# Работа в режиме интерфейса Worksheet mode

Всюду далее примеры работы пакета Maple будут приведены в режиме интерфейса Worksheet Mode. Основным режимом ввода команд и выражений является математический (Math Mode). Также используется и текстовый режим (Text Mode). При выполнении заданий и упражнений рекомендуется использовать возможности «двумерной математики» Maple в режиме ввода Math Mode.

## Функции в Maple. Решение уравнений и неравенств

1. Способы задания функций. Замена переменных.
2. Решение уравнений.
3. Решение неравенств.

### §1. Способы задания функций. Замена переменных

В *Maple* имеется несколько способов задания функции.

**Способ 1.** Определение функции как выражения Maple с помощью оператора присваивания (**:=**): какому-то выражению присваивается имя, например:

> $f := \sin(x) + \cos(x);$

$$f := \sin(x) + \cos(x)$$

***Внимание***: строго говоря, данный способ не является *способом задания функции* в терминах Maple. В данном случае задается выражение, имеющее определенное имя. В приведенном выше примере переменной $f$ присваивается значение выражения $\sin(x)+\cos(x)$, содержащего переменную *x*.

Если задать конкретное значение переменной *x*, то получится значение функции (переменной) *f* для этого *x*. Продолжим предыдущий пример и вычислим значение $f$ при $x=\pi/4$. Например, это можно сделать следующим образом:

> $x := \frac{\pi}{4}; f$

$$x := \frac{1}{4}\pi$$

$$\sqrt{2}$$

После выполнения этих команд переменная *x* будет иметь присвоенное значение $\pi/4$:

> $x$

$$\frac{1}{4}\pi$$

Чтобы не присваивать переменной конкретного значения, удобнее вместо предыдущих команд применить команду **`eval`** в виде **`eval(expr,x=a)`** либо команду **`subs`** в виде **`subs(x=a,expr)`**. Команда **`eval`** вычисляет значение выражения **`expr`**, содержащего переменную **`x`**, в точке **`x=a`**. Команда **`subs`** выполняет подстановку **`x=a`** в выражение **`expr`**.

В данном случае обе команды дадут один и тот же результат:

> $eval\left(f, x = \frac{\pi}{4}\right)$

$$\sqrt{2}$$

Или:

> $subs\left(x = \frac{\pi}{4}, f\right)$

$$\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)$$

> $simplify(\%)$

$$\sqrt{2}$$

Здесь использован символ (`%`) для вызова предыдущей команды.

После выполнения любой из этих команд *x* останется свободной переменной:

> $x$

$$x$$

В случае функции двух или более переменных их значения указываются в квадратных скобках через запятую (т.е., задаются как *список*):

> $f := \sin(x) + \cos(y)$

$$f := \sin(x) + \cos(y)$$

> $eval\left(f, \left[x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{\pi}{6}\right]\right)$

$$\sqrt{3}$$

> $subs\left(\left[x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{\pi}{6}\right], f\right)$

$$\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)$$

> $simplify(\%)$

$$\sqrt{3}$$

Все вычисления в *Maple* по умолчанию производятся символьно, то есть результат будет содержать в явном виде рациональные дроби, радикалы и иррациональные константы, такие как, $e, \pi$ и другие. Чтобы получить приближенное значение в виде числа с плавающей запятой, следует использовать команду **`evalf(expr,t)`**, где **`expr`** – выражение, **`t`** – точность, выраженная в числах после запятой. Например, в продолжение предыдущего примера, вычислим полученное значение функции приближенно:

> $evalf(\%)$

$$1.73205080\!\!:$$

Здесь использован символ (`%`) для вызова предыдущей команды.

**<u>Способ 2.</u>** Определение функции с помощью функционального оператора, который ставит в соответствие набору переменных **`(x1,x2,…)`** одно или несколько выражений **`(f1,f2,…)`**. Например, определение функции двух переменных с помощью функционального оператора выглядит следующим образом:

> $f := (x, y) \rightarrow \sin(x + y)$

$$f := (x, y) \rightarrow \sin(x + y)$$

| |
|---|
| Символ → в режиме ввода Math Mode автоматически преобразуется из двух введенных с клавиатуры символов ->. |

Обращение к этой функции осуществляется наиболее привычным в математике способом, когда в скобках вместо аргументов функции указываются конкретные значения переменных. В продолжение предыдущего примера вычислим значение функции:

> $f\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

$$1$$

**Способ 3.** С помощью команды **unapply(expr,x1,x2,…)**, где **expr** – выражение, **x1,x2,…** – набор переменных, от которых оно зависит, можно преобразовать *выражение* **expr** в *функциональный оператор*. Например:

> $f := unapply\left(x^2+y^2, x, y\right);$

$$f := (x,y) \to x^2 + y^2$$

> $f(-7,5);$

$$74$$

В *Maple* имеется возможность определения неэлементарных функций вида

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x),\ x < a_1 \\ f_2(x),\ a_1 < x < a_2 \\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots. \\ f_n(x),\ x > a_n \end{cases}$$

посредством команды **piecewise(cond_1,f1, cond_2, f2, …).**
Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ x<0 \\ x,\ 0 \le x < 1 \\ \sin x,\ x \ge 1 \end{cases}$$

записывается следующим образом:

> $f := piecewise\left(x<0, 0, 0 \le x \textbf{ and } x < 1, x, x \ge 1, \sin(x)\right);$

$$f := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x \textbf{ and } x < 1 \\ \sin(x) & 1 \le x \end{cases}$$

**Важно:** для быстрого набора используйте последний шаблон из палитры Expression

$$\begin{cases} -x & x < a \\ x & x \ge a \end{cases}$$

Замена переменных в выражении осуществляется командой **subs**:

> $subs\left(x = r^{\frac{1}{3}}, 3*x*\ln(x^3)\right);$

$$3\, r^{1/3} \ln(r)$$

> $subs\left([x=3*t, y=t^2], \sin(x)-\cos(y)\right)$

$$\sin(3\,t) - \cos(t^2)$$

Эту команду можно также использовать для вычисления значения функции при заданных значениях ее переменных, если функция задана как выражение (первым способом). Однако, данная команда не эквивалентна команде **eval**.

---

Не забудьте, что выполнение всех последующих заданий должно начинаться со строки комментариев, содержащей «Задание №», где № – номер задания. Также помните, что для правильности вычислений перед выполнением каждого пункта задания следует выполнять команду **restart**. Перед выполнением контрольных заданий следует набрать комментарий «Контрольные задания». Эти правила оформления относятся ко всем лабораторным работам.

---

## Задание 1.

1. Определите функцию $f=\sqrt{1-x^2-y^2}$ и перейдите в ней к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Упростите полученное выражение. Для этого наберите:

> $f := \mathrm{sqrt}(1-x^2-y^2)$

$$f := \sqrt{1-x^2-y^2}$$

> $f := eval(f, [x=\rho\cos(\phi), y=\rho\sin(\phi)])$

$$f := \sqrt{1-\rho^2\cos(\phi)^2-\rho^2\sin(\phi)^2}$$

> $f := simplify(\%);$

$$f := \sqrt{1-\rho^2}$$

2. Определите функцию $f(x)=\begin{cases} x, & x<-1 \\ -x^2, & -1\le x<1 \\ -x, & x\ge 1\end{cases}$ и прибавьте к ней $x$. Для этого наберите:

> $f := piecewise(x<-1, x, -1\le x \textbf{ and } x<1, -x\text{^}2, x\ge 1, -x);$

$$f := \begin{cases} x & x<-1 \\ -x^2 & -1\le x \textbf{ and } x<1 \\ -x & 1\le x\end{cases}$$

> $\% + x : simplify(\%);$

$$\begin{cases} 2x & x<-1 \\ x-x^2 & x<1 \\ 0 & 1\le x\end{cases}$$

## §2. Решение уравнений

**<u>Решение обыкновенных уравнений.</u>**

Для решения уравнений в *Maple* существует универсальная команда **`solve(eq,x)`**, где **`eq`** – уравнение, **`x`** – переменная, относительно которой уравнение надо разрешить. В результате выполнения этой команды в строке вывода появится выражение, которое является решением данного уравнения. Например:

> $solve(a*x+b=c, x)$

$$-\frac{b-c}{a}$$

Если уравнение имеет несколько решений, которые вам понадобятся для дальнейших расчетов, то команде **`solve`** следует присвоить какое-нибудь имя **`name`**. Обращение к какому-либо **`k`**–ому решению данного уравнения производится указанием его имени с номером решения **`k`** в квадратных скобках: **`name[k]`**. Переменная с именем будет иметь тип «последовательность выражений», поэтому обращение к одному из решений задается как обращение к одному из элементов последовательности *exprseq*. Например:

> $x := solve(x^2-a=0, x);$

$$x := \sqrt{a}, -\sqrt{a}$$

> $x[1]$

$$\sqrt{a}$$

> $x[2]$

$$-\sqrt{a}$$

> $x[1]+x[2]$

$$0$$

**Решение систем уравнений.**

Системы уравнений решаются с помощью такой же команды **solve({eq1,eq2,…},[x1,x2,…])**, только теперь в параметрах команды следует указывать в первых (фигурных или квадратных) скобках через запятую уравнения, а во вторых (квадратных) скобках перечисляются через запятую переменные, относительно которых требуется решить систему. Если вам будет необходимо для дальнейших вычислений использовать полученные решения уравнений, то команде **solve** следует присвоить какое-нибудь имя **s**. Затем выполняется команда присвоения результатов решения искомым неизвестным **assign(s)**. После этого над решениями можно будет производить математические операции.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} ax - y = 1, \\ 5x + ay = 1. \end{cases}$$

> $s := solve(\{a*x-y=1, 5*x+a*y=1\}, [x,y])$

$$s := \left[\left[x = \frac{a+1}{5+a^2}, y = \frac{-5+a}{5+a^2}\right]\right]$$

> $assign(s); simplify(x-y)$

$$\frac{6}{5+a^2}$$

**Численное решение уравнений.**

Для численного решения уравнений, в тех случаях, когда уравнения не имеют аналитических решений, используется специальная команда **fsolve(eq,x)**, параметры которой такие же, как и команды **solve**. Например:

> $x := fsolve(\cos(x)=x, x)$

$$x := 0.739085133$$

**Решение тригонометрических уравнений.**

Команда **solve**, примененная для решения тригонометрического уравнения, выдает только главные решения, то есть решения в интервале $[0,2\pi]$. Для того, чтобы получить все решения, следует предварительно ввести дополнительную команду **_EnvAllSolutions:=true.**

| |
|---|
| **Важно**: для ввода символа _ в Math Mode следует набирать _. В Text Mode этот символ набирается обычным образом. |

Рассмотрим пример решения тригонометрического уравнения:

> $solve(\sin(x)=\cos(x), x)$

$$\frac{1}{4}\pi$$

Без применения дополнительной команды **_EnvAllSolutions:=true** команда **solve** выдаст не все решения, а только те, которые лежат в интервале $[0,2\pi]$. С применением дополнительной команды **_EnvAllSolutions:=true** будут найдены все решения:

$\_EnvAllSolutions := true :$

> $solve(\sin(x) = \cos(x), x)$

$$\frac{1}{4}\pi + \pi\_Z2\sim$$

В *Maple* символ *_Z~* обозначает константу целого типа, поэтому решение данного уравнения в привычной форме имеет вид $x := \pi/4 + \pi n$, где $n$ – целые числа.

**<u>Решение сложных уравнений.</u>**

При решении сложных уравнений со степенями или систем уравнений для получения решения в явном виде перед командой **`solve`** следует ввести дополнительную команду **`_EnvExplicit:=true`**. Рассмотрим пример уравнения со степенями:

> $eq := x^4 - 2x^3 + 2$

$$eq := x^4 - 2x^3 + 2$$

Без применения дополнительной команды **`_EnvExplicit:=true`** команда **`solve`** даст результат:

> $solve(eq, x)$

$$\mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 2\_Z^3 + 2, index = 1), \mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 2\_Z^3 + 2, index = 2), \mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 2\_Z^3 + 2, index = 3), \mathrm{RootOf}(\_Z^4 - 2\_Z^3 + 2, index = 4)$$

Заметим, что применение команды **`evalf`** позволяет получить решения в приближенном виде, без функции RootOf:

> $evalf(solve(eq));$

$$1.529085514 + 0.2570658641 I, -0.5290855136 + 0.7429341359 I, -0.5290855136 - 0.7429341359 I, 1.529085514 - 0.2570658641 I$$

С применением дополнительной команды **`_EnvExplicit:=true`** корни будут вычислены в явном аналитическом виде:

> $\_EnvExplicit := true : solve(eq, x);$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2I}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2I}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\sqrt{4 + 2I}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}\sqrt{4 + 2I}$$

## Задание 2.

1. Найти все решения системы уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x^2 + xy = 2. \end{cases}$

   Наберите:

```
> eq:={x^2-y^2=1,x^2+x*y=2};
> _EnvExplicit:=true:
> s:=solve(eq,{x,y});
```

$$eq := \{x^2 - y^2 = 1, x^2 + x\,y = 2\}$$

$$s := \left\{y = \frac{1}{3}\sqrt{3}, x = \frac{2}{3}\sqrt{3}\right\}, \left\{y = -\frac{1}{3}\sqrt{3}, x = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right\}$$

Теперь найдите сумму двух наборов решений. Наберите:

```
> x1:=subs(s[1],x): y1:=subs(s[1],y):
```

```
 x2:=subs(s[2],x): y2:=subs(s[2],y):
> x1+x2; y1+y2;
```

Чему равны эти суммы решений?

2. Численно решите уравнение $x^2 = \cos(x)$. Наберите:

```
> x=fsolve(x^2=cos(x),x);
```

$$x=.8241323123$$

3. Найдите все решения уравнения $5\sin x + 12\cos x = 13$. Наберите:

```
> _EnvAllSolutions:=true:
> solve(5*sin(x)+12*cos(x)=13,x);
```

$$\arctan\left(\frac{5}{12}\right) + 2\pi\_Z1\sim, \arctan\left(\frac{5}{12}\right) + 2\pi\_Z2\sim$$

## §3. Решение неравенств

**Решение простых неравенств.**

Команда **solve** применяется также для решения неравенств. Решение неравенства выдается в виде интервала изменения искомой переменной. В том случае, если решение неравенства полуось, то в поле вывода появляется конструкция вида RealRange(–∞, Open($a$)), которая означает, что $x\in(-\infty, a)$, $a$ – некоторое число. Слово Open означает, что интервал с открытой границей. Если этого слова нет, то соответствующая граница интервала включена во множество решений. Например:

> $s := solve(\text{sqrt}(x+3) < \text{sqrt}(x-1) + \text{sqrt}(x-2), x)$

$$s := RealRange\left(Open\left(\frac{2}{3}\sqrt{21}\right), \infty\right)$$

Если вы хотите получить решение неравенства не в виде интервального множества типа $x\in(a, b)$, а в виде ограничений для искомой переменной типа $a<x$, $x< b$, то переменную, относительно которой следует разрешить неравенство, следует указывать в фигурных скобках. Например:

> $solve(1-1/2*\ln(x) > 2, \{x\});$

$$\left\{x < \frac{1}{e^2}, 0 < x\right\}$$

**Решение систем неравенств.**

С помощью команды **solve** можно также решить систему неравенств. Например:

> $solve(\{x+y \geq 2, x-2*y \leq 1, x-y \geq 0, x-2*y \geq 1\}, \{x, y\});$

$$\left\{\frac{5}{3} \leq x, y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right\}$$

## Задание 3.

1. Решите неравенство $13x^3 - 25x^2 - x^4 - 129x + 270 > 0$. Наберите:

```
> solve(13*x^3-25*x^2-x^4-129*x+270>0,x);
```

RealRange(Open(-3), Open(2)), RealRange(Open(5), Open(9))

В тетради запишите этот результат в аналитическом виде. Получите решение этого неравенства в виде ограничений для искомой переменной. Проделайте это самостоятельно.

2. Решите неравенство $e^{(2x+3)} < 1$. Наберите:

```
> solve(exp(2*x+3)<1,x);
```

$$\mathrm{RealRange}\left(-\infty, \mathrm{Open}\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$$

Теперь получите самостоятельно решение этого неравенства в виде ограничений для искомой переменной.

**Литература**

*Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г.* Методы решения математических задач в *Maple*: Учебное пособие – Белгород: Изд. Белаудит, 2001. – 116 с.