение задачи Римана неединственно. Как отбирать решения? Для селекции разрывов используют понятие устойчивого и неустойчивого разрыва. Общая идея в том, что сильный разрыв следует выбирать, если при сглаженных начальных данных градиентная катастрофа развивается при положительном времени.

Сглаженные данные

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Хопфа, и примем за начальную функцию сглаженную ступеньку (3), рис. 6. Можно, например, положить,

$$u|_{t=0} = u_0^\delta(x) = u^- + \left(u^+ - u^-\right)\left(1 + \mathrm{th}(\frac{x}{\delta})\right)/2 \qquad (15)$$

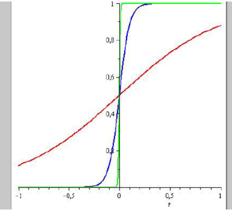


Рис. : 6. Сглаживание ступеньки. Графики функции (15) при $u^- = 0$, $u^+ = 1$, $\delta = 1$ (красный цвет), $\delta = 0.1$ (синий цвет), $\delta = 0.01$ (зелёный цвет).

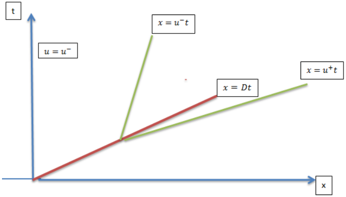
Обозначим через u^δ гладкое решение задачи Коши для уравнения Хопфа $u_t + uu_x = 0$ с начальным условием (15). Оказывается, (i) при $u^+ > u^-$ решение u^δ определено при всех $t > 0$, и при $\delta \to +0$ стремится к автомодельному слаборазрывному решению (13);

Характетристические ломаные

(ii) при $u^+ > u^-$ решение u^δ определено в лишь при $t < t_c(\delta)$, при $t \to t_c - 0$ происходит градиентная катастрофа, и $t_c \to +0$, когда $\delta \to +0$.

В силу сказанного, разрывное решение (14) вполне естественно в случае $u^+ < u^-$, но должно быть исключено как искусственное и заменено слаборазрывным решением (13) в случае $u^+ > u^-$.

Понять ситуацию позволяет наблюдение за характеристиками.



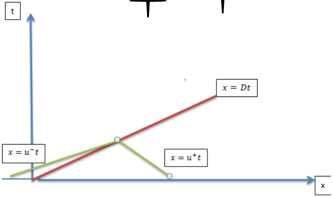


Рис. : 7. Схема характеристических ломаных (окрашены зелёным) около линий разрыва (кирпично-красные) автомодельного решения уравнения Хопфа $u_t + uu_x = 0$. Слева $u^+ > \mathcal{D} > u^-$, справа $u^+ < \mathcal{D} < u^-$, $\mathcal{D} = (u^+ + u^-)/2$.

Приходящие и уходящие характеристики

Закон сохранения (3) сводится к уравнению Хопфа $u_t + \lambda(u)u_x = 0$, $\lambda = \varphi'/\psi'$. Характеристика, проходящая через точку (x, t) задаётся уравнением $X - x = \lambda(T - t)$ (здесь X, T – координаты текущей точки характеристики).

Если (x, t) – точка на линии сильного разрыва автомодельного решения типа (14), то в ней направление характеристики мгновенно меняется, и характеристика образует ломаную линию, вершина которой лежит в точке (x, t), а звенья заданы уравнениями $X - x = \lambda^{\pm}(T - t)$. Сама линия разрыва – прямая $x = \mathcal{D}t$, где D определено условием Гюгонио (10). Как видно из рис. 7 (где $\lambda(u) = u$), расположение характеристических ломаных относительно линии разрыва $x = \mathcal{D}t$ качественно изменяется при изменении неравенств между $u^{\pm}$. Именно, если $u^+ < u^-$ (рис. 7, справа), то оба звена ломаной пересекают ось Ox (т.е. оба звена *приходящие*), а если $u^+ > u^-$ (рис. 7, слева), то ни одно звено не пересекает ось Ox (т.е. оба звена *уходящие*).

Приходящие звенья характеристики приносят в точку (x, t) различные начальные значения. В такой ситуации разрывное решение естественно. Если же оба звена уходящие, то для подобного конфликта данных нет оснований, и разрывное решение искусственное.

Устойчивые разрывы. Системы законов сохранения

Определение 14. *Разрывное автомодельное решение закона сохранения (3) называют устойчивым, если в каждой точке каждой линии сильного разрыва* $x = \mathcal{D}t$ *выполнено условие*

$$\lambda^{+} < D < \lambda^{-}, \; \lambda^{\pm} = \lambda\left(u^{\pm}\right). \tag{16}$$

Разрывное решение, не являющееся устойчивым, называют неустойчивым.

Замечание 7. Неравенство (13) необходимо и достаточно для того, чтобы оба звена характеристической ломаной были приходящими.

Для краткости, вместо «устойчивого или неустойчивого разрывного решения», широко употребляется выражение «устойчивый или неустойчивый разрыв». Итак, *устойчивые разрывы принимаются во внимание, а неустойчивые – игнорируются.*

Определение 15. Системой законов сохранения называют систему квазилинейных уравнений, каждое из которых записано в виде закона сохранения. Задачей Римана для системы законов сохранения называют задачу Коши с кусочно- гладкими начальными данными.
Простейший вариант:

$$(\Psi(v))_t + (\Phi(v))_x = 0; \;\; v|_{t=0} = v_0; \qquad v_0(x) = \begin{cases} v^{+}, x > 0, \\ v^{-}, x < 0 \end{cases} \tag{17}$$

Система законов сохранения газодинамики

где $v^{\pm} \in \mathbb{R}^m$ – заданные постоянные векторы, $\Psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$; таким образом, уравнения системы имеют вид:

$$(\Psi_j(v))_t + (\Phi_j(v))_x = 0, \ j = 1 \dots m,$$

что отличается от (3) векторным аргументом функций Φ_j, Ψ_j. Ищем решение, определённое в полуплоскости $\{t > 0\}$.

Определение 16. Кусочно-C^1-гладкую векторную функцию u назовём обобщённым решением системы законов сохранения (17) в области D, если для любого $j = 1..m$ и для любого $\Pi = (a, b) \times (t_0, t_1) \subset D$ имеет место интегральной тождество (1) с $\varphi = \Phi_j$, $\psi = \Psi_j$.

Пример 3. Уравнения изэнтропической (баротропной) газовой динамики записываются в виде пары законов сохранения

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0; \quad (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x = 0. \tag{18}$$

Здесь первое уравнение выражает закон сохранения массы, второе – закон сохранения импульса. Система (18) имеет вид (17), где $v = (\rho, u)$, $\Psi(v) = (\rho, \rho u)$, $\Phi(v) = (\rho u, \rho u^2 + P(\rho))$.

Закон сохранения энергии в газодинамике

Замечание 8. Из двух законов сохранения (18) вытекает третий – закон сохранения энергии

$$\left(\rho(u^2/2+\varepsilon(\rho))\right)_t+\left(u(\rho u^2/2+\varepsilon(\rho)+\rho^{-1}P(\rho))\right)_x=0,\ d\varepsilon=\rho^{-2}P(\rho). \tag{19}$$

Функцию ε называют плотностью внутренней энергии жидкости.

Замечание 9. Для описания неизэнтропического движения газа необходима дополнительная неизвестная функция; обычно это температура или энтропия. В таком случае закон сохранения энергии играет роль дополнительного уравнения

$$\left(\rho(u^2/2+\varepsilon)\right)_t+\left(u(\rho u^2/2+\varepsilon+\rho^{-1}P)\right)_x=0. \tag{20}$$

Плотность внутренней энергии жидкости ε и давление P в этом случае зависят не только плотности ρ, но и от температуры или энтропии.

Замечание 10. Закон сохранения полной энергии действует для гладких решений, но не выполняется, вообще говоря, для обобщённых решений, например, в случае сильных разрывов.

Автомодельные решения задачи Римана для систем.

Простейшие автомодельные решения определяются как для одного закона сохранения, формулами (5), (7)(слабый разрыв) или (5), (9) (сильный разрыв), где все функции теперь векторные.

Построение слаборазрывного решения (13) включает вычисление гладкого автомодельного решения W, для чего требуется решать систему ОДУ, а это может оказаться трудным делом. Инварианты Римана могут упростить эту задачу, так как автомодельные решения – волны Римана.

Пусть система двух законов сохранения приведёна к инвариантам:

$$r_t + \mu(r,s)r_x = 0, \quad s_t + \nu(r,s)s_x = 0 \tag{21}$$

Рассмотрим волну Римана в которой $s = S \equiv \mathrm{const}$ (r-волна). Уравнение этой волны имеет вид (4):

$$r_t + \lambda r_x = 0, \quad \lambda = \mu(r,S) \tag{22}$$

Автомодельное решение $r = R(z)$ неявно задано равенством $z = \lambda(R)$. Таким образом, получаем гладкую автомодельную r-волну

$$W(z) = (R(z), S), \; S \equiv \mathrm{const}, \quad z = \mu(R,S). \tag{23}$$

Рассмотрим сшивку решения (23) с постоянными (r^+, s^+) при $z = z^+$, и с (r^-, s^-) при $z = z^- < z^+$.

Сильные разрывы

Если изначально задача ставится в других переменных, то выразим $(r^{\pm}, s^{\pm})$ через векторы $v^{\pm}$, заданные в начальном условии (17). Для того, чтобы соединить состояния (r^{+}, s^{+}) и (r^{-}, s^{-}) r-волной необходимо, чтобы $s^{+} = s^{-} = S$. Если это условие выполнено, то переходим к уравнению (22), и действуем, как в разделе 2. Если решение в виде r-волны построить не удалось, исследуем s-волну. Следует помнить, что слаборазрывное автомодельное решение вида (5), (7) может вовсе не существовать.

Вычисление сильно разрывного автомодельного решения вида (5), (9) сводится к определению скорости разрыва с помощью условий Гюгонио. В случае системы (17) эти условия записываются так

$$\mathcal{D}[\Psi(v)]_{\xi} = [\Phi(v)]_{\xi}, \ \xi = \mathcal{D}t. \tag{24}$$

Векторное равенство (24) эквивалентно m скалярным уравнениям. Если предельные значения $v^{\pm}$ на берегах разрыва заданы, то неизвестна только скорость разрыва $\mathcal{D}$, что делает систему сильно переопределённой. Следовательно, сильно разрывное автомодельное решение вида (5), (9) существует лишь при данных, связанных специальными соотношениями.

Сильные разрывы в газодинамике

Пример 4. В случае изэнтропической газовой динамики (18) условия Гюгонио записываются так

$$\mathcal{D}[\rho]_\xi = [\rho u]_\xi,\ \mathcal{D}[\rho u]_\xi = [\rho u^2 + P(\rho)]_\xi,\ \xi = \mathcal{D}t.$$

Исключаем $\mathcal{D}$. Имеем:

$$[\rho u]^2 = [\rho][\rho u^2 + P(\rho)]$$

Отсюда, после приведения подобных, выводим равенство:

$$\rho^+\rho^-[u]^2 = [\rho][P(\rho)] \tag{25}$$

Из (25) видно, например, что на границе газ-вакуум ($\rho^+ = 0$ или $\rho^- = 0$) скачок давления $[P(\rho)] = 0$. Но $P'(\rho) > 0$ при $\rho > 0$ (иначе система (18) не гиперболична), поэтому равенство $[P(\rho)] = 0$ влечёт $[\rho] = 0$. Таким образом, граница газ-вакуум *не может* быть линией сильного разрыва.

Один из этих подходов к проблеме селекции разрывов систем законов сохранени основан на условии Лакса (P.D. Lax), представляющем собой обобщение условия устойчивости разрывного решения одного уравнения.

Селекция разрывов. Условия Лакса

Пусть система m законов сохранения гиперболическая в узком смысле. Это означает, что её можно привести к виду В таком $v_t + Av_x = f$, где матрица A имеет ровно m различных вещественных собственных чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < ..$, задающих характеристические направления на плоскости x, t.

На линии разрыва каждое $\lambda_j,\ j = 1 \ldots m$, меняется скачком, и соответствующая характеристика образует ломаную, вершина которой лежит на линии разрыва, а уравнения звеньев ломаной имеют вид $\xi - x = \lambda_j^{\pm}(\tau - t),\ \lambda_j^{\pm} = \lambda_j\left(v^{\pm}\right)$.

Определение 17. Приходящим назовём звено характеристической ломаной, пересекающее ось Ox, а уходящим – не пересекающее.

Определение 18. *Говорят,что сильно разрывное автомодельное решение гиперболической системы удовлетворяет условию Лакса, если на каждой линии разрыва найдётся характеристическая ломаная у которой оба звена приходящие, а все остальные $m-1$ характеристические ломаные имеют по одному уходящему звену и по одному приходящему. Разрывное решение, удовлетворяющее (не удовлетворяющее) условию Лакса, называют устойчивым (неустойчивым).*

Неустойчивые разрывы игнорируются, устойчивые – рассматриваются.

Условия Лакса в случае двух законов сохранения

Имеем $\lambda_1^\pm < \lambda_2^\pm$ в силу принятого упорядочивания. Условия того, что первая (направляемая λ_1) характеристическая ломаная имеет два приходящих звена записываются так:

$$\lambda_1^- > D > \lambda_1^+. \tag{26}$$

Ввиду принятого упорядочивания,

$$\lambda_2^- > \lambda_1^- > D > \lambda_1^+.$$

Значит, вторая (направляемая λ_2) характеристическая ломаная заведомо имеет одно приходящее звено (направляемое λ_2^-). Следовательно, второе (направляемое λ_2^+) звено второй ломаной должно быть уходящим. Отсюда неравенство

$$\lambda_2^+ > D. \tag{27}$$

Условия того, что вторая характеристическая ломаная имеет два приходящих звена записываются так:

$$\lambda_2^- > D > \lambda_2^+. \tag{28}$$

Ввиду принятого упорядочивания,

$$\lambda_2^- > D > \lambda_2^+ > \lambda_1^+.$$

Значит, первая характеристическая ломаная заведомо имеет одно приходящее звено (направляемое λ_1^+).

Условия Лакса в случае двух законов сохранения-II

Следовательно, второе (направляемое λ_1^-) звено первой ломаной должно быть уходящим. Отсюда неравенство

$$\lambda_1^- < D. \tag{29}$$

Итак, условие Лакса равносильно выполнению одной из двух пар неравенств: (26), (27) или (28), (29) (см. рис. 8).

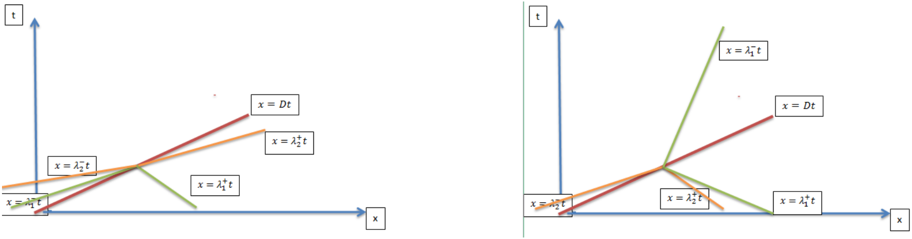


Рис. : 8. Характеристические ломаные в случае устойчивого разрыва. Характеристики первого семейства – зелёные, второго – оранжевые; линия разрыва – кирпично-красная. Слева картина соответствует неравенствам (26), (27), справа – неравенствам (28), (29).