УМФ
Лекция 2
2-й семестр – весна 2019 г
Уравнение неразрывности. Дивергенция и ротор. Безвихревые течения несжимаемой жидкости

Моргулис Андрей Борисович
КВМиМФ, а. 214
morgulisandrey@gmail.com

28 февраля 2019 г.

Материальные области

Пусть частица некоторой «среды» в отсчётный момент времени находилась в точке $a \in \mathbb{R}^3$, а за время t переместилась в точку $X = X(a, t)$. Перемещение за время t частиц, в отсчётный момент времени составлявших в совокупности область $D_0 \subset \mathbb{R}^3$, определяет её отображение на область $D(t)$

$$X(t) : D_0 \to D(t), \quad a \mapsto X(a, t), a \in D_0.$$

Считаем, что отображение $X(t)$ – гомеоморфизм $\overline{D}_0 \to \overline{D}(t)$, (частицы не сталкиваются) и диффеоморфизм $D_0 \to D(t)$. Такие отображения называют гладкими вложениями области D_0 в пространство $\mathbb{R}^3$. Дополнительно предположим, что $X \in \mathrm{C}^1(\bar{D}_0 \times [-T, T])$.

Определение 1. Элемент семейства областей $D(t)$, представляющих собой вложения некоторой заданной области в объемлющее пространство, индуцированные движением некоторой среды, называют материальной областью, а составляющие её точки – материальными частицами.
Замечание 1. Материальная частица понимаются как элемент пути точки начальной области D_0.

Лагранжева и эйлерова скорости

Определение 2 . Лагранжевыми координатами точки $x \in D(t)$ называют координаты точки $a = X^{-1}(x,t) \in D_0$. Лагранжевой скоростью материальной частицы $x = X(a,t) \in D(t)$ называют вектор $X_t(a,t)$.

Вместе с лагранжевыми скоростями и координатами на материальной области определено векторное поле

$$x \mapsto \mathbf{v}(x,t) = X_t(X^{-1}(x,t),t), \quad x \in D(t). \tag{1}$$

Определение 3 . Векторное поле (1) называют эйлеровой скоростью среды.

Заданная эйлерова скорость определяет движение материальных частиц $a \mapsto X(a,t)$ посредством задачи Коши

$$X_t = \mathbf{v}(X,t) \;\; X|_{t=0} = a \in D_0. \tag{2}$$

При фиксированном a это просто задача Коши для ОДУ.

Пусть $\rho = \rho(x,t)$ – плотность среды. Записываем массу $m(t) = \int\limits_{D(t)} \rho(x,t)dx$ материальной области $D(t)$ в лагранжевых координатах

$$m(t) = \int\limits_{D_0} \rho(X,t)\det\left(X'\right)\,da, \quad X = X(a,t), \quad X' = \left(\frac{\partial X_i(a,t)}{\partial a_j}\right)$$

Изменение массы материальной области

Имеем

$$\dot{m} = \int\limits_{D_0} \left(\rho(X(a,t),t)\det\left(X'(a,t)\right)\right)_t da. \qquad (3)$$

Найдём эйлерову форму интеграла (3). Вводим декартовы координаты, так что $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, и $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Разворачиваем производную, стоящую под знаком интеграла (3). Имеем

$$\left(\rho(X(a,t),t)\det\left(X'(a,t)\right)\right)_t = \rho_t(X,t) + X_{i\,t}\rho_{x_i}(X,t) + \rho(X,t)\left(\det\left(X'(a,t)\right)\right)_t, \qquad (4)$$

где по повторяющемуся индексу производится суммирование. Здесь полезна

Лемма 1. Пусть матрицезначная функция $S = S(t)$ – решение задачи Коши $\dot{S} = D(t)S,\ S(0) = I$. Тогда $(\det S)^{\bullet} = \mathrm{tr}(D(t))\det S(t),\ \det S(0) = 1$.

Продолжим. Дифференцируем уравнение движения материальных частиц (1) и получаем задачу Коши для соотвествующего уравнения в вариациях

$$X'_t = \mathbf{v}'(X,t)X', \quad X'\big|_{t=0} = I. \qquad (5)$$

Отсюда находим $(\det(X'(a,t)))_t$ по лемме 1, и подставляем в (4). Имеем

$$\left(\rho(x,t)\det\left(X'(a,t)\right)\right)_t = \left(\rho_t + v_i\rho_{x_i} + \rho(v_{1x_1} + v_{2x_2} + v_{3x_3})\right)(x,t)\det\left(X'(a,t)\right) \qquad (6)$$

где $x = X(a,t)$, и $a \in D_0$

Эйлерова производная массы материальной области

Подставляем (6) в (3), и находим

$$\dot{m} = \int\limits_{D(t)} \left(\rho_t + v_i \rho_{x_i} + \rho(v_{1x_1} + v_{2x_2} + v_{3x_3})\right)(x,t)\,dx. \tag{7}$$

или, более кратко,

$$\dot{m} = \int\limits_{D(t)} \left(\rho_t + (v_i\rho)_{x_i}\right)(x,t)\,dx. \tag{8}$$

Итак, эйлерово выражение $\dot{m}$ получено. Докажем Лемму 1.

◀ Лемма вытекает из следующего предложения

Предложение 1. $\det(I + \varepsilon D) = 1 + \varepsilon \mathrm{tr}(D) + O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to +0$.

$$◀ \det(I + \varepsilon D) = \varepsilon^n \det(\varepsilon^{-1} I + D) = \varepsilon^n \det\left(\varepsilon^{-n} + \varepsilon^{-n-1}\mathrm{tr} D + \ldots\right) \ ▶$$

В силу уравнения $\dot{S} = DS$ (см. условия леммы), с точностью до членов порядка ε^n, $n \geq 2$, $S(t+\varepsilon) = S(t) + \varepsilon \dot{S}(t) + \ldots \implies S(t+\varepsilon)S^{-1}(t) = I + \varepsilon D(t) + \ldots \implies$

$$\frac{\det S(t+\varepsilon)}{\det S(t)} = 1 + \varepsilon \mathrm{tr} D(t) + \ldots \implies \frac{\det S(t+\varepsilon) - \det S(t)}{\varepsilon} = \mathrm{tr} D \det S + O(\varepsilon),\ \varepsilon \to +0,$$

что и требовалось. ▶

Дивергенция векторного поля

Определение 4. Дифференциальный оператор над векторным полем $\mathbf{u}$, заданная выражением

$$\mathbf{u} \mapsto \operatorname{div} \mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} u_{i\,x_i} = u_{1x_1} + u_{2x_2} + u_{3x_3},$$

где u_i – компоненты поля $\mathbf{u}$ относительно *декартовых* координат, называется *дивергенцией* поля $\mathbf{u}$.

Замечание 2. Данное определение использует декартовы координаты и частные производные по ним. Следовательно, необходимо понять, как меняется выражение дивергенции поля при изменении координат. Мы займёмся этим позже.

Подведём итог. Получено эйлерово описание изменения массы материальной области

$$\dot{m}(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_{D(t)} \rho(x,t)dx = \int\limits_{D(t)} (\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}))dx, \text{ где} \qquad (9)$$

$$D(t) = X(D_0,t),\ X_t(a,t) = \mathbf{v}(X(a,t),t),\ X\big|_{t=0} = a \in D_0,$$

и операция div введена определением 4. Формула (9) эквивалентна (7) и (8).

С точки зрения анализа, формула (9) (или (8), или (7)) выражает правило дифференцирования интеграла по движущейся области.

Уравнение неразрывности

Определение 5. Дифференциальный оператор

$$\rho \mapsto \rho_t + \mathrm{div}\,(\mathbf{v}\rho),$$

где $\mathbf{v}$ – заданное векторное поле, называют материальной производной элемента объема ρdx (или плотности) вдоль поля $\mathbf{v}$.

Равенство нулю материальной производной плотности среды всюду в материальной области $D(t)$ даёт уравнение

$$\rho_t + \mathrm{div}\,(\mathbf{v}\rho) = 0,\ (x,t) \in Q_T = \{(x,t):\ x \in D(t), |t| < T\}, \tag{10}$$

где $\mathbf{v}$ – поле эйлеровой скорости среды.

Определение 5. Уравнение (10) называют *уравнением неразрывности.*

Замечание 2. Одномерное уравнение неразрывности изучалось в прошлом семестре (лекция 2). Как и в одномерном случае, движение материальных частиц $t \mapsto (t, X(t,a))$ параметризует храктеристику уравнения неразрывности, проходящую через точку a при $t = 0$. Это следует из задачи Коши (2), определяющей X.

Если уравнение неразрывности выполняется в некоторой материальной области, то, как видно из (8), сохраняется масса *любой* её материальной подобласти. В таком случае говорят о сохранении масс материальных частиц.

Однородность и несжимаемость

Если при среда, заполняющая материальную область, остается однородной, так что $\rho = \mathrm{const}$, и при этом сохраняется масса материальных частиц, то любая материальная подобласть сохраняет объём; соответственно, уравнение неразрывности влечёт $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. В таком случае говорят, что среда, заполняющая данную материальную область, *несжимаема.* Векторное поле со всюду нулевой дивергенцией называют *соленоидальным или бездивергентным* (divergence-free). Ввиду сохранения объема *произвольной* материальной подобласти,

$$\det\left(X'(a,t)\right) = \det\left(X'(a,0)\right) = 1 \;\forall\, a \in D_0,\ \ t \in (-T, T) \tag{11}$$

то есть, имеет место сохранение объёмов всех материальных частиц. Свойство диффеоморфизма $X(t)$, выраженное равенством (11), называют *сохранением элемента объёма.*

Замечание 3. Предположение несжимаемости не влечёт однородность. В неоднородной несжимаемой среде, сохранение массы материальной частицы равносильно транспортному уравнению

$$\rho_t + \mathbf{v}\nabla\rho = 0, \Leftrightarrow\ \partial_t \rho(X(a,t),t) = 0 \ \Leftrightarrow\ \rho(X(a,t),t) = \rho_0(a)\ \forall\, a \in D_0.$$

Таким образом, текущее распределение массы в неоднородной несжимаемой среде, возникает в результате перестановки отображением $X(t)$ материальных частиц, массы которых предопределены начальной плотностью ρ_0.

Однородная и несжимаемая жидкость. Вихрь.

Определение 5. Вихрем (ротором) векторного поля $\mathbf{v}$ называют векторное поле $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ – значение дифференциального оператора

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (v_{3x_2} - v_{2x_3})\,\mathbf{e}_1 + (v_{1x_3} - v_{3x_1})\,\mathbf{e}_2 + (v_{2x_1} - v_{1x_2})\,\mathbf{e}_3, \quad (12)$$

где x_1, x_2, x_2 – декартовы координаты, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – орты осей этих координат.

Замечание 4. При изменении координат выражение вихря (ротора) изменится по некоему правилу. Об этом – позже.

В западной литературе ротор обозначается curl.

Замечание 5. Размерность пространства вещественных кососимметричных матриц равна 3, и потому оно изоморфно $\mathbb{R}^3$. Изоморфизм

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\gamma \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} = \ell \quad (13)$$

канонический в том смысле, что

$$Lx = \ell \times x = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\gamma & \beta & -\alpha \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \quad (14)$$

Преобразование малого материального тетраэдра

Разлагаем матрицу $\mathcal{D} = \left(v_{i\,x_j}\right)$ на симметричную и антисимметричную части:

$$\mathcal{D} = \frac{\Omega + \mathcal{E}}{2}, \ \Omega = \begin{pmatrix} 0 & v_{1\,x_2} - v_{2\,x_1} & v_{1\,x_3} - v_{3\,x_1} \\ v_{2\,x_1} - v_{1\,x_2} & 0 & v_{2\,x_3} - v_{3\,x_2} \\ v_{3\,x_1} - v_{1\,x_3} & v_{3\,x_2} - v_{2\,x_3} & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 2v_{1\,x_1} & v_{1\,x_2} + v_{2\,x_1} & v_{1\,x_3} + v_{3\,x_1} \\ v_{2\,x_1} + v_{1\,x_2} & 2v_{2\,x_2} & v_{2\,x_3} + v_{3\,x_2} \\ v_{3\,x_1} + v_{1\,x_3} & v_{3\,x_2} + v_{2\,x_3} & 2v_{3\,x_3} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Канонический изоморфизм (13) отождествляет матрицу Ω с вектором $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}$

Пусть X – движение среды, то есть, решение задачи Коши (2). Выберем $a_0 \in D_0$ и число $\delta > 0$, столь малое, что D_0 содержит симплекс (тераэдр) Σ_0, с вершинами a_0, $a_i = a_0 + \delta e_i \in D_0$, где e_i – орты координатных осей. Материальная область $X(\Sigma_0, t)$ при малых t и δ хорошо аппроксимируется тетраэдром Σ с вершинами $x_0 = X(a_0, t)$, $x_i = x_0 + \delta X'(t)e_i$, где, ввиду малости t и δ, и в силу (2) и (5),

$$x_0 = a_0 + t\mathbf{v}_0, \quad X'(t) = I + t\mathcal{D}_0, \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(a_0, 0), \mathcal{D}_0 = \left(v_{i\,x_j}\right)(a_0, 0).$$

Отсюда находим, что $x_i = a_i + t\mathbf{v}_0 + t\delta\mathcal{D}_0 e_i$, и заключаем, что

$$\Sigma - x_0 = (I + t\mathcal{D}_0)\,(\Sigma_0 - a_0)\,, \text{ где } \mathcal{D}_0 = (\Omega_0 + \mathcal{E}_0)\,/2.$$

Если $\Omega_0 = 0$, и орты e_i образуют собственный базис матрицы $\mathcal{E}_0$, то преобразование симплекса Σ_0 сводится к растяжению его рёбер в $1 + t\lambda_i/2$ раз, где числа λ_i – собственные для матрицы $\mathcal{E}_0$. Таким образом, *за растяжение материальной частицы при малом перемещении среды ответствена симметричная часть $\mathcal{E}$ матрицы $\mathcal{D} = \mathbf{v}'$, вычисленная в этой частице.*

Замечание 6.

$\mathrm{vol}\,\Sigma/\mathrm{vol}\,\Sigma_0 = \det(I + t\mathcal{D}) = 1 + t\mathrm{tr}\mathcal{D} + \ldots = 1 + t\mathrm{tr}\mathcal{E} + \ldots = 1 + t\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \ldots$.

Отсюда видно, что дивергенция ответственна за изменение объёма материальной частицы.

Выясним роль антисимметричной матрицы Ω, отождествляемой с вихрем. Введём

Определение 6. $n \times n$ – матрица U называется ортогональной, если $U^* U = I$. Если при этом $\det U = 1$, то матрица U называется вращением. Эквивалентная формулировка: матрица U называется ортогональной, если $(Ux, Uy) = (x, y)$ для всех векторов x, y.

Множество вращений обозначается $SO(n)$. Множество ортогональных матриц обозначается $O(n)$.

Замечание 7. Множество $O(n)$ с матричным умножением образует группу (неабелеву). Так как $\forall\ U \in O(n)$ $\det^2(U) = \det(UU^*) = \det I = 1$, группа $O(n)$ распадается на два непересекающихся подмножества матриц с определителями 1 или -1.

Однородная несжимаемая жидкость

Одно из них – множество $SO(n)$ – подгруппа группы $O(n)$.

Рассмотрим вращение U, близкое к тождественному. Полагаем $L = U - I$, тогда $U^{-1} = (I+L)^{-1} = I - L + L^2 \ldots$. Но по определению $U^{-1} = U^* = I + L^*$, так что $L^* = -L + O(L^2)$, $L \to 0$. Итак, любое вращение, близкое к тождественному, приближённо равно $I + L$, где $L^* = -L$, $\|L\| << 1$. В силу сказанного, заключаем, что *вихрь материальной частицы (отождествляемый с кососимметричной частью Ω матрицы $\mathcal{D}$) ответственен за вращение этой частицы.*

Пример 1. Векторное поле $v_1 = -x_2, v_2 = x_1, v_3 = 0$ имеет вихрь $2\mathbf{e}_3$. Поток этого поля в цилиндрических координатах $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, $x_3 = z$ выражается так $\theta_0 \mapsto \theta_0 + t$, $r_0 \mapsto r_0$, $z_0 \mapsto z_0$. Таким образом, материальные частицы вращаются вокруг оси z со угловой скоростью 1.

Течение несжимаемой и однородной жидкости описывается двумя полями: векторным полем скорости $\mathbf{v}$ и скалярным полем давления $P = P(x,t)$. Уравнения движения известны как система Навье-Стокса:

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v} = -\nabla P + \nu\Delta\mathbf{v},\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \text{где}$$

$$(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v} = \operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^2/2,\ \Delta\mathbf{v} = \nabla(\operatorname{div}\mathbf{v}) - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v},$$

и $\nu > 0$ – константа (так называемая кинематическая вязкость жидкости).

Плоские безвихревые установившиеся течения

Общие уравнения Навье-Стокса весьма сложны. Для простоты пренебрегаем силой вязкости (это внутреннее трение частиц жидкости друг о друга), то есть, полагаем $\nu = 0$, и предполагаем движение жидкости *безвихревым*, так что $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ во всей жидкой области.

Замечание 8. Предположение о безвихревом движении при $\nu \neq 0$ некорректно. Если же силой вязкости пренебречь, то из уравнений движения следует, что материальная область, изначально безвихревая, останется таковой вечно.

В безвихревом движении давление и скорость связаны *уравнением Бернулли* $\nabla(P + v^2/2) + \mathbf{v}_t = 0$. С целью дальнейшего упрощения предполагаем, что течение *установившееся*: $v_t \equiv 0,\ P_t \equiv 0$ и *плоское*: $v_{x_3} \equiv 0,\ v_3 \equiv 0$. В таком случае уравнение Бернулли принимает вид $P + v^2/2 \equiv \mathrm{const}$ (*интеграл Бернулли*). Отсюда можно определить давление через скорость, а уравнения скорости не зависят от него. Именно, в плоском течении

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = (v_{2x_1} - v_{1x_2})\mathbf{e}_3.$$

Вводим $u = v_1, v = v_2, x = x_1, y = x_2$. Получаем

$$u_x + v_y = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad v_x - u_y = \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0. \tag{17}$$

Потенциал, функция тока и комплексный потенциал

Второе уравнение системы (17) будет выполнено, если положить

$$u = \varphi_x \qquad = \varphi_y, \tag{18}$$

где φ – некоторый скаляр. Первое уравнение системы (17) будет выполнено, если положить

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x. \tag{19}$$

где ψ – некоторый скаляр.

Определение 7. Функция φ, удовлетворяющая системе уравнений (18), называется потенциалом поля (u, v). Функция ψ, удовлетворяющая системе уравнений (19), называется функцией тока поля (u, v).

Пусть поле (u, v) допускает потенциал и функцию тока одновременно. Тогда имеет место система Коши-Римана

$$\varphi_x = \psi_y, \quad \varphi_y = -\psi_x.$$

Следовательно, *функция $w = \varphi + i\psi$ есть аналитическая функция переменной $z = x + iy$, а функции φ, ψ –* ***гармонические****.*

Определение 8. Функцию $w = \varphi + i\psi$, где φ – потенциал, а ψ – функция тока плоского безвихревого установившегося течения, называют комплексным потенциалом этого течения.

Определение 8. Функцию $V(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} u + iv$, где $z = x + iy$, и u, v проекции поля скорости плоского безвихревого установивишегося течения на оси координат Oxy, называют комплексной скоростью этого течения.

Предложение 2. Имеет место равенство

$$V^*(z) = w'(z). \tag{20}$$

◀ В самом деле, с учётом уравнений Коши-Римана,

$$2w'(z) = (\partial_x - i\partial_y)(\varphi + i\psi) = (\varphi_x + \psi_y) - i(\varphi_y - \psi_x) = u - iv \blacktriangleright$$

Вывод: любая аналитическая функция в данной области определяет некоторое плоское безвихревое установившееся течение жидкости в этой области. При этом движение материальных частиц потока описывается ОДУ

$$\dot{z}^* = w'(z) \Leftrightarrow \dot{x} = u(x, y) = \psi_y, \quad \dot{y} = v(x, y) = -\psi_x. \tag{21}$$

Если $x = x(t), y = y(t)$ – некоторые решения, то

$$\frac{d\psi(x(t), y(t))}{dt} = (\psi_x\psi_y - \psi_y\psi_x)(x(t)y(t)) = 0\ \forall t \implies$$

линии уровня $\psi(x, y) = \mathrm{const}$ функции тока ψ поля скорости (u, v) некоторого течения жидкости представляют собой траектории материальных частиц этого течения. Эти линии называются линиями тока.

Плоская задача о безвихревом обтекании цилиндра

Замечание 9. Система (21), определяющая движение материальных частиц, гамильтонова, и её гамильтониан – функция тока.

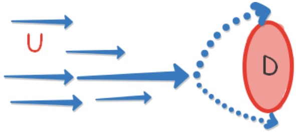

Рис. : 1.

Требуется определить движение жидкости вокруг неподвижного цилиндрического твёрдого тела произвольного сечения, вызываемое набегающим потоком. Скорость потока вдали от тела задана, постоянна и лежит в плоскости, ортогональной образующей цилиндра (см. рис. 1). Простейшая формализация этой задачи получается, если жидкость считать однородной и несжимаемой, цилиндр – бесконечным, а поток – плоским и безвихревым.

Решение задачи о таком обтекании состоит в отыскании комплексного потенциала потока w, удовлетворяющего ***граничным условиям*** $\psi = \mathrm{Im} w = \mathrm{const}$ *на* ∂D *и* $w = Uz + \mathrm{const} + O(1/z),\ z \to \infty$

Решение в случае круглого цилиндра.

Условие на поверхности цилиндра означает, что она непроницаема в том смысле, что жидкость не внедряется внутрь цилиндра. Условие на бесконечности означает, что скорость потока принимает там заданное значение U.

Пусть D – единичный круг, тогда решение задачи безвихревого обтекания даёт комплексный потенциал

$$w = \varphi + i\psi = U(z + 1/z).$$

На границе круга $z^{-1} = z^*$, так что граница круга – линия тока $\{\psi = 0\}$.

