

# Лабораторная работа №1

П. С. Углич

кафедра теории упругости

8 апреля 2025 г.

# Оглавление

- 1 Метод Ритца
  - Функционал Гамильтона-Остроградского
- 2 Оценка собственных частот снизу
- 3 Варианты заданий

Решение задачи о свободных поперечных колебаниях балки длины  $L$  может быть сведено к отысканию стационарной точки функционала Гамильтона-Остроградского

$$S = \int_0^L \left\{ \mu(x) p^2 \varphi^2(x) - EJ [\varphi''(x)]^2 \right\} dx \quad (1)$$

$EJ$  — жесткость балки на изгиб (может зависеть от продольной координаты  $x \in [0, L]$ );

$\mu(x) = \rho(x)A(x)$  — произведение плотности материала балки на площадь поперечного сечения;

$\varphi(x)$  — поперечный изгиб;

$p$  — частота колебаний;

Сущность метода Ритца заключается в сведении вариационной задачи к задаче об отыскании экстремума функции многих независимых переменных. Ищем поперечный прогиб в виде:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \psi_i(\mathbf{x}), \quad (2)$$

где  $\alpha_i$  — параметры, подлежащие определению из условия стационарности функционала,  $\psi_i(\mathbf{x})$  — базисные или координатные функции. Базисные функции являются достаточно гладкими и удовлетворяют главным краевым условиям задачи.

Рассмотрим для примера случай, когда главные краевые условия заданы на левом конце балки.

К главным условиям относятся условия глухой заделки

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$$

или шарнирного опирания

$$\varphi(0) = 0$$

Если для функции  $\varphi$  заданы главные краевые условия, то они должны быть заданы и для функций  $\psi_i$ .

Подставляем (2) в (1). Функционал Гамильтона-Остроградского обращается в квадратичную форму параметров  $\alpha_i$

$$S(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = p^2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n T_{ik} \alpha_i \alpha_k - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n U_{ik} \alpha_i \alpha_k \quad (3)$$

где

$$T_{ik} = \int_0^L \mu(x) \psi_i(x) \psi_k(x) dx,$$

$$U_{ik} = \int_0^L EJ(x) \psi_i''(x) \psi_k''(x) dx$$



Рассмотрим однородную по длине балку длины  $L$ , жёстко закреплённую на левом конце и будем искать форму колебаний в виде

$$\varphi(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3$$

Подставляя решение в (3), получаем:

$$T_{11} = \frac{\rho AL^5}{5}, \quad T_{12} = T_{21} = \frac{\rho AL^6}{6}, \quad T_{22} = \frac{\rho AL^7}{7}$$

$$U_{11} = 4EJL, \quad U_{12} = U_{21} = 6EJL^2, \quad U_{22} = 12EJL^3$$

Уравнение (5) имеет решение:

$$\rho_1 = \frac{3.5327}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{A\rho}}, \quad \rho_2 = \frac{34.8069}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{A\rho}}$$

В книге [1] приводятся оценки, найденные при помощи функций Крылова

$$\rho_1 = \frac{3.515625}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{A\rho}}, \quad \rho_2 = \frac{22.034}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{A\rho}}$$

Как видно из полученных результатов, метод Ритца даёт оценку сверху, при этом оценка второй частоты намного грубее, чем у первой

Рассмотрим однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x) - \lambda \int_{\Omega} G(x, \xi) u(\xi) d\Omega_{\xi} \quad (6)$$

Предположим, что ядро уравнения симметрично и

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} G^2(x, y) d\Omega_x d\Omega_y < \infty$$

Введём обозначение

$$G_m(x, \xi), \quad m = 1, 2, \dots$$

— итерированные ядра, которые определяются рекуррентными соотношениями

$$G_1(x, \xi) = G(x, \xi), \quad G_m(x, \xi) = \int_{\Omega} G(x, y) G_{m-1}(y, \xi) d\Omega_y = 0$$

Введём в рассмотрение следы итерированных ядер

$$a_m = \int_{\Omega} G_m(x, x) d\Omega$$

Для следов с чётными индексами верна формула

$$a_{2m} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} G_m^2(x, y) d\Omega_x d\Omega_y$$

Следы связаны с характеристическими числами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  соотношением, которое вытекает из теоремы Мерсера

$$a_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^m}, \quad m \geq 2$$

Это неравенство даёт оценку первой собственной частоты  
снизу

Пусть характеристические числа расположены в порядке возрастания. Заменяя в последнем равенстве  $m$  на  $2m$  и отбрасывая все члены ряда кроме последнего, получаем:

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{\sqrt[2m]{a_{2m}}}$$

Рассмотрим задачу о колебаниях глухо заделанной балки.  
Уравнение колебаний следующее:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \rho A p^2 w \quad (7)$$

Краевые условия имеют вид:

$$w|_{x=0} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (8)$$

$$\left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} = \frac{\partial}{\partial x} \left( EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} = 0 \quad (9)$$

Предположим, что  $E$ ,  $A$ ,  $J$ ,  $\rho$  — постоянны по длине балки

Для сведения задачи к однородному интегральному уравнению построим функцию Грина. Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\frac{\partial^4 G}{\partial x^4} = \delta(x - \xi) \quad (10)$$

Краевые условия имеют вид:

$$G|_{x=0} = \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} \Big|_{x=L} = 0$$

Проинтегрируем (10):

$$\frac{\partial^3 G}{\partial x^3} = \varphi_0(x - \xi) + C_0 \quad (11)$$

На правом конце балки:

$$\left. \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} \right|_{x=L} = 0 = 1 + C_0$$

следовательно

$$C_0 = -1$$

Проинтегрируем (11):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \varphi_1(x - \xi) - x + C_1 \quad (12)$$

На правом конце балки

$$\left. \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 = L - \xi - L + C_1$$

Следовательно

$$C_1 = \xi$$

Проинтегрируем (12):

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \varphi_2(x - \xi) - \frac{x^2}{2} + x\xi \quad (13)$$

$$G = \varphi_3(x - \xi) - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2\xi}{2} \quad (14)$$

Выражения (13), (14) удовлетворяют краевым условиям на левом конце балки.

Раскроем (14) при  $x > \xi$ :

$$G(x, \xi) = \frac{1}{6} \left( x^3 - 3x^2\xi + 3x\xi^2 - \xi^3 \right) - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2\xi}{2}$$

При  $x < \xi$ :

$$G(x, \xi) = \frac{1}{6} (3x^2\xi - x^3)$$

Объединяя эти два выражения, получаем:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{6} (3x^2\xi - x^3), & x < \xi \\ \frac{1}{6} (3x\xi^2 - \xi^3), & x \geq \xi \end{cases}$$

Уравнение (7) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\rho A p^2}{EJ} w \quad (15)$$

Интегральное уравнение для краевой задачи для уравнения (15) при краевых условиях (8)-(9) имеет вид:

$$w(x) - \frac{\rho A p^2}{EJ} \int_0^L G(x, \xi) w(\xi) d\Omega_\xi$$

или

$$w(x) - \lambda \int_0^L G(x, \xi) w(\xi) d\Omega_\xi \quad (16)$$

где

$$\lambda = \frac{\rho A p^2}{EJ}$$

Находим (используем Maple)

$$a_2 = \int_0^L \int_0^L G^2(x, \xi) dx d\xi = \frac{11L^8}{1680}$$

Следовательно

$$\lambda_1 = \frac{\rho A p_1^2}{EJ} \geq \frac{\sqrt{1680}}{\sqrt{11}L^4}$$

Окончательно получаем:

$$\rho_1 \geq \sqrt[4]{\frac{1680}{11}} \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{A\rho}} = \frac{3.515435}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{A\rho}}$$

Таким образом, построена оценка первой собственной частоты

В следующих трёх вариантах рассматривается балка длины  $L$ , сечение которой является правильным квадратом со стороной  $h$ , а механические параметры  $E$ ,  $\rho$  неизменны по длине при следующих краевых условиях:

Вариант 1: Левый конец балки глухо заделан, правый — шарнирно опёрт

$$w(0) = w'(0) = w(L) = 0,$$

Решение ищем в виде:

$$w = \alpha_1 x^2(x - L) + \alpha_2 x^3(x - L),$$

Вариант 2: Оба конца балки глухо заделаны

$$w(0) = w'(0) = w(L) = w'(L) = 0,$$

Решение ищем в виде:

$$w = \alpha_1 \left[ (L/2)^2 - x^2 \right]^2 + \alpha_2 x \left[ (L/2)^2 - x^2 \right]^2,$$

Вариант 3: Оба конца балки свободны Решение ищем в виде:

$$w = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3,$$

Вариант 4:

Оба конца балки шарнирно опёрты.

Решение ищем в виде:

$$w = \alpha_1 \sin \frac{\pi x}{L} + \alpha_2 \sin \frac{2\pi x}{L},$$

В следующих двух вариантах рассматривается балка длины  $L$ , сечение которой является правильным квадратом со стороной  $0.5 * h$  при  $x < L/2$  и  $h$  при  $x > L/2$ , а механические параметры  $E, \rho$  неизменны по длине при следующих краевых условиях:

Вариант 5:

Оба конца балки шарнирно опёрты.

Решение ищем в виде:

$$w = \alpha_1 \sin \frac{\pi x}{L} + \alpha_2 \sin \frac{2\pi x}{L},$$

Вариант 6: Оба конца балки глухо заделаны

$$w(0) = w'(0) = w(L) = w'(L) = 0,$$

Решение ищем в виде:

$$w = x(L - x) \left[ \alpha_1 \sin \frac{\pi x}{L} + \alpha_2 \sin \frac{2\pi x}{L} \right],$$

### Содержание задания:

- При помощи метода Рунца найти оценку сверху для двух первых собственных частот колебаний. Первую свободную частоту оценить снизу.

# Литература I

-  И. М. Бабаков.  
Теория колебаний.  
М.:Наука, 1968.
-  С. Г. Михлин.  
Вариационные метода в математической физике.  
М.:Главная редакция физико-математической  
литературы, 1970.