В этой записке приведены решения нескольких простых конкретных задач Римана о распаде разрывов. Теоретические основы разбора примеров, в частности, вывод используемых при этом формул, см. в лекциях 6,7,8,9 и 10, и в следующих источниках:
(i) М.Ю. Жуков «Квазилинейные гиперболические уравнения» (учебное-методическое пособие), https://docplayer.ru/55665464-Kvazilineynye-giperbolicheskie-uravneniya.html.
(ii) Б.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко и др. «Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике», гл. 2, § 2, п. 3,5; гл. 4, § 1, пп.1-3.
(iii) Горицкий А.Ю., Кружков С.Н. и др. Уравнения с частными производными первого порядка. М.:1999, 96 стр.

1. Постановка задачи. Рассмотрим гиперболическую систему двух законов сохранения

$$(\psi_1(u,v))_t + (\varphi_1(u,v))_x = 0; \quad (\psi_2(u,v))_t + (\varphi_2(u,v))_x = 0; \tag{1}$$

Предполагаем, что система (1), в той области плоскости (u,v), где она рассматривается, может быть записана в нормальной форме

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \mathrm{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x, \qquad \mathrm{A} = \mathrm{A}(u,v) \text{– } (2\times 2) \text{ – матрица.} \tag{2}$$

Гиперболичность означает, что собственные значения $\lambda_1 = \lambda_1(u,v), \lambda_2 = \lambda_2(u,v)$ матрицы А – вещественные гладкие функции (u,v) в той области плоскости, где рассматривается система (1). Ограничиваемся случаем строго различных собственных значений, и упорядочиваем их так, что

$$\lambda_1(u,v) < \lambda_2(u,v) \ \forall \ (u,v). \tag{3}$$

Если значения неизвестных функций заданы, каждое собственное значение матрицы нормальной формы гиперболической системы определяет поле направлений на плоскости (x,t), которое называется характеристическим, а его интегральные кривые – характеристиками этой системы. В нашем случае характеристики – прямые, причём через каждую точку (x_0,t_0) проходит две характеристики

$$x - x_0 = \lambda_i(u,v)(t-t_0), \ i = 1,2. \tag{4}$$

Снабдим систему законов сохранения (1) начальным условием

$$u|_{t=0} = \begin{cases} u^+, \ x>0, \\ u^-, \ x<0; \end{cases} \qquad v|_{t=0} = \begin{cases} v^+, \ x>0, \\ v^-, \ x<0; \end{cases} \tag{5}$$

где $v^\pm$, $v^\pm$ – произвольные вещественные постоянные. Поставленная задача – простейший вариант задачи Римана о распаде разрыва. Существенно, что решение задачи Римана рассматривается в одной полуплоскости. Примем, что это полуплоскость $t>0$.

2. Обобщённые автомодельные решения с сильным разрывом Поскольку начальные данные разрывны, естественно ставить вопрос об обобщённом решении задачи (1),(5). Поскольку задача скейлинг-инвариантна (т.е. инвариантна относительно преобразования $(x,t)\mapsto(kx,kt)$, $k>0$), ищем автомодельное обощённое решение. Простейшее из таких решений кусочно-постоянно:

$$u = \begin{cases} u^+, \ x>Dt, \\ u^-, \ x<Dt; \end{cases} \qquad v = \begin{cases} v^+, \ x>Dt, \\ v^-, \ x<Dt; \end{cases} \tag{6}$$

Решение вида (6) представляет собой функцию одной переменной $z = x/t$, называемой автомодельной; именно

$$u = \begin{cases} u^+, \; z > D, \\ u^-, \; z < D; \end{cases} \qquad v = \begin{cases} v^+, \; z > D, \\ v^-, \; z < D; \end{cases} \tag{7}$$

Кусочно-постоянное решение (6) терпит разрыв первого рода на линии $x = Dt$. Такой разрыв называют сильным. Величина D называется скоростью разрыва[1].

Далее рассматриваются только кусочно-постоянные решения вида (6). Такие решения будем кратко именовать словом «разрыв».

3. Условия Гюгонио[2]. Вычисление решения (6) состоит в определении скорости разрыва D. Если она известна, то сам разрыв (6) определен однозначно. Чтобы найти скорость разрыва, используют условия Гюгонио. С целью их формулировки, определим скачок $[f]_\xi$ функции $f = f(x,t)$ в точке $(\xi(t), t)$ линии разрыва $\{(\xi(t), t)\}$ (где $\xi = \xi(t)$ – заданная функция), полагая

$$[f]_\xi = \lim_{x \to +\xi(t)+0} f(x,t) - \lim_{x \to \xi(t)-0} f(x,t).$$

Условия Гюгонио записываются так

$$D[\psi_1(u,v)]_\xi = [\varphi_1(u,v)]_\xi; \quad D[\psi_2(u,v)]_\xi = [\varphi_2(u,v)]_\xi; \quad \xi = Dt. \tag{8}$$

Указанные здесь скачки возникают из-за разрыва решения (6) на прямой $x = Dt$, а ψ_i и φ_i считаются гладкими функциями аргументов (u, v). Так как мы рассматриваем кусочно-постоянные решения, скачок функции вдоль линии разрыва постоянен, причём последняя всегда задается уравнением $x = Dt$. Поэтому нижний индекс в обозначении скачка далее опускается.

Условие Гюгонио равносильно линейной зависимости векторов

$$\begin{pmatrix} [\psi_1(u,v)] \\ [\psi_2(u,v)] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} [\varphi_1(u,v)] \\ [\varphi_2(u,v)] \end{pmatrix},$$

что может быть выражено одним уравнением

$$[\psi_1][\varphi_2] - [\psi_2][\varphi_1] = 0. \tag{9}$$

Левая часть равенства (9) однозначно определяется данными Коши (5). Таким образом, при произвольных данных задача Римана (1),(5) не имеет решения вида (6). Вместе с тем, если данные задачи (1),(5) удовлетворяют условию Гюгонио (6), то эта задача имеет сильноразрывное решение вида (6).

Если равенство (9) имеет место, то скорость разрыва определяется любым из двух уравнений (8). Иногда удобно записывать D так:

$$\pm D = \sqrt{\frac{[\varphi_1][\varphi_2]}{[\psi_1][\psi_2]}} \tag{10}$$

4. Условия Лакса. Сильноразрывное решение (6) задачи Римана (1),(5), вообще говоря, неединственно. С ним могут сосуществовать другие решения этой задачи. Условия Лакса[3] позволяют отбрасывать

[1] Проекция на ось Ox точки плоскости (x,t), пробегающей линию разрыва в направлении возрастания времени t, движется со скоростью D.

[2] Известны также, как условия Рэнкина-Гюгонио

[3] П.Д Лакс (P.D. Lax) – выдающийся американский математик, специалист по теории уравнений с частными производными.

лишние сильные разрывы. Разрывы, которые удовлетворяют условию Лакса называют устойчивыми, а все прочие – неустойчивыми. Неустойчивые разрывы игнорируются.

Пусть разрывное решение (6) найдено. Проверка его устойчивости по Лаксу (6) состоит в следующем. Прежде всего, замечаем, что характеристические направления (3) терпят разрыв вместе с решением. Вследствие этого характеристики, проходящие через точку (x_0, t_0) прямой $x = Dt$, образуют ломаные с вершиной (=точкой излома) (x_0, t_0), см. рис. 1. Звено характеристической ломаной, пересекающее начальную кривую (сейчас это ось Ox) назовём приходящим, иначе – уходящим. Выбираем точку на линии разрыва и рассматриваем все характеристические ломаные с вершиной в этой точке. Если среди них есть ровно одна ломаная, оба звена которой приходящие, а все остальные ломаные имеют одно приходящее и одно уходящее звено, то такую точку назовём устойчивой. Разрыв признается устойчивым, если все его точки устойчивы. В противном случае разрыв признаётся неустойчивым.

В случае простейшего разрыва (6) значения решения на берегах разрыва постоянны, и линия разрыва – прямая, поэтому условие Лакса достаточно проверить в одной произвольной точке этой линии, точнее, луча, лежащего в полуплоскости $t > 0$. В случае системы двух законов сохранения, как видно из рис. 1, условие Лакса равносильно выполнению хотя бы одной из двух систем неравенств (здесь существенно упорядочивание (3))

$$\textbf{(1)}\left\{\begin{array}{c} \lambda_1^- > D > \lambda_1^+ \\ D < \lambda_2^+ \end{array}\right. \quad \bigvee \quad \textbf{(2)}\left\{\begin{array}{c} \lambda_2^- > D > \lambda_2^+ \\ D > \lambda_1^- \end{array}\right. , \tag{11}$$

где $\lambda_i^\pm = \lambda_i(u^\pm, v^\pm)$, $i = 1, 2$, причём $\lambda_1^\pm < \lambda_2^\pm$ в соответствии с упорядочиванием (3), а D выражена из условий Гюгонио (8), например, в форме (10). Здесь следует иметь в виду, что условие Лакса подразумевает выполнение условия Гюгонио, поэтому дизъюнкция систем неравенств (11) должна иметь место одновременно с равенством (9), иначе разрыв просто не будет существовать.

Для понимания соответствия неравенств (11) и рис. 1, замечаем, что звенья характеристических ломаных с вершиной в точке (x_0, t_0) имеют уравнение $x - x_0 = \lambda_i^\pm(t - t_0)$, где плюс соответствует звену, лежащему справа от разрыва, а минус – слева. Ориентируем звенья ломаных и линию разрыва в соответствии с возрастанием t. Тогда уменьшение (увеличение) коэффициента при t влечёт поворот звена или линии разрыва против (по) часовой стрелке, причём поворот производится с учётом указанной ориентации на угол меньший π. Можно также сказать, что уменьшение (увеличение) коэффициента при t увеличивает (уменьшает) угол между направлением звена или направлением линии разрыва и направлением оси Ox, где угол отсчитывается против часовой стрелки.

Таким образом, чтобы убедиться в распространении (=существование + устойчивость) разрыва (6) в условиях конкретной задачи Римана (1),(5), нужно написать в явной форме условия Гюгонио (9) и условия Лакса (11), а затем проверить, что данные (5) удовлетворяют этим условиям.

5. Примеры сильных разрывов. Рассмотрим несколько примеров построения и исследования решений (6) конкретных задач Римана (1),(5).

Пример 1. Законы сохранения имеют вид

$$u_t + (v^2/2)_x = 0; \quad v_t + (u^2/2)_x = 0.$$

Данная система записывается в нормальной форме (2) с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & v \\ u & 0 \end{pmatrix}$$

Система гиперболична в области $uv > 0$, при этом характеристические направления имеют вид

$$\lambda_1 = -\sqrt{uv} < \lambda_2 = \sqrt{uv},\ uv > 0.$$

Ограничимся областью $u > 0, v > 0$. Это ограничение имеет смысл, так как существуют решения вида $(u, 0)$ и $(0, v)$. Соответственно, рассматриваем начальный разрыв (5) с $u^{\pm} > 0$, $v^{\pm} > 0$. Записываем условие Гюгонио (9) так:

$$[u^2][u] - [v^2][v] = 0.$$

В этом равенстве разлагаем скачки квадратов на множители, и получаем

$$[u]^2\bar{u} = [v]^2\bar{v}, \quad \text{где } \bar{u} = \frac{u^- + u^+}{2} > 0,\ \bar{v} = \frac{v^- + v^+}{2} > 0.$$

Отсюда можно заключить, что разрыв u влечёт разрыв v и наоборот.

Для определения скорости разрыва применяем равенство (10). Имеем

$$\pm D = \frac{[v^2][u^2]}{4[u][v]} = \sqrt{\bar{u}\bar{v}}.$$

Рассмотрим только случай $D = \sqrt{\bar{u}\bar{v}} > 0$. В этом случае может реализоваться только ветка (2) дизъюнкции (11) (так как $\lambda_1(u, v) < 0$ всюду) и $D > 0$, см. нижний левый рисунок 1). Итак, условие Лакса принимает вид

$$\sqrt{u^+v^+} < D = \sqrt{\bar{u}\bar{v}} < \sqrt{u^-v^-}$$

при одновременном равенстве $[u]^2\bar{u} = [v]^2\bar{v}$. В частном случае $u^{\pm} = v^{\pm}$ разрыв устойчив при $u^+ > u^-$ и неустойчив в противном случае. В случае отрицательной скорости такого разрыва работает другая ветка дизъюнкции.

Пример 2. Простейшая система законов сохранения масс при переносе веществ электрическим полем имеет вид

$$u_t + (u/s)_x = 0; \quad v_t + (v/s)_x = 0, \quad s = u + v + 1.$$

Данная система записывается в нормальной форме (2) с матрицей

$$A = \frac{1}{s^2}\begin{pmatrix} v+1 & -u \\ -v & u+1 \end{pmatrix}$$

Система гиперболична в области $s \neq 0$, при этом характеристические направления имеют вид

$$\lambda_1 = s^{-2}, \quad \lambda_2 = s^{-1},$$

Ограничимся областью $u > 0, v > 0$. Это ограничение имеет смысл, так как существуют решения вида $(u, 0)$ и $(0, v)$. При $u > 0, v > 0$ имеем $s > 1$, и

$$\lambda_1 = s^{-2} < \lambda_2 = s^{-1}.$$

Соответственно, рассматриваем начальный разрыв (5) с $u^{\pm} > 0$, $v^{\pm} > 0$. Записываем условие Гюгонио

$$[v][u/s] - [u][v/s] = 0.$$

Приводим подобные, и преобразуем условие Гюгонио к виду

$$[u+v]\,[v/u]=0.$$

Таким образом, хотя бы одна из величин $r_1=u+v$, $r=u/v$ остаётся непрерывной при переходе через разрыв. Заметим, что вместе с r_1 непрерывна величина $s=r_1+1$. Разберём случай непрерывности s. В таком случае

$$D=\frac{1}{[u]}\left[\frac{u}{s}\right]=1/s=\lambda_2,$$

и этот разрыв неустойчив ввиду очевидного нарушения условия Лакса.

Рассмотрим случай непрерывности r. В этом случае

$$\left[\frac{v}{s}\right]=\frac{v^+s^- - v^-s^+}{s^+s^-}=\frac{[v]+v^+u^- - u^+v^-}{s^+s^-}=\frac{[v]+u^-u^+[r]}{s^+s^-}=\frac{[v]}{s^+s^-},$$

и

$$D=\frac{1}{[v]}\left[\frac{v}{s}\right]=\frac{1}{s^+s^-}=\frac{1}{\lambda_2^+\lambda_2^-}$$

Ветка (1) условия Лакса (11) принимает вид

$$\frac{1}{s^-}>\frac{1}{s^+}$$

(здесь нужно вспомнить, что $v>0, u>0$, а потому $s>1$), что равносильно

$$[s]>0.$$

Ветка (2) условия Лакса (11) заведомо не имеет место при $s>1$. Итак разрыв (6) распространяется (= существует и устойчив) в области $v>0, u>0$ при условии $[r]=0$ и $[s]>0$. Формально, существование разрывного решения имеет место при условии $[r][s]=0$, но при $[s]\le 0$ разрыв неустойчив.

Пример 3. Изотермическая газовая динамика. Это изэнтропический (он же баротропный) газ, с $P(\rho)=c^2\rho$, $c=\mathrm{const}>0$. Запись уравнений газовой динамики в виде законов сохранения такова:

$$(\rho v)_t+(P+\rho v^2)_x=0;\quad \rho_t+(\rho v)_x=0,\ \rho>0.$$

Данная система записывается в нормальной форме (2) с вектором неизвестных (v,ρ) и матрицей

$$A=\begin{pmatrix} v & c^2/\rho \\ \rho & v \end{pmatrix}$$

Система гиперболична во всей области $\rho>0$, при этом характеристические направления имеют вид

$$\lambda_1=v-c<\lambda_2=v+c,$$

Рассматриваем начальный разрыв

$$\rho|_{t=0}=\begin{cases}\rho^+,\ x>0,\\ \rho-,\ x<0;\end{cases}\qquad v|_{t=0}=\begin{cases}v^+,\ x>0,\\ v^-,\ x<0;\end{cases}.$$

Записываем условие Гюгонио в виде (см. лекцию 9)

$$\rho^+\rho^-[v]^2=c^2[\rho]^2.$$

Отсюда вытекает, что скачок плотности без скачка скорости невозможен (обратное также верно). При выполнении условий Гюгонио,

$$D = \frac{[\rho v]}{[\rho]} = \frac{c^2[\rho] + [\rho v^2]}{[\rho v]} = \pm\sqrt{c^2 + \frac{[\rho v^2]}{[\rho]}}$$

С целью упрощения выкладок, полагаем $\rho^- = 1$, $\rho^+ = \sigma^2 \neq 1$, $\sigma > 0$, и $v^+ = \nu$, $v^- = 0$. При этом условие Гюгонио и выражение скорости разрыва примут вид:

$$\sigma^2\nu^2 = c^2(\sigma^2 - 1)^2,\ D = \frac{\sigma^2\nu}{\sigma^2 - 1}$$

Первая ветка условия Лакса приводит к неравенствам

$$-1 > \frac{D}{c} > \frac{\nu}{c} - 1, \quad \frac{D}{c} < 1 + \frac{\nu}{c}.$$

Отсюда сразу видно, что распространение разрыва возможно лишь при $\nu < 0$, $D < 0$. Записываем эту систему явно, выражая c, D в силу условий Гюгонио, и, в конечном счёте, приходим к неравенствам

$$\nu < 0,\ \sigma > 1.$$

При этом

$$\frac{D}{c} = -\sigma < -1$$

Таким образом, первая ветка условия Лакса приводит к разрыву, который со сверхзвуковой скоростью двигается в сторону более разреженного газа, причём более плотный газ двигается в том же направлении, что и разрыв, а более разреженный газ покоится.

Вторая ветка условия Лакса дает неравенства

$$1 > \frac{D}{c} > \frac{\nu}{c} + 1, \quad \frac{D}{c} > -1,$$

что равносильно

$$\nu < 0,\ \sigma < 1.$$

При этом

$$\frac{D}{c} = \sigma < 1$$

Таким образом, вторая ветка условия Лакса приводит к разрыву, который с дозвуковой скоростью двигается в сторону более разреженного газа, причём более разреженный газ движется навстречу разрыву, а более плотный газ покоится.

Полученные результаты можно истолковать как описание явлений, возможно, возникающих при столкновении более плотного газа с покоящимся разреженным газом, или при столкновении разреженного газа с покоящимся более плотным газом. Наши решения в первом случае описывают вытеснение покоящегося разреженного газа фронтом движущегося плотного газа со сверхзвуковой скоростью; а во втором – вытеснение движущего разреженного газа покоящимся плотным газом с дозвуковой скоростью.

6. Слаборазрывные автомодельные решения задачи Римана. При определённых условиях задача Римана (1),(5) может иметь непрерывное решение вида

$$u = \begin{cases} u^+,\ x > z^+t, \\ u^-,\ x < z^-t, \\ U(x/t),\ z^- < x/t < z^+; \end{cases},\ U(z^\pm) = u^\pm; \quad v = \begin{cases} v^+,\ x > z^+t, \\ v^-,\ x < z^-t, \\ V(x/t),\ z^- < x/t < z^+; \end{cases},\ V(z^\pm) = v^\pm; \tag{12}$$

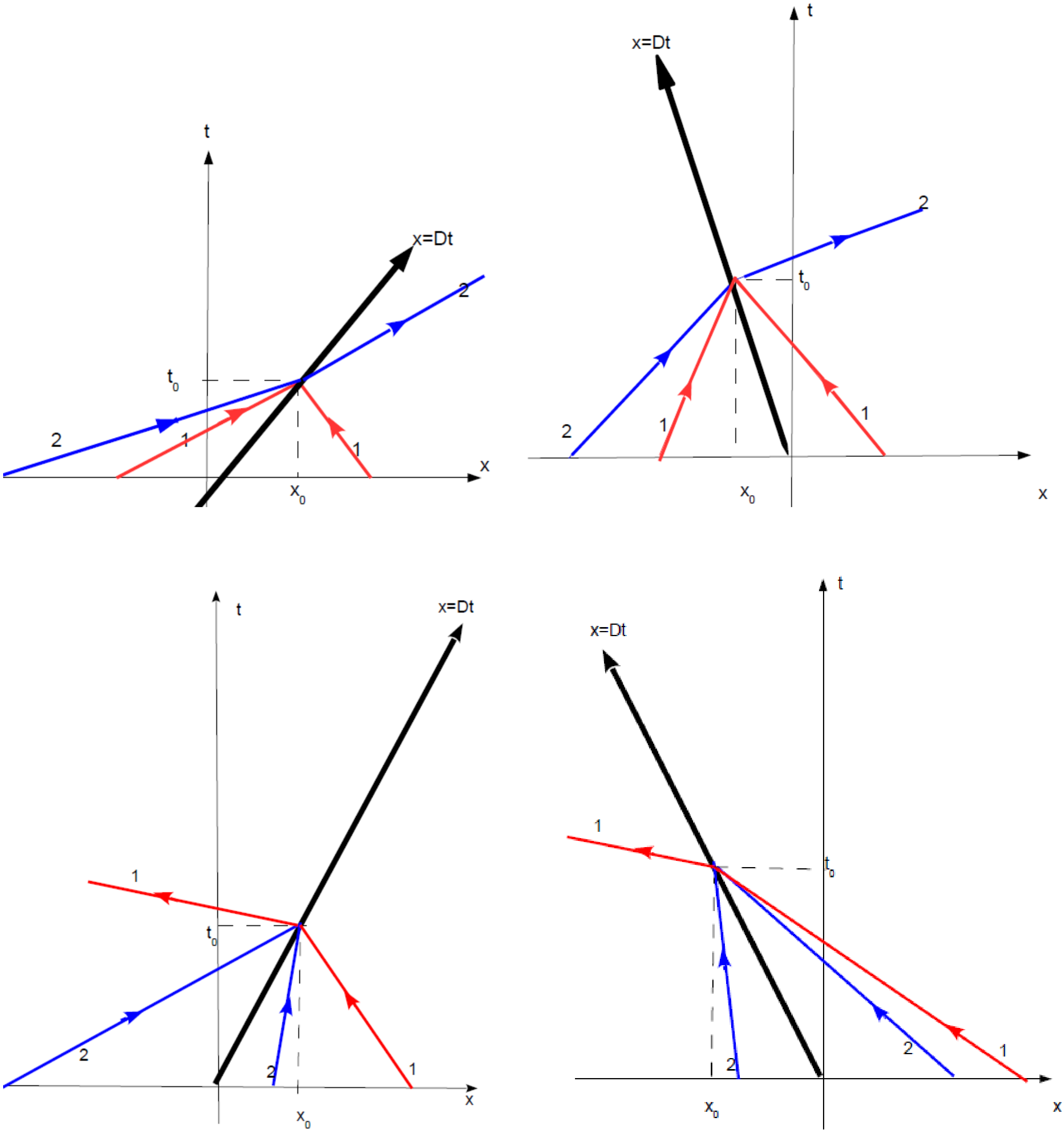

Рис. 1: Характеристические ломаные на устойчивом разрыве (жирная чёрная линия). Красным и цифрой 1 отмечены ломаные семейства λ_1, синим и цифрой 2 – семейства λ_2, причём $\lambda_1 < \lambda_2$. Верхняя пара рисунков соответствует тому, что два приходящих звена имеет ломаная семейства λ_1, что равносильно выполнению системы (1) из (11), нижняя пара рисунков соответствует тому, что два приходящих звена имеет ломаная семейства λ_2, что равносильно выполнению системы (2) из (11); левая пара рисунков соответствует $D > 0$, правая – $D < 0$

где $U = U(z)$, $V = V(z)$ гладкие функции $z = x/t$, $t > 0$. Значения $z^{\pm}$ заранее неизвестны, и должны быть определены при построении решения. Решение (19) автомодельно, и, по определению, непрерывно. Тем не менее, его следует понимать как обобщённое, поскольку его первые производные терпят разрывы на лучах $x = z^{\pm}t$. Такие разрывы называют слабыми. Далее мы позволим себе называть слабым разрывом само решение (19).

Подчеркнём, что конкретная задача Римана не обязана иметь решение (19). Другими словами, заданный изначально разрыв может, но не обязан распространяться как слабый.

7. Слабые разрывы волн Римана. Проще всего строить слабые разрывы в инвариантах Римана. О них см. в лекции 7. Известно, что любая гиперболическая система двух уравнений приводится к инвариантам Римана[4]. В частности, система вида (1) может быть некоторой подстановкой приведена к виду

$$s_t + \lambda_1 s_x = 0, \quad r_t + \lambda_2 r_x = 0, \quad r = r(u,v),\ s = s(u,v). \tag{13}$$

Коэффициенты λ_i, $i = 1,2$ системы (13) не что иное, как собственные числа $\lambda_i = \lambda_i(u,v)$ матрицы A нормальной формы (2), выраженные через r, s обратной подстановкой $u = u(r,s)$, $v = v(r,s)$. Напомним, что $\lambda_1(u,v) < \lambda_2(u,v)$ по соглашению об упорядочивании (3).

Волна Римана – это такое частное решение, что все инварианты Римана, кроме одного, постоянны. В нашем случае есть всего две возможности: или постоянен инвариант r (s-волна), или постоянен инвариант r (r-волна). Гладкие волны Римана автомодельны, и неявно заданы уравнениями

$$r - \text{волна}:\ s = s_0 = \text{const},\ \lambda_2(r,s_0) = z, \quad s - \text{волна}:\ r = r_0 = \text{const},\ \lambda_1(r_0,s) = z,\ z = x/t. \tag{14}$$

(эти уравнения могут и не иметь решения, например, при $\lambda_i = \text{const}$).

Схема построения простейшего слабого разрыва волны Римана такова: полагаем

$$r^{\pm} = r(u^{\pm}, v^{\pm}), \quad s^{\pm} = s(u^{\pm}, v^{\pm}). \tag{15}$$

Пусть имеет места система равенств и неравенств

$$r^{+} = r^{-} = r_0,\ \lambda_1(s^{+}, r_0) > \lambda_1(s^{-}, r_0), \tag{16}$$

и уравнение $\lambda_1(s, r_0) = z$ имеет гладкое решение $s = S(z)$ в интервале (z^-, z^+), где $z^{\pm} \overset{\text{def}}{=} \lambda_1(s^{\pm}, r_0)$, причём $\lim_{z\to z^{\pm}\mp 0} S(z) = r^{\pm}$. Тогда существует слаборазрывная s-волна вида

$$r = r_0 = \text{const}; \quad s = \begin{cases} s^{+},\ x > z^{+}t, \\ s^{-},\ x < z^{-}t, \\ S(x/t),\ z^{-} < x/t < z^{+}; \end{cases}, \quad z = \lambda_1(S, r_0), \tag{17}$$

где функция $S = S(z)$ неявно задана последним равенством. Если же

$$s^{+} = s^{-} = s_0,\ \lambda_2(s_0, r^{+}) > \lambda_2(s_0, r^{-}), \tag{18}$$

и уравнение $\lambda_2(s_0, r) = z$ имеет гладкое решение $r = R(z)$ в интервале (z^-, z^+), где $z^{\pm} \overset{\text{def}}{=} \lambda_2(s_0, r^{\pm})$, причём $\lim_{z\to z^{\pm}\mp 0} R(z) = r^{\pm}$, то существует слаборазрывная r-волна вида

$$r = r_0 = \text{const}; \quad s = \begin{cases} r^{+},\ x > z^{+}t, \\ r^{-},\ x < z^{-}t, \\ R(x/t),\ z^{-} < x/t < z^{+}; \end{cases}, \quad z = \lambda_2(R, r_0), \tag{19}$$

[4]Для систем трёх и более уравнений это не так

где функция $R = R(z)$ неявно задана последним равенством.

8. Примеры слабых разрывов. Рассмотрим несколько примеров построения решений (19) конкретных задач Римана (1),(5).

Пример 4. Строим слабый разрыв в условиях примера 1. Находим инварианты Римана. Имеем систему в нормальной форме (2) с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & v \\ u & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = -\sqrt{uv} < \lambda_2 = \sqrt{uv},\ uv > 0.$$

Находим левые собственные векторы (=собственные векторы матрицы A*):

$$(\mathrm{A}^* - \lambda_i E)\ell_i = 0,\ i = 1, 2,\ \ell_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{u} \\ -\sqrt{v} \end{pmatrix},\ \ell_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{u} \\ \sqrt{v} \end{pmatrix}$$

Угадываем:

$$3\ell_1/2 = \nabla(u^{3/2} - v^{3/2}), \quad 3\ell_2/2 = \nabla(u^{3/2} + v^{3/2}),$$

где частные производные берутся по координатам u, v. Отсюда

$$s = u^{3/2} - v^{3/2}, \quad r = u^{3/2} + v^{3/2},\ \lambda_i = (-1)^i \sqrt[3]{\frac{r^2 - s^2}{4}}$$

Снова предположим, что $u^\pm = v^\pm$. Тогда $s^+ = s^- = 0$, то есть, в этом частном случае слабый разрыв может распространяться только как r-волна при $s = 0$. Тогда $u = v$, а потому $\lambda_2(r, 0) = u$ и условие

$$z^+ > z^-,\ \text{где } z^\pm = \lambda_2(r^\pm, 0).$$

сводится к неравенству

$$u^+ > u^-.$$

Заметим, что при выполнении этого неравенства сильный разрыв неустойчив (см. пример 1). Итак, в рассматриваемом частном случае $u^\pm = v^\pm$ слабый разрыв распространяется лишь при условии $u^+ > u^-$. Слаборазрывное решение выглядит так

$$s = 0, r = u = v = \begin{cases} u^+,\ x > u^+t, \\ u^-,\ x < u^-t, \\ x/t,\ u^- < x/t < u^+; \end{cases},$$

Заметим, что уравнение $r_t + \lambda_2(r, 0)r_x = 0$ эквивалентно уравнению Хопфа $u_t + uu_x = 0$ (с учётом равенства $r = 2u^{3/2}$, имеющего место при $s = 0$).

Пример 5. Строим слабый разрыв в условиях примера 2. Находим инварианты Римана. Имеем систему в нормальной форме (2) с матрицей

$$A = \frac{1}{s^2}\begin{pmatrix} v+1 & -u \\ -v & u+1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = s^{-2}, \quad \lambda_2 = s^{-1},\ s = u + v + 1,\ u > 0, v > 0.$$

Находим левые собственные векторы $(\mathrm{A}^* - \lambda_i E)\ell_i = 0,\ i = 1, 2$, (=собственные векторы матрицы A^*), и убеждаемся, что найдутся, если нужно,интегрирующие множители $\mu_i = \mu_i(u, v)$, такие, что

$$\mu_1\ell_1 = \nabla(u + v), \quad \mu_2\ell_2 = \nabla(v/u),$$

где частные производные берутся по координатам u, v. За инварианты Римана принимаем

$$s = u + v + 1, \quad r = v/u,$$

при этом

$$\lambda_1 = 1/s^2, \quad \lambda_2 = 1/s.$$

Заметим, что r-волны в данном случае не существуют, так как уравнение $\lambda_2 = z$ при $s = \mathrm{const}$ не определяет неявной функции $R(z)$.

Обратимся к s-волнам. Тогда

$$z^\pm = \frac{1}{s^\pm};$$

и необходимо выполнение равенств и неравенств

$$s^+ < s^-,\ r^+ = r^-;$$

что эквивалентно

$$u^+ < u^-,\ v^\pm = r_0 u^\pm.$$

Заметим, что при выполнении этого неравенства сильный разрыв неустойчив (см. пример 2). Слаборазрывное решение выглядит так

$$v = r_0 u, \quad u = \begin{cases} u^+,\ x/t > 1 + (1 + r_0)u^+, \\ u^-,\ x/t < 1 + (1 + r_0)u^-, \\ \frac{\frac{x}{t} - 1}{1 + r_0},\ 1 + (1 + r_0)u^- < x/t < 1 + (1 + r_0)u^+; \end{cases}$$

Заметим, что при $s^+ = s^-$ сильный разрыва неустойчив, а слабый не существует. Поэтому распад такого начального разрыва не может быть описан только простыми волнами вида (6) и (19).

Пример 6. Строим слабый разрыв в условиях примера 3. Инварианты Римана в этом случае

$$r = v + c \ln \rho,\ s = v - c \ln \rho,\ c = \mathrm{const} > 0$$

(см. лекцию 7), и

$$\lambda_1 = v - c, \quad \lambda_2 = v + c.$$

Как и в примере 3, полагаем $\rho^- = 1$, $\rho^+ = \sigma^2 \neq 1$, $\sigma > 0$, и $v^+ = \nu$, $v^- = 0$. Тогда $r^- = s^- = 0$. Поэтому для существования слаборазрывных волн Римана необходимо равенство

$$c^2 \ln^2 \sigma^2 = \nu^2.$$

Отметим, что данное равенство несовместно с условием Гюгонио (применительно к рассматриваемому случаю оно записано в примере 3). В самом деле, условие их совместности выглядит так:

$$\sigma^2 \ln^2(\sigma^2) = (\sigma - 1)^2,\ \sigma > 0,\ \sigma \neq 1,$$

что не имеет места.

Рассмотрим только $r-$волну. В таком случае $s = s^- = 0$ всюду, так что $v = c\ln\rho$, $\lambda_2 = c\ln(\rho\mathrm{e})$. Отсюда

$$z^+ = c\ln(\sigma^2\mathrm{e}),\ z^- = c.$$

Итак, при выполнении условий

$$c^2\ln^2\sigma^2 = \nu^2, \quad \sigma^2 > 1$$

имеется слаборазрывная $r-$волна вида

$$v = c\ln\rho, \quad \rho = \begin{cases} \sigma^2,\ x/ct > \ln(\sigma^2\mathrm{e}), \\ 1,\ x/ct < 1, \\ \mathrm{e}^{\frac{x}{ct}-1},\ 1 < x/ct < \ln(\sigma^2\mathrm{e}); \end{cases}$$

Найденная волна описывает разрежение «ядра» газа, двигающегося со скоростью $\nu = c\ln\sigma > 0$: при фикисрованном t «ядро» располагается правее точки $x = ct\ln(\sigma^2\mathrm{e})$, левее этой точки располагается «шлейф», который простирается до точки $x = ct$; левее последней газ покоится и его плотность постоянна и минимальна. Внутри «шлейфа» газ постепенно разреживается и тормозится. Сам шлейф со временем растягивается.