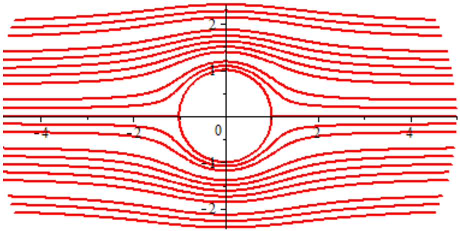

Рис. : 2. Линии тока при обтекании круглого цилиндра. U=1

Безвихревое обтекание произвольного цилиндра

В общем случае задача сводится к конформному отображению внешности сечения данного цилиндра на внешность круга, причём аналитическая функция f, осуществляющая данное отображение, должна удовлетворять условию $f(z) = z + \mathrm{const} + O(1/z),\ z \to \infty$. Пусть $f : z \mapsto \zeta$ – такое отображение на внешность круга радиуса R. Тогда задачу безвихревого обтекания решает комплексный потенциал

$$w = U(f(z) + R^2 f^{-1}(z)).$$

Проекции силы, действующей на цилиндр со стороны жидкости, на оси координат Oxy вычисляются так:

$$F_x = -\int\limits_S P n_x ds, \quad F_y = -\int\limits_S P n_y ds, ds = |\zeta'(\sigma)| d\sigma,$$

где $P = \mathrm{const} - (u^2 + v^2)/2$ (интеграл Бернулли), $\zeta : \sigma \mapsto \zeta(\sigma) = \xi(\sigma) + i\eta(\sigma)$ – параметризация кривой $S = \partial D$. Считаем параметризацию натуральной, так что $|\zeta'| \equiv 1$. Поэтому полагаем $\zeta'(\sigma) = \mathrm{e}^{i\theta(\sigma)}$. Имеем

$$\tau_x + i\tau_y = \mathrm{e}^{i\theta(\sigma)},\ n_x + in_y = i\mathrm{e}^{i\theta(\sigma)},\ dz = \mathrm{e}^{i\theta(\sigma)} d\sigma \text{ на } S.$$

$$F^* = F_x - iF_y = i\int\limits_S P\mathrm{e}^{-i\theta(\sigma)} d\sigma = -\frac{i}{2}\int\limits_S |V|^2 \mathrm{e}^{-i\theta(\sigma)} d\sigma.$$

Формула Жуковского-Чаплыгина

где $V = u + iv = (w')^*$. Произвольная константа в интеграл вклада не дает, так как

$$\int_S \mathrm{e}^{-i\theta(\sigma)} d\sigma = \int_S dz^* = 0.$$

Замечаем, что, ввиду непроницаемости границы, скорость касательна к S. Поэтому $u\tau_x + v\tau_y = \pm|V|$, $un_x + vn_y = 0$. С другой стороны, $u\tau_x + v\tau_y = \mathrm{Re}(V^* \mathrm{e}^{i\theta})$, $un_x + vn_y = \mathrm{Im}(V^* \mathrm{e}^{i\theta})$. Сопоставляем всё это и находим $|V|^2 = ((V^* \mathrm{e}^{i\theta}))^2$. Отсюда

$$F^* = F_x - iF_y = \frac{i}{2} \int_S w'^2(z) dz.$$

Это выражение – формула Жуковского-Чаплыгина. Её ценность в том, что сила выражена комплексным интегралом по замкнутому контуру от функции, аналитической вне области, ограниченной контуром интегрирования. Поэтому

$$2F^* = i \lim_{a\to\infty} \int_{|z|=a} w'^2(z) dz = iU^2 \lim_{a\to\infty} \int_{|z|=a} \left(f'(z)(1 - R^2 f^{-2})\right)\right)^2 dz =$$

$$= iU^2 \lim_{a\to\infty} \int_{|z|=a} \left((1 - c_2 z^{-2} + \ldots)(1 - (z + \ldots)^{-2})\right)\right)^2 dz = 0.$$

Парадокс Даламбера

При вычислении подинтегрального выражения были использованы условия на бесконечности. Интеграл обращается в нуль так как разложение не содержит z^{-1}.

Итак, гипотеза о безвихревом обтекании приводит к выводу о равенстве нулю силы, действующей со стороны набегающего потока на твёрдое тело. Это утверждение известно как парадокс Даламбера.