

Теорема об умножении комплексных рядов. Комплексная экспонента $\exp z$, комплексные тригонометрические функции: определение и свойства. Комплексные гиперболические функции: определение, связь с комплексными тригонометрическими функциями. Комплексный логарифм $\operatorname{Ln} z$: определение и свойства. Парадокс Бернулли и его объяснение. Однозначные ветви и точки ветвления логарифма. Понятие о римановых поверхностях, построение римановых поверхностей для функций $z^{1/n}$ и $\operatorname{Ln} z$. Общее определение операции возведения в степень для комплексных чисел и ее свойства. Степенная z^b и показательная a^z функции, их свойства. Обратные тригонометрические функции, вывод формулы для арксинуса.

Критерий дифференцируемости в точке функции комплексного переменного в терминах условий Коши-Римана, примеры недифференцируемых функций.

Интеграл от комплекснозначной функции: определение. Замена параметра для гладкого пути, теорема о том, что пути, полученные путем замены параметра, образуют класс эквивалентности. Ориентированная гладкая и кусочно-гладкая кривая в комплексной плоскости: определения. Криволинейный интеграл по ориентированной гладкой кривой: определение и доказательство его корректности. Свойство интеграла по противоположно ориентированной кривой. Оценка модуля интеграла по кусочно-гладкой кривой. Первообразная функция: определение, теорема Ньютона-Лейбница, следствие. Достаточное условие существования первообразной в терминах значения интеграла по произвольной замкнутой кусочно-гладкой кривой. Две теоремы об аппроксимации (обе теоремы без доказательства). Интегральной теоремы Коши. Пример, показывающий, что условие односвязности области является существенным. Два следствия из интегральной теоремы Коши. Интегральная формула Коши.

Теорема о разложении аналитической функции в степенной ряд, следствия. Теорема Морера. Теорема Вейерштрасса для последовательности аналитических функций, следствие для рядов. Теорема о нулях аналитической функции. Представление аналитической функции в окрестности изолированного нуля, следствие. Теорема о сгущении нулей, следствия (теорема единственности, принцип аналитического продолжения). Примеры применения теоремы единственности (2 примера). Пример ситуации, когда теорема единственности неприменима.

Определение ряда Лорана, теорема о разложении функции, аналитической в кольце, в ряд Лорана. Разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Особые точки однозначного характера и их классификация. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана. Критерий того, что особая точка является устранимой, в терминах разложения в ряд Лорана, следствие. Критерий того, что особая точка является полюсом, в терминах разложения в ряд Лорана; следствие. Критерий того, что особая точка является существенно особой точкой, в терминах разложения в ряд Лорана. Теоремы Сохоцкого и Пикара (теорема Пикара без доказательства).

Вычет аналитической функции в точке: определение в терминах ряда Лорана и в терминах интеграла по контуру. Две формулы для вычисления вычета в случае простого полюса. Формула для вычисления вычета в случае кратного полюса. Простейший вариант основной теоремы теории вычетов. Вычет в бесконечно удаленной точке: определение, теорема о вычете в бесконечно удаленной точке. Общий вариант основной теоремы теории вычетов. Вычисление вещественных тригонометрических интегралов с применением теории вычетов, пример: интеграл от 0 до 2π от функции $1/(1 - 2a \cos \varphi + a^2)$, $0 < a < 1$. Вычисление вещественных несобственных интегралов от рациональных функций, пример: интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ от функции $(x^2 + 1)^{-4}$. Лемма Жордана и вычисление интегралов Фурье, пример: интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ от функции $\cos(5x)/(x - 1)/(x^2 - 2x + 5)$.

Теорема об интегрировании логарифмической производной. Следствие о приращении аргумента функции f при обходе контура Γ (принцип аргумента). Теорема Руше. Доказательство основной теоремы алгебры с использованием теоремы Руше. Пример использования теоремы Руше для определения числа корней полинома в области (полином $z^9 - 6z^4 + z^3 - 2z^2 + 1$ в круге $|z| < 1$).

Основные определения, формулы и теоремы

Определение и свойства функций комплексного переменного $\exp z$, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{Ln} z$. Парадокс Бернулли и его объяснение. Однозначные ветви многозначных функций, точки ветвления и понятие о римановых поверхностях (на примерах функций $z^{1/n}$ и $\operatorname{Ln} z$). Условия Коши-Римана. Определение криволинейного интеграла по гладкой и кусочно-гладкой кривой. Определение аналитической функции и ее основные свойства (интегральная теорема Коши, теорема о разложении в ряд, теорема Морера). Две теоремы об аппроксимации. Интегральная формула Коши. Формулы для коэффициентов ряда Тейлора аналитической функции. Теорема Вейерштрасса для последовательностей и рядов аналитических функций. Теорема о нулях аналитической функции, кратность нуля. Теорема единственности и понятие аналитического продолжения. Ряд Лорана и формулы для его коэффициентов. Классификация особых точек однозначного характера и их связь со свойствами ряда Лорана, кратность полюса. Теоремы Сохоцкого и Пикара. Определение вычета и формулы для его нахождения в полюсах (простом и кратном). Вычет в бесконечно удаленной точке. Три варианта основной теоремы теории вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше.