

## Тема 4 б)

### Контрольные задания

#### Интегрирование функции одной переменной

1. Вычислить неопределенный интеграл  $\int \frac{(x^3 - 6)dx}{x^4 + 6x^2 + 8}$ .
2. Вычислить определенные интегралы  $\int_1^2 2x^2 dx$ ,  $\int_{-2}^2 \operatorname{tg}(x) dx$ ,  $\int_{-1}^1 \operatorname{tg}(x) dx$ . Почему значение интеграла может быть не определено?
3. Вычислить несобственный интеграл  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)\cos(bx)dx}{x}$  при  $a > 0$   $b > 0$  для случаев  $a > b$ ,  $a = b$ ,  $a < b$ .
4. Численно найти интеграл  $\int_{0,1}^{0,2} \frac{\sin(3x)e^{-x^2}}{x^4} dx$ .
5. Вычислить определенный интеграл  $\int_{-1}^2 \sqrt{x} + \sin(x) dx$ . С помощью команд пакