УМФ
Лекция 1
2-й семестр – весна 2019 г
Уравнение Лапласа с двумя независимыми переменными. Формулы Пуассона. Конформные отображения. Функция Грина

Моргулис Андрей Борисович
КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

16 марта 2019 г.

Комплексная формула Даламбера и уравнение Лапласа

Рассмотрим теперь систему Коши-Римана

$$u_x = v_y; \quad u_y = -v_x$$

Дифференцирование уравнений системы дает уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Определение 1. Дифференциальное выражение $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x^2 + \partial_y^2$ называется *оператором Лапласа.*

Определение 2. Уравнение $\Delta u = 0$ называется *уравнением Лапласа.*

Определение 3. Решение уравнения Лапласа, определённое в области D называется *гармонической* функцией в области D.

Замечание. Решение понимается в классическом смысле, как функция класса $\mathrm{C}^2(D)$, обнуляющая оператор Лапласа всюду в D.

Введём координаты

$$z = x + iy; \quad z^* = x - iy; \quad 2x = z - z^*; \; 2iy = z - z^*;$$

$$\partial_x = (\partial_z + \partial_{z^*}); \quad \partial_y = i(\partial_z - \partial_{z^*});$$

Гармонические и аналитические функции

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = (\partial_z + \partial_{z^*})^2 + i^2(\partial_z - \partial_{z^*})^2 = 4\partial^2_{zz*};$$

Итак,

$$\Delta = 4\partial^2_{zz*};$$

имеет место *комплексный аналог формулы Даламбера:* общее решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ имеет вид

$$u = f(z) + g(z^*),$$

где f и g – *аналитические (комплексно)* функции. В частности, если f – аналитическая в области D функция, то $u = \mathrm{Re}\, f,\ v = \mathrm{Im}\, f$ – гармонические функции.

Определение. Гармоническая в области D функция v назывется *сопряжённой* к гармонической в области D функции u, если $f = u + iv$ – аналитическая в D функция комплексной переменной $z = x + iy$.

Теорема. Гармонические функции u и v сопряжены в D $\Leftrightarrow$ пара (u, v) решение системы Коши-Римана.

◀ Пусть u и v сопряжены. Тогда

$$0 = \partial_{z^*}(u + iv) = \frac{(\partial_x + i\partial_y)(u + iv)}{2} = \frac{1}{2}\left((u_x - v_y) + i(u_y + v_x)\right)$$

Сопряжённые гармонические функции

$$\Longrightarrow u_x - v_y = 0 \quad u_y + v_x = 0. \quad \blacktriangleright$$

Теорема. Пусть D односвязная область, и u – гармоническая в D функция. Тогда сопряжённую функцию даёт формула

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} u_x dy - u_y dx,$$

где значение интеграла не зависит от пути из (x_0, y_0) в (x, y).
◀ Пусть γ – замкнутый контур, образованный путем γ_1 из (x_0, y_0) в (x, y) и путём $-\gamma_2$ из (x, y) в (x_0, y_0). По формуле Грина,

$$\oint\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Omega} Q_x - P_y dxdy \Longrightarrow$$

$$\oint\limits_{\gamma} u_x dy - u_y dx = \int\limits_{\Omega} \Delta u dxdy = 0.$$

Поэтому v определена корректно.

Граничные условия для сопряжённой функции

Проверим выполнение системы Коши-Римана.

$$v(x+h,y)-v(x,y)=\left(\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x+h,y)}-\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\right)u_x\,dy-u_y\,dx=\int\limits_{(x,y)}^{(x+h,y)}u_x\,dy-u_y\,dx=-\int\limits_{x}^{x+h}u_y(s,y)ds$$

$$v_x(x,y)=\lim_{h\to+0}\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h}=-\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h}u_y(s,y)ds=-u_y(x,y).$$

Мы получили одно из уравнений системы Коши-Римана. Второе уравнение выводится аналогично. ▶

Замечание. Доказанная формула определяет сопряжённую г.ф. с точностью до аддитивной постоянной (в силу произвола в выборе отсчётной точки (x_0,y_0)). Указанная неединственность естественна, так как система Коши-Римана содержит только производные зависимых переменных.

Пусть D – область и $S=\partial D$ – кусочно-гладкий контур. Пусть $S_0\subset S$ – гладкая дуга. Параметризация этой определяет Направление касательной в каждой точке дуги $z=(x,y)\in\gamma$ определяет вектор $(x'(\sigma),y'(\sigma))$, полученный дифференцированием параметризации $\sigma\mapsto(x(\sigma),y(\sigma))$ данной дуги. Направление нормали задает вектор $(-y'(\sigma),x'(\sigma))$.

Нормальная и касательная производные

Определение 4. Функция u имеет производную по направлению нормали (нормальную производную) в точке $z_0 = (x_0, y_0) \in S$, если существует предел

$$\lim_{\delta \to +0} \frac{u(z_0) - u(z_0 - \delta \mathbf{n}(z_0))}{\delta},$$

где $\mathbf{n}(z_0)$ – орт направления нормали в точке z_0. По умолчанию, этот орт направлен во внешность области. Указанный предел называется производной по направлению нормали (нормальной производной) функции u в точке $z_0 = (x_0, y_0) \in S$ и обозначается

$$\frac{du}{dn}(z_0)$$

Если $u \in \mathrm{C}^1(\bar{D})$, то

$$\frac{du}{dn}(z_0) = u_x(z_0) n_x(z_0) + u_y(z_0) n_y(z_0).$$

Пусть $x = X(\sigma),\ y = Y(\sigma)$ – натуральная параметризация, так что орт касательной к $S_0 \subset S$ имеет вид

$$\tau_x = X'(\sigma),\ \tau_y = Y'(\sigma); \quad \mathbf{n} = (n_x, n_y) = (\tau_y, -\tau_x),$$

и $u \in \mathrm{C}^1(\bar{D})$,

Граничные условия для сопряжённой функции

тогда

$$\frac{du(X(\sigma),Y(\sigma))}{d\sigma} = u_x\tau_x + u_y\tau_y\big|_{x=X(\sigma),y=Y(\sigma)}.$$

Указанное выражение, вычисленное в точке $z_0 = (X(\sigma_0), Y(\sigma_0))$, естественно назвать касательной производной и обозначить

$$\frac{du}{d\tau}(z_0).$$

Теорема. Пусть $u \in \mathrm{C}^1(\bar{D})$ – г.ф. в, и v – сопряжённая гармоническая функция. Пусть $S = \partial D$ – кусочно-гладкий контур, и $u = \varphi$ на некоторой гладкой дуге $S_0 \subset S$. Тогда $dv/dn = -d\varphi/d\tau$, где $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$ – орт касательной к S_0, ориентированный так, что пара $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$ образует правый базис.

◀ Пусть $x = X(\sigma),\ y = Y(\sigma)$ – натуральная параметризация S_0. Тогда

$$\tau_x = X'(\sigma),\ \tau_y = Y'(\sigma); \quad \mathbf{n} = (n_x, n_y) = (\tau_y, -\tau_x)$$

Имеем $(u-\varphi)(X(\sigma), Y(\sigma)) = 0\ \forall\ \sigma$. Дифференцируем это равенство. Находим

$$d\varphi/d\tau = \tau_x\varphi_x(X,Y) + \tau_y\varphi_y(X,Y) = \tau_x u_x(X,Y) + \tau_y u_y(X,Y) = \tau_x v_y - \tau_y v_x =$$

$$= -n_y v_y - n_x v_x.$$

Задачи Дирихле и Неймана.

Замечание. Функция, описывающая распределение значений нормальной производной не может быть произвольна:

$$dv/dn = \psi \implies \psi = -d\varphi/d\tau \implies \int_S \psi ds = 0.$$

Задача Дирихле aka задача первого рода, первая краевая задача: определить функцию, гармоническую в заданной области, по её значениям на границе этой области;

$$\Delta u = 0,\ x \in D,\ u - \varphi|_S = 0,\ S = \partial D. \tag{D}$$

Задача Неймана aka задача второго рода, вторая краевая задача: определить функцию, гармоническую в заданной области, по значениям её нормальной производной на границе этой области;

$$\Delta u = 0,\ x \in D,\ \left.\frac{d(u-\varphi)}{dn}\right|_S = 0,\ S = \partial D. \tag{N}$$

Задача Дирихле в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$ при любых граничных данных (т.е.$\forall\, \varphi$) имеет ровно одно решение. Задача Неймана в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$ при произвольной φ не имеет решения,

Условия третьего рода и смешанная задача.

а при выполнении условия

$$\int_S \varphi ds = 0 \qquad (1)$$

задача Неймана имеет бесконечно много решений, различающихся лишь на постоянную.

Задача третьего рода: определить функцию, гармоническую в заданной области, по граничным условиям

$$\Delta u = 0,\ x \in D,\ (\frac{du}{dn} + \sigma u)|_S = \varphi, \qquad (R),$$

где σ – заданная функция. Граничное условие третьего рода называют ещё условием Робена (Robin, Victor Gustav).

Смешанная задача: $S = \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 \cup \bar{S}_3,\ S_i \cap S_j = \varnothing$;

$$\Delta u = 0,\ x \in D, u|_{S_1} = \varphi_1,\ \frac{du}{dn}|_{S_2} = \varphi_2,\ (\frac{du}{dn} + \sigma u)|_{S_3} = \varphi_3\ . \qquad (M)$$

Пусть $\sigma > 0$. Тогда задача третьего рода в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$ при любых граничных данных имеет ровно одно решение.
Смешанная задача, в которой $\sigma > 0$ на S_3 в случае $S_3 \neq \varnothing$, при любых граничных данных имеет ровно одно решение.

Задача Дирихле в круге.

Полагаем $z = x + iy$, и пусть $D = \{|z| < 1\}$. По комплексной формуле Даламбера

$$u(x, y) = f(z) + g(z^*).$$

Представляем f, g в виде степенных рядов. Получаем

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^{*n} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (f_n \mathrm{e}^{in\theta} + g_n \mathrm{e}^{-in\theta}), \; z = r\mathrm{e}^{i\theta}.$$

Вводим коэффициенты

$$u_k = \begin{cases} f_k, \; k > 0 \\ g_{-k}, \; k < 0, \\ g_0 + f_0, k = 0. \end{cases}$$

Пишем

$$u(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k r^{|k|} \mathrm{e}^{ik\theta}, \; x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta. \quad (2)$$

$$\lim_{r \to 1-0} u(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \mathrm{e}^{ik\theta} = \varphi(\theta), \quad (3)$$

где $\varphi(\theta) = \varphi(\cos\theta, \sin\theta)$, φ – функция, заданная в граничном условии.

Использование ортогонального разложения.

Очевидно, $\varphi(\theta + 2\pi) = \varphi(\theta)$. Обозначаем

$$(v, w) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} v(x)w^*(x)dx,\ \mathrm{e}_k = \mathrm{e}^{ikx}.$$

Операция $(\cdot, \cdot)$ есть эрмитово скалярное произведение в комплексном гилбертовом пространстве 2π-периодических функций $\mathrm{L}_2(\mathbb{S})$. Рассмотрим систему функций $\{\mathrm{e}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Она полна $\mathrm{L}_2(\mathbb{S})$ (по теореме Вейерштрасса); при этом

$$(e_j, e_k) = 2\pi\delta_{jk},\ j, k \in \mathbb{Z}$$

Следовательно, имеет место ортогональное разложение

$$v = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k \mathrm{e}_k,\ v_k = \frac{(v, \mathrm{e}_k)}{2\pi},\ k \in \mathbb{Z},\ \forall\ v \in \mathrm{L}_2(\mathbb{S}).$$

Применяем сказанное к разложению (3) и находим

$$u_k = \frac{(v, \mathrm{e}_k)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(x)\mathrm{e}^{-ikx}dx. \tag{4}$$

Формулы (2) и (4) дают явное выражение решения через заданную функцию. Конечно это утверждение нуждается в обосновании.

Интеграл Пуассона.

Формулы (2) и (4) дают явное выражение решения через заданную функцию. Конечно это утверждение нуждается в обосновании. Такое обоснование имеется почти во всех учебниках по УМФ, например, в лекциях В.И. Юдовича. Займёмся представлением решения в виде интеграла. Подставляем (4) в (2) и меняем порядок суммирования и интегрирования. Получаем

$$u = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(\sigma)}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} \mathrm{e}^{ik(\theta-\sigma)} d\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-\sigma)\varphi(\sigma) d\sigma; \;\; 2\pi P(r,s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\mathrm{e}^{iks}.$$

Вводим $\zeta = r\mathrm{e}^{is}$, $k > 0$; находим

$$2\pi P(\zeta,\zeta^*) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta^n + \zeta^{*n}) = 1 + 2\mathrm{Re}\frac{\zeta}{1-\zeta} = \frac{1-|\zeta|^2}{|1-\zeta|^2}$$

Отсюда

$$u = \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma, \quad \text{где } P(r,s) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(s)}, \tag{5}$$

Выражение (5) называется *формулой Пуассона* для круга.

Ядро Пуассона.

Функция P, определённая в (5), называется ядром Пуассона круга.

Лемма А. Ядро Пуассона круга обладает следующими свойствами:

$$(i)\quad \frac{1-r}{1+r} \le P(r,s) \le \frac{1+r}{1-r},\ \forall s \in \mathbb{R}, r \in [0,1);$$

$$(ii)\Delta P = 0 \text{ в круге } \{|\zeta| < 1\},\ \zeta = r\mathrm{e}^{is}..$$

$$(iii)\quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} P(r,s)ds = 1\ \forall r \in [0,1)$$

$$(iv)\quad \lim_{r\to 1-0} P(r,s) = 0 \text{ равномерно по } s \in [-\pi,\pi] \setminus (-\delta,\delta)\ \forall \delta > 0.$$

$$◀\ (1-r)^2 \le 1 + r^2 - 2r\cos(s) \le (1+r)^2 \implies (i);$$

$$P(r,s) = P(\zeta,\zeta^*) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(\zeta^n + \zeta^{*n}) = f(\zeta) + g(\zeta^*),\ |\zeta| < 1 \implies (ii)$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} P(r,s)ds = 1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{k\ne 0} r^{|k|}\mathrm{e}^{iks}ds = 1 \implies (iii);$$

(iv) проверяется непосредственно ▶.

Неравенства для интегралов Пуассона.

Следствие 1. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{L}_1(\mathbb{S})$, $\varphi_1 \geq \varphi_2$ всюду на $\mathbb{R}$, и $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Пусть

$$u_i = \int\limits_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - \sigma)\varphi_i(\sigma)d\sigma, \; r \in [0, 1), \; i = 1, 2.$$

Тогда $u_1 > u_2$ всюду в круге $\{(r, \theta), \; r \in [0, 1)\}$.

Следствие 2. Пусть $\varphi \in \mathrm{L}_\infty(\mathbb{S})$,

$$u = \int\limits_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - \sigma)\varphi(\sigma)d\sigma, \; r \in [0, 1).$$

Тогда

$$\sup_{r \in [0,1)} |u(r, \theta)| \leq \|\varphi\|_\infty.$$

Оба следствия вытекают из п. i и ii леммы А.

Конформное отображение

Предположим, что функция $F = F(\zeta)$ аналитична в некоторой области D и отображение $F : D \to \widetilde{D} = F(D)$ взаимно-однозначно. В таком случае говорят, что F осуществляет *конформное отображение* области D на область $\widetilde{D}$.

Принцип соответствия границ. Пусть $D, \widetilde{D}$ – односвязные области, причём $S = \partial D$ и $\widetilde{S} = \partial\widetilde{D}$ – кусочно-гладкие кривые. Пусть $F : D \to \widetilde{D}$ – конформное отображение, пусть $F \in \mathrm{C}(\bar{\mathrm{D}})$, и $f = F|_S$. Тогда f – гомеоморфизм S на $\widetilde{S} = \partial\widetilde{D}$.

Непосредственно из комплексной формулы Даламбера следует
Теорема. Пусть $F : D \to \widetilde{D}$ – конформное отображение, и функция $\tilde{u}$ гармоническая в $\widetilde{D}$. Тогда функция $u = \tilde{u} \circ F$ гармоническая в D.

Рассмотрим задачу

$$\Delta u = 0 \text{ в полуплоскости } D = \{z = x + iy : \ x > 0\}, \quad u|_S = \varphi, \ S = \partial D. \qquad (6)$$

Аналитическая функция, зависящая от комплексного параметра z,

$$F(\zeta|z) = \frac{z - \zeta}{z^* + \zeta}$$

определяет конформное отображение полуплоскости $\{\zeta = \xi + i\eta, \ \xi > 0\}$ на единичный круг $\widetilde{D} = \{|\tilde{z}| < 1\}$, причём $\zeta = z$ есть прообраз нуля:

$$F(z|z) = 0.$$

Ядро Пуассона полуплоскости

Ядро Пуассона полуплоскости

Положим

$$\tilde{\varphi}(\sigma|z) = \varphi(\eta), \quad \mathrm{e}^{i\sigma} = \frac{z - i\eta}{z^* + i\eta}.$$

Решим задачу

$$\Delta\tilde{u}(\cdot|z) = 0 \text{ в } \tilde{D} = \{|\tilde{z}| < 1\}, \quad \tilde{u}(\cdot|z)|_{\widetilde{S}} = \tilde{\varphi}(\cdot|z), \quad \widetilde{S} = \{|\tilde{z}| = 1\}$$

Тогда $u(\zeta|z) = \tilde{u}(F(\zeta|z)|z)$ – решение исходной задачи в полуплоскости $D \;\forall\, z \in D$. В частности,

$$u(z) = u(z|z) = \tilde{u}(F(z|z)|z) = \tilde{u}(0|z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \tilde{\varphi}(\sigma|z)d\sigma.$$

Возвращаемся к переменной η. Находим

$$\sigma = \frac{1}{i} ln \frac{z - i\eta}{z^* + i\eta}, \quad d\sigma = -\frac{id\eta}{i(z - i\eta)} - \frac{id\eta}{i(z^* + i\eta)} = -\frac{2x}{x^2 + (y - \eta)^2}, \quad z = x + iy.$$

Отсюда

$$u = u(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P(x, y - \eta)\varphi(\eta)d\eta, \quad P(x, s) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2 + s^2}. \tag{7}$$

Внешность круга.

Внешность круга.

Замечание. Решение задачи Дирихле (6) для полуплоскости неединственно: при нулевом граничном условии имеется решение cx, $c = \mathrm{const}$. Правильная постановка задачи выгляди так

$$\Delta u = 0 \text{ в полуплоскости } D = \{z = x + iy : x > 0\}, \quad u|_S = \varphi; \ \sup_D |u| < \infty. \qquad (8)$$

Решение задачи (8) единственно и представляется формулой (7).

Рассмотрим задачу

$$\Delta u = 0 \text{ во внешности круга } D = \{|z| > 1\}, \quad u|_S = \varphi; \ S = \partial D; \ \sup_D |u| < \infty. \qquad (9)$$

Отображение внутренности круга на его внешность даётся отображением $z \mapsto 1/z^*$. Это отображение тождественно на окружности $|z| = 1$. Поэтому решение задачи (9) можно записать так

$$u(z) = \tilde{u}(1/z^*), \quad \tilde{u}(\tilde{r}, \tilde{\theta}) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} P(\tilde{r}, \tilde{\theta} - \sigma)\varphi(\sigma)d\sigma, \quad \tilde{r}\mathrm{e}^{i\tilde{\theta}} = 1/z^* \implies$$

$$u(z) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - \sigma)\varphi(\sigma)d\sigma, \ z = r\mathrm{e}^{i\theta}, \ P(r, s) = \frac{r^2 - 1}{r^2 - 2r\cos(s) + 1}, \ r > 1. \qquad (10)$$

Общая задача Дирихле и конформное отображение

Пусть D – односвязная ограниченная область с кусочно-гладкой границей в плоскости комплексной переменной $\{\zeta = \xi + i\eta\}$. Рассмотрим задачу

$$\Delta u = 0 \text{ в } \ D, \quad u|_S = \varphi, \ S = \partial D. \tag{6}$$

Пусть аналитическая функция $F(\zeta|z)$, зависящая от комплексного параметра z, определяет конформное отображение D на единичный круг $\widetilde{D} = \{|\tilde{z}| < 1\}$, причём $\zeta = z$ есть прообраз нуля:

$$F(z|z) = 0.$$

Соответственно, отображение границ $\zeta \mapsto F(\zeta|z), \zeta \in S$, есть гомеоморфизм $S \to \{|\tilde{z}| = 1\}$, так что

$$|f(\zeta, |z)| = |F(\zeta|z)| = 1 \ \forall z \in D, \ \zeta \in S.$$

Положим

$$\tilde{\varphi}(\sigma|z) = \varphi(\zeta), \quad \mathrm{e}^{i\sigma} = F(\zeta|z) \ \forall z \in D, \ \zeta \in S.$$

Решим задачу

$$\Delta \tilde{u}(\cdot|z) = 0 \text{ в } \tilde{D} = \{|\tilde{z}| < 1\}, \quad \tilde{u}(\cdot|z)|_{\widetilde{S}} = \tilde{\varphi}(\cdot|z), \quad \widetilde{S} = \{|\tilde{z}| = 1\}$$

Ядро Пуассона

Ядро Пуассона

$u(\zeta|z) = \tilde{u}(F(\zeta|z)|z)$ – решение исходной задачи в заданной области $D\ \forall\, z \in D$. В частности,

$$u(z) = u(z|z) = \tilde{u}(F(z|z)|z) = \tilde{u}(0|z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \tilde{\varphi}(\sigma|z)d\sigma.$$

Возвращаемся к переменной $\zeta \in S$. Пусть кривая S параметризована отображением $s \mapsto \zeta(s) = \xi(s) + i\eta(s)$, $\dot{\xi}^2(s) + \dot{\eta}^2(s) \equiv 1$. Тогда

$$\sigma = \frac{1}{i}\ln\, F(\zeta(s)|z) = \mathrm{Arg}\, F,\ d\sigma = d\,\mathrm{Arg}\, F = \mathrm{Im}\left((\partial_\zeta \ln\, F)d\zeta\right),\ d\zeta = (\dot{\xi} + i\dot{\eta})\, ds.$$

Полагаем $g = \ln\, |F| = \mathrm{Re}\ln\, F$, $h = \mathrm{Arg}\, F = \mathrm{Im}\ln F$. Тогда $g_\xi = h_\eta$, $g_\eta = -h_\xi$ по условиям Коши-Римана. С учётом этого,

$$\mathrm{Im}\,(\partial_\zeta \ln\, F)d\zeta = \mathrm{Im}\,\frac{(\partial_\xi - i\partial\eta)(g + ih)(\dot{\xi} + i\dot{\eta})\, ds}{2} = \dot{\eta}g_\xi - \dot{\xi}g_\eta = \frac{dg(\zeta|z)}{dn(\zeta)}.$$

где $\mathbf{n}(\zeta) = \dot{\eta}\mathbf{e}_\xi - \dot{\xi}\mathbf{e}_\eta$ – орт внешней нормали к S в точке $\zeta(s) \in S$. Отсюда

$$u(x,y) = \int\limits_S P(x,y|\xi,\eta)\varphi(\zeta)ds,\quad P = \frac{1}{2\pi}\frac{dg(\zeta|z)}{dn(\zeta)},\ x + iy = z,\ \xi(s) + i\eta(s) = \zeta(s) \in S.$$

Функция Грина

Функция Грина

Определение 1. Функцию Грина $G = G(x, y|\xi, \eta)$ задачи Дирихле в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$ задает равенство

$$G(z|\zeta) = G(x, y|\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|F(\zeta|z)|}, \ \zeta = \xi + i\eta \in D, \ z = x + iy \in D,$$

где F конформно отображает D на единичный круг $\forall\ z \in D$, причём $F(z|z) = 0$.

С учётом данного определения ядро Пуассона и решение задачи Дирихле в случае ограниченной односвязной области записываются так

$$u(x, y) = \int\limits_S P(x, y|\xi, \eta)\varphi(\zeta) ds, \quad P = -\frac{dG(\zeta|z)}{dn(\zeta)}, \ \xi(s) + i\eta(s) = \zeta(s) \in S, \qquad (1)$$

где $x + iy = z \in, \xi(s) + i\eta(s) = \zeta(s) \in S$, а нормаль – внешняя.

Теорема 1. Функция Грина обладает следующими свойствами
(i) симметрия: $G(z|\zeta) = G(\zeta|z)$;
(ii) положительность: $G(z, \zeta) > 0\ \forall (z, \zeta) \in D \times D$
(iii) граничные условия: $G(z, \zeta) = 0\ \forall z \in D,\ \zeta \in S;\ \ G(z, \zeta) = 0\ \forall z \in S,\ \zeta \in D$;
(iv) гармоничность: $\Delta_\zeta G(z, \zeta) = 0$ в $D \setminus z\ \forall\ z \in D;\ \ \Delta_z G(z, \zeta)$в $\ D \setminus \zeta\ \forall \zeta \in D$.

Функция Грина круга

◀ $G > 0$ так как $|F(\zeta, z)| < 1$ (см. определение 1).
Симметрию примем без доказательства. Ввиду симметрии, пп. (iii),(iv) достаточно доказать для ζ при фикисрованном z. Замечаем, что $|F(\zeta, z)| = 1$ при $\zeta \in S$ по определению. Отсюда (iii). Далее $F(\cdot, z)$ аналитична в D, следовательно $\ln F(z|z)$ аналитичен в $D \setminus z$, а $G = -\mathrm{Re}\, F$. Отсюда (iv). ▶

Пример 1. Функция Грина круга. Функция

$$F(\zeta|z) = \frac{\zeta - z}{z^*\zeta - 1},$$

отображает круг $|\zeta| < 1$ на себя, и при этом точка $\zeta = z$ – прообраз нуля. В самом деле, пусть $z = r\mathrm{e}^{i\alpha}, \zeta = \rho\mathrm{e}^{i\beta},\ \theta = \alpha - \beta,\ \sigma = \cos\theta$, тогда

$$|z^*\zeta - 1|^2 - |\zeta - z|^2 = 1 + r^2\rho^2 - 2r\rho\sigma - (r^2 + \rho^2 - 2r\rho\sigma) = (1 - r^2)(1 - \rho^2)$$

поэтому $|F| < 1$ при $\rho < 1$ $r < 1$, и $|F| = 1$ при $(1 - r)(1 - \rho) = 0$, что и требуется.
Итак, *функция Грина круга* имеет вид

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z^*\zeta - 1}{\zeta - z} \right| = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1 + r^2\rho^2 - 2r\rho\sigma}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\sigma},\ \sigma = \cos\theta, \theta = \arg z - \arg\zeta.$$

Функция Грина полуплоскости

При этом ядро Пуассона круга есть

$$-\left.\frac{dG(z,\zeta)}{dn(\zeta)}\right|_{\zeta\in S} = -\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial}{\partial\rho}\right|_{\rho=1} \ln\frac{1+r^2\rho^2-2r\rho\sigma}{r^2+\rho^2-2r\rho\sigma} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\sigma}, \quad \sigma=\cos\theta,$$

как и было ранее установлено.

Теперь достаточно знать *хотя бы одно отображение* f данной области D на единичный круг B_1. Тогда

$$F(\zeta|z) = F_0(f(\zeta)|f(z)), \quad F_0(\zeta_0|z_0) = \frac{\zeta_0 - z_0}{z_0^*\zeta_0 - 1}$$

Пример 2. Функция Грина полуплоскости. Конформное отображение полуплоскости $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$ на круг имеет вид

$$f(z) = \frac{1-w}{1+w},$$

отсюда находим

$$F = \frac{1+z^*}{1+z}\frac{(1-\zeta)(1+z)-(1+\zeta)(1-z)}{(1-\zeta)(1-z)-(1+\zeta)(1+z^*)} = \frac{1+z^*}{1+z}\frac{\zeta - z}{\zeta + z^*}.$$

Функция Грина полуплоскости-1

Отсюда находим функцию Грина

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z^* + \zeta}{z - \zeta} \right| = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$. Ядро Пуассона дает формула

$$-\left.\frac{dG(z,\zeta)}{dn(\zeta)}\right|_{\mathrm{Re}\,\zeta=0} = \frac{1}{4\pi} \left.\frac{\partial}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} \ln \frac{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + (y-\eta)^2}$$