1. Ориентированные кривые. Криволинейный интеграл.

Определение 1. Под гладкой дугой будем понимать образ $\gamma = r(\overline{I})$ взаимно однозначного отображения $r : I \to \gamma \subset \mathbb{R}^2$, такого, что $I \subset \mathbb{R}$ – конечный интервал, $r \in \mathrm{C}^1(\overline{I}, \mathbb{R}^2)$, и $r' \neq 0$ на $\overline{I}$.

Отображение r из определения 1 назовём *параметризацией* гладкой дуги γ.

Замечание 1. Параметризация гладкой дуги может быть выбрана многими способами. Например, пусть I_1, I – интервалы, и $\varphi : I_1 \to I$, $\varphi \in \mathrm{C}^1(\overline{I}_1)$, причём $\varphi' \neq 0$ на $\overline{I}_1$; пусть отображение $r : I \to \gamma \subset \mathbb{R}^2$ параметризует гладкую дугу γ. Тогда $r_1 = r \circ \varphi : I_1 \to \mathbb{R}^2$ тоже параметризует гладкую дугу γ. В частности, в роли φ может выступать инверсия $t \mapsto a + b - \tau$ интервала $I = (a, b)$.

Замечание 2. Пусть $r_1 : I_1 \to \gamma$ и $r_2 : I_2 \to \gamma$ – две параметризации одной гладкой дуги γ. Тогда $\exists\, \varphi \in \mathrm{C}^1(\overline{I}_1) : \varphi' \neq 0$ на $\overline{I}_1$ и $r_1 = r_2 \circ \varphi$.

Замечание 3. Пусть r_1, r_2 – две параметризации гладкой дуги γ. Тогда $(r_1', r_2') \neq 0$ на γ.

Определение 2. Параметризации r_1, r_2 гладкой дуги γ назовём одинаково (противоположно) ориентированными, если $(r_1', r_2') > 0 (< 0)$ всюду на γ.

Замечание 4. Ориентация – просто направление движения по дуге при выбранной параметризации. В самом деле, пусть $r : (a, b) \to \gamma$ – параметризация гладкой дуги γ, и $r_1(\sigma) = r(a + b - \sigma)$. Тогда r и r_1 противоположно ориентированы.

Определение 3. Ориентацией гладкой дуги γ назовём класс одинаково ориентированных параметризаций этой дуги. Ориентированной дугой назовём гладкую дугу, снабжённую ориентацией.

Замечание 5. Любая параметризация гладкой дуги γ задаёт её ориентацию.

Пусть γ –гладкая дуга, и , $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ – функции, непрерывные в области $\Omega \supset \overline{\gamma}$.

Определение 4. Интегралом дифференциальной формы $Pdx + Qdy$ по гладкой ориентированной дуге γ называется число, равное

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \big(P(\xi(\tau), \eta(\tau))\xi'(\tau) + Q(\xi(\tau), \eta(\tau))\eta'(\tau)\big)\, d\tau. \tag{1}$$

где $r : \tau \mapsto (\xi(\tau), \eta(\tau))$, $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ – параметризация дуги γ, согласованная с её ориентацией.

Замечание 6. Интеграл формы $Pdx + Qdy$ по дуге γ не изменится при замене параметризации дуги на другую параметризацию с такой же ориентацией.

Замечание 7. Интеграл формы $Pdx + Qdy$ по ориентированной дуге γ при ориентации изменении дуги меняет знак, но сохраняет абсолютную величину.

Замечание 8. Интеграл (1) принято записывать так:

$$\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy. \tag{2}$$

Во многих учебниках интеграл (1-2) называют *криволинейным интегралом 2-го рода.* Интеграл (1) записывают ещё и так

$$\oint\limits_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dr}, \;\; \mathbf{v} = \mathbf{v}(\xi(\tau), \eta(\tau)), \;\; \mathbf{dr} = (\xi'(\tau), \eta'(\tau))d\tau, \tag{3}$$

где $\mathbf{v}(x, y) = (P, Q)(x, y)$, и называют *интегралом векторного поля* $\mathbf{v}$ *по кривой* γ.

Определение 5. Пусть γ – ориентированная дуга, и $r : (a, b) \to \gamma$ – параметризация надлежащей ориентации; границу $\partial\gamma$ ориентированной дуги γ определим как множество двух пар $\{(-1, r^-), (+1, r^+)\}$,

$r^+ = r(b)$, $r^- = r(a)$. Точки r^+ и r^- назовём началом и концом дуги.

Замечание 9. Начало и конец дуги не зависят от выбора её параметризации (при согласовании ориентации).

Определение 6. Объединение конечного числа ориентированных дуг, дополненных началами и концами, назовём цепью.

Определение 7. Границей цепи назовём множество (возможно, пустое) составленное из пар (n, z), $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, где z пробегает объединение начал и концов всех дуг, определяющих цепь, и n равно сумме всех первых элементов всех тех пар, в которых второй элемент равен z; при этом пары $(0, z)$ исключаются из множества. Цепь с с пустой границей называется замкнутой.

Пример 1. Окружность или любая другая гладкая дуга, начало и конец которой совпадают, определяет замкнутую цепь, состоящую из одной этой дуги.

Определение 8. Интегралом формы $Pdx+Qdy$ по цепи C называется число, равное сумме интегралов формы $Pdx + Qdy$ по дугам, образующим эту цепь.

Замечание 10. Интеграл векторного поля по замкнутой цепи называют циркуляцией. Если цепь представляет собой кривую, говорят о циркуляции вокруг кривой.

Пример 2. Цепь (или кривая) γ – окружность радиуса R, ориентированная движением против часовой стрелки; параметризация $x = R\cos(t)$, $y = R\sin(t)$, $t \in (0, 2\pi)$

$$\int\limits_\gamma xdy - ydx = R^2 \int\limits_0^{2\pi} d\tau = 2\pi R^2.$$

Пример 3. Цепь (или кривая) γ – как в примере 1;

$$\int\limits_\gamma xdx + ydy = R^2 \int\limits_0^{2\pi} 0 d\tau = 0.$$

Пример 4. Кривая γ – замкнута (=представляет замкнутую цепь), $P = \phi_x$, $Q = \phi_y$, причём функция ϕ непрерывно дифференцируема в области, содержащей γ. Тогда

$$\int\limits_\gamma Pdx + Qdy = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \big(\phi_x(\xi(\tau), \eta(\tau))\xi'(\tau) + \phi_y(\xi(\tau), \eta(\tau))\eta'(\tau)\big)\, d\tau = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau}\phi(\xi(\tau), \eta(\tau)) d\tau = 0.$$

Пример 5. Кривая γ – окружность с центром в нуле, ориентированная против часовой стрелки. Тогда

$$\int\limits_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 2\pi$$

при любом радиусе. Здесь

$$P = \phi_x,\ Q = \phi_y,\ \phi = \mathrm{arctg}(y/x)$$

Разрешение «парадокса»: функция ϕ разрывна на окружности, хотя функции $P = \phi_x$, $Q = \phi_y$, непрерывно дифференцируемы в области, содержащей γ, и вообще вне любой окрестности начала координат. На самом деле,

$$\int\limits_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

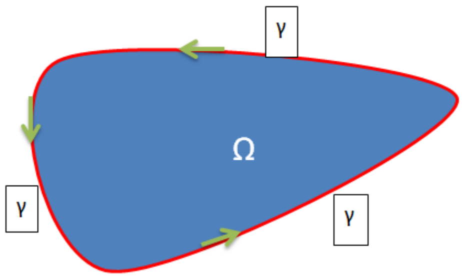

Рис. 1: Область Ω и её граница γ

для любой кривой γ, не содержащей внутри себя начало координат (см. ниже).

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область, и $\Gamma = \partial\Omega$ – цепь, дуги которой ориентированы так, что при их прохождении область остается слева(рис. 1). Пусть $P, Q \in C^1(\overline{\Omega})$,

$$\oint\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Omega} (Q_x - P_y)dxdy. \tag{2}$$

Формула (2) называется формулой Грина.

Замечание 10. При нарушении гладкости P, Q формула Грина может быть неверна. Так, функции P, Q из примера 5 таковы, что $P_y - Q_x = 0$ всюду кроме начала, и интеграл по окружности с центром в нуле из примера 5 не равен нулю.

Пример 6. Пусть γ – некоторая цепь. Интеграл

$$\int\limits_{\gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 2\pi m, \tag{3}$$

где m – число оборотов цепи γ вокруг начала, см. рис. 2 ((a) – $m = 1$, (б) – $m = 2$). Доказательство формулы при $m = 1, 2$ следует непосредственно из применения формулы Грина к областям на рис. 2.

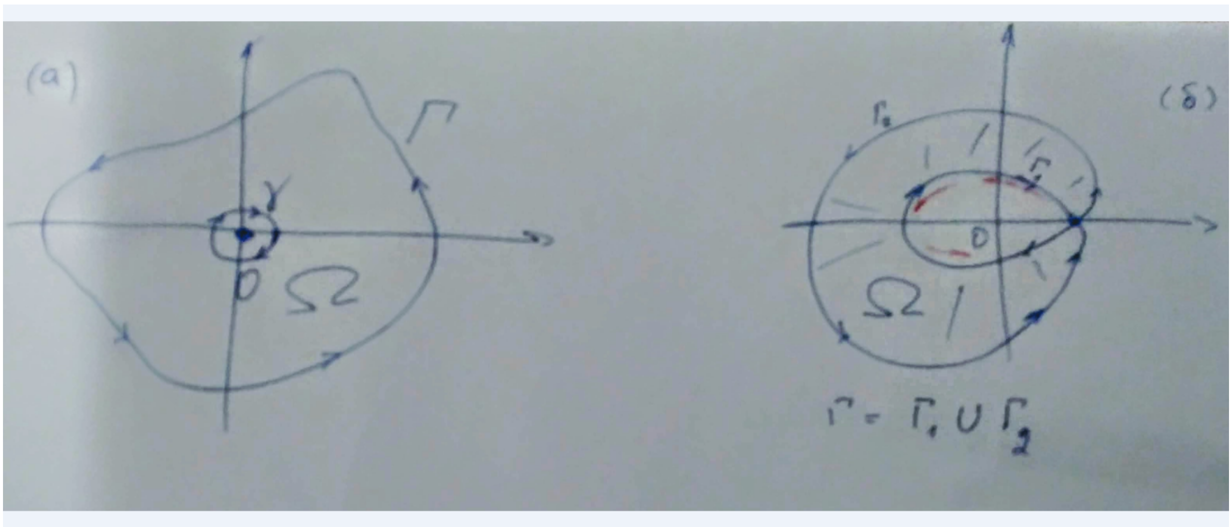

Рис. 2: (а) – кривая обходит начало координат 1 раз, (б) – 2 раза. Красным показана ориентация Γ_1 как дуги цепи Γ. Синие стрелки показывают ориентацию границы. γ – окружность достаточно малого радиуса.

Схема доказательства формулы Грина. Пусть Ω имеем вид криволинейной трапеции. Тогда формула Грина доказывается переходом к повторным интегралам. Разрежем область на криволинейные трапеции как показано на рис. 3. Интеграл по области будет суммой интегралов по этим криволинейным трапециям. Вклады от дуг, помеченных красным, сократятся, так как эти дуги несут пары противоположных ориентаций.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область, $P, Q \in\in \mathrm{C}^1(\overline{D})$. Рассмотрим систему уравнений

$$\phi_x = P, \quad \phi_y = Q \text{ в } D. \tag{4}$$

Для существования решений необходимо выполнение условия $P_y = Q_x$, но, вообще говоря, недостаточно. Пример: берем P, Q из примеров 5 - 6, и $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Теорема 2. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область, $P, Q \in \mathrm{C}^1(\overline{D})$. Для существования решения системы (4) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_\gamma P dx + Q dy = 0$$

для любой замкнутой цепи $\gamma \in D$, совпадающей с границей некоторой области Ω. Если это условие выполнено, то решение дает формула

$$\varphi(x, y) = \int_{z_0}^{z} P dx + Q dy, \quad z = (x, y). \tag{5}$$

где интегрирование производится по произвольной цепи, с границей $\{(1, z), (-1, z_0)\}$, $z = (x, y) \in D$, а точка $z_0 = (x_0, y_0) \in D$ выбрана произвольно, (z_0 и z – начало и конец цепи).

◄ Необходимость. Вклад каждой дуги цепи γ в интеграл по γ равен приращению ϕ между началом и концом дуги (примера 4). Вклады от концов смежных дуг сократятся. Необходимость доказана.

Достаточность. Интеграл (5) задает функцию точки z, так как не зависит от выбора цепи, ведущей из

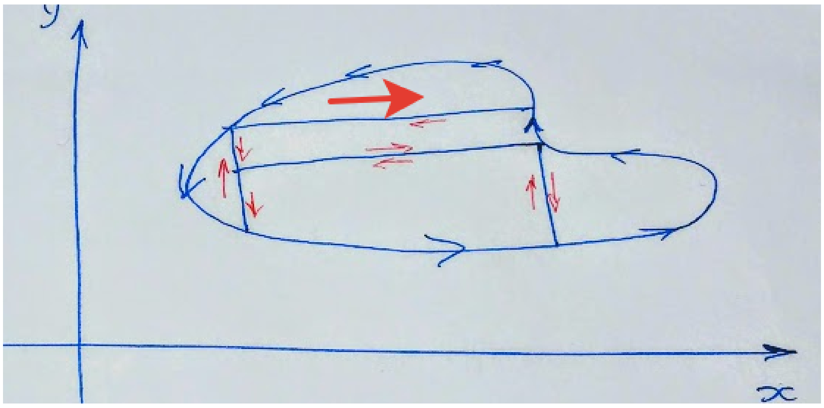

Рис. 3: Разбиение на криволинейные трапеции

z_0 в z. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим две цепи γ и $\widetilde{\gamma}$ с общей границей $\{(1, z), (-1, z_0)\}$, устроим из них замкнутую цепь, как показано на рис. 4, и применим условие теоремы. Проверим, что функция, заданная интегралом (5) – решение системы (4). Пусть $\widetilde{z} = (x + h, y) \in D$, и h мало достаточно для того, чтобы отрезок прямой $z\widetilde{z}$ целиком лежал в D (рис. 5). Из рассмотрения замкнутой цепи $z_0\widetilde{z}zz_0$

(рис. 5) выводим равенство Тогда

$$\phi(x+h,y)-\phi(x,y)=\int_{z}^{\widetilde{z}} Pdx+Qdy=\int_{x}^{x+h} P(\tau,y)d\tau.$$

Делим на h, применяем теорему о среднем, стремим $h\to+0$ и находим первое из равенств (4). Второе из них проверяем аналогично первому.▶

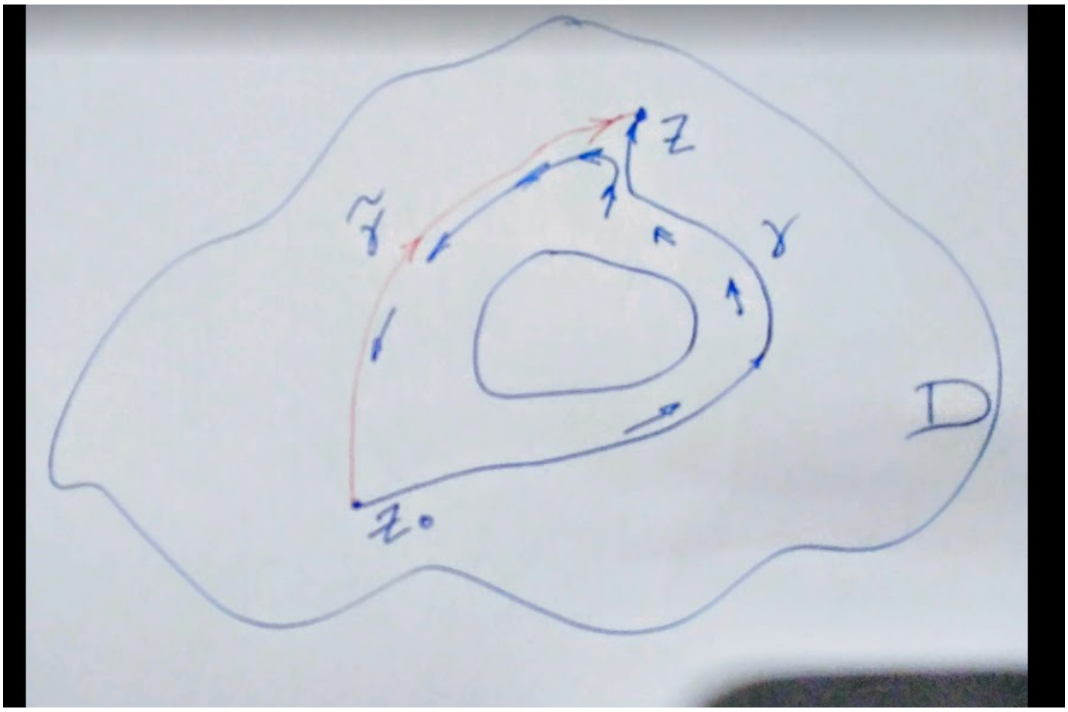

Рис. 4: Два пути из z_0 в z. Синие стрелки указывают общую ориентацию на склеенной из них цепи

Определение 9. Область D называется односвязной, если из того, что замкнутая цепь $\gamma\in D$ есть граница области Ω, следует, что $\Omega\subset D$.

Пример 7. Кольцо и плоскость с выколотой точкой неодносвязны. Круг односвязен.

Следствие 1. Для существования решения системы (4) в односвязной области D необходимо и достаточно условие $P_y=Q_x$.

◀ Ввиду односвязности и в силу формулы Грина, из условия $P_y=Q_x$ следует условие теоремы 2. ▶

2. Обобщённые решения законов сохранения и формула Грина.

Рассмотрим закон сохранения

$$(\psi(u,x,t))_t+(\varphi(u,x,t))_x=f(x,u,t), \tag{6}$$

где ψ,φ,f – выражены явно, а $u=u(x,t)$, – произвольная функция.

В определении обобщённого решения не обязательно брать прямоугольную пробную область, как это делалось в лекции 9.

Определение 10. Кусочно-C^1-гладкую функцию u назовём обобщённым решением квазилинейного уравнения в форме закона сохранения (6), если

$$\int_{\gamma}\varphi(u,x,t)dt-\psi(u,x,t)dx=\int_{\Omega}f(u,x,t)\,dxdt,\ \gamma=\partial\Omega, \tag{7}$$

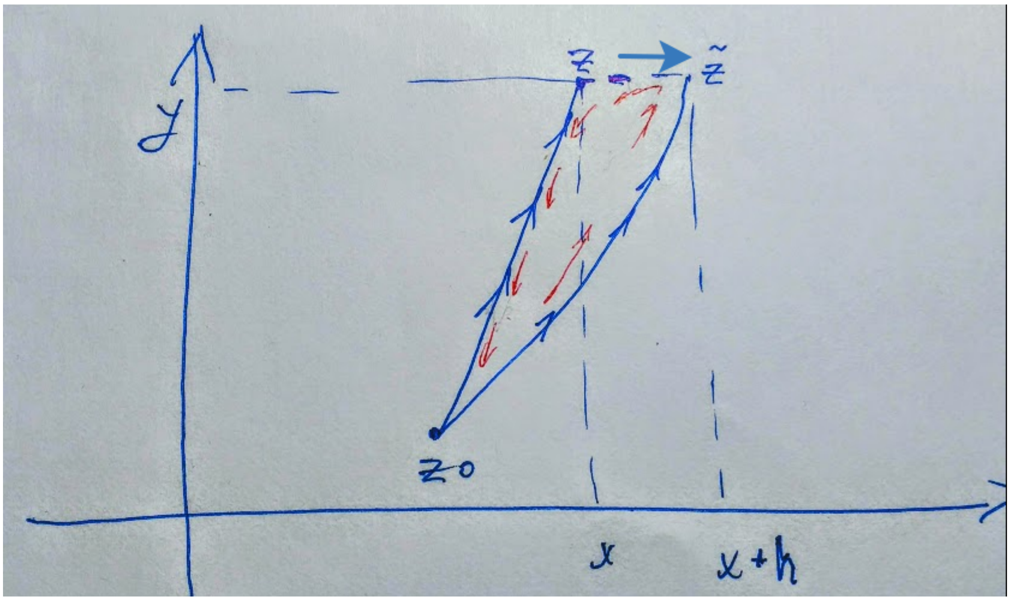

Рис. 5: Цепь $z_0\tilde{z}zz_0$. Её ориентация показана красными стрелками.

для любой ограниченной области Ω, граница которой – цепь γ, где в криволинейный интеграл подставляются предельные значения u при стремлении точки области Ω к точке границы γ.

Из формулы Грина вытекает, что любое классическое решение будет и обобщённым в смысле определения 10.

Выведем условия Гюгонио на сильном разрыве из определения обобщённого решения (определение 10). Пусть линия разрыва задана уравнением $x = \xi(t)$; выберем на ней точку $z_0 = (x_0, t_0)$, $x_0 = \xi(t_0)$. Выберем круг B_δ малого радиуса δ с центром в точке z_0. Линия разрыва разобьёт круг на области Ω_1 и Ω_2 с границами γ_1, γ_2, включающими общую дугу γ, лежащую на линии разрыва (рис. 6). По определению 10, имеют место тождества

$$\int\limits_{\partial B_\delta} \varphi(u,x,t)dt - \psi(u,x,t)dx =$$

$$\int\limits_{B_\delta} f(u,x,t)\,dxdt = \int\limits_{\Omega_1} f(u,x,t)\,dxdt + \int\limits_{\Omega_2} f(u,x,t)\,dxdt = \left(\int\limits_{\gamma_1} + \int\limits_{\gamma_1}\right)(\varphi(u,x,t)dt - \psi(u,x,t)dx) \implies$$

$$0 = \int\limits_{\gamma} [\varphi]_{x=\xi(t)}dt - [\psi]_{x=\xi(t)}dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left([\varphi]_{x=\xi(t)}dt - [\psi]_{x=\xi(t)}\dot{\xi}(t)\right),$$

$t_2 - t_1 = \tau < 2\delta$. Устремим $\delta \to +0$, поделим последнее тождество на τ, применим теорему о среднем и придём к условиям Гюгонио

$$\mathcal{D} = \frac{[\varphi]_{x=\xi(t)}}{[\psi]_{x=\xi(t)}},\ D = \dot{\xi}.$$

Для систем законов сохранения условия Гюгонио имеют тот же вид, но с векторными функциями ϕ, ψ.

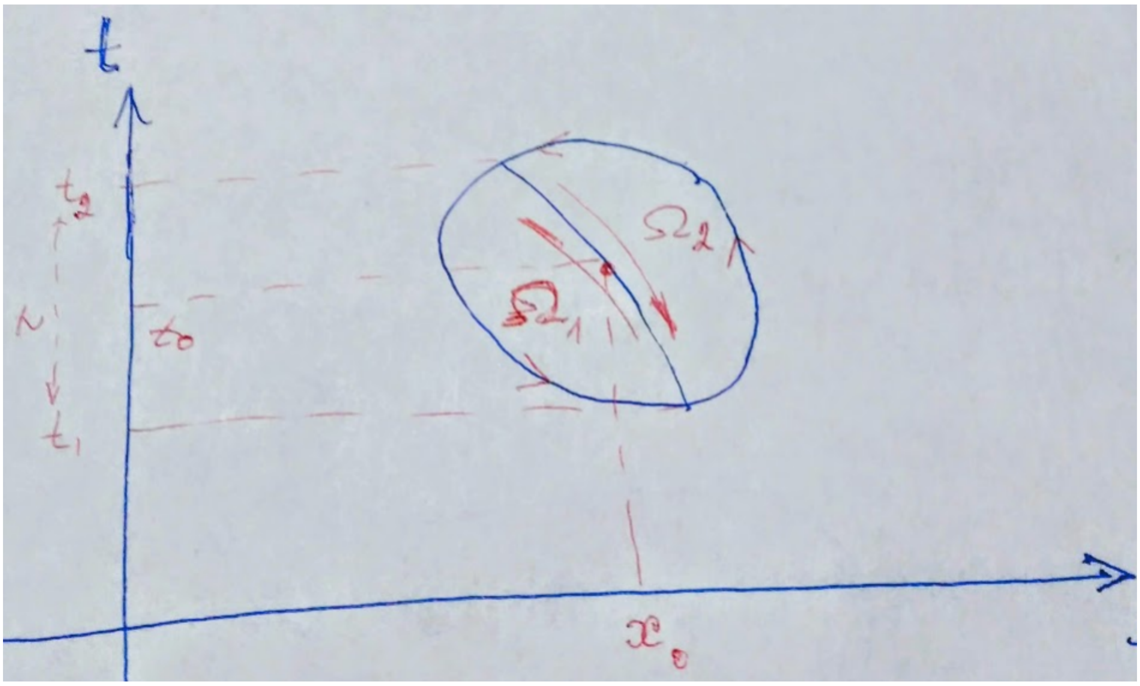

Рис. 6: Окрестность точки линии разрыва. Красные стрелки – ориентация границ областей Ω_1, Ω_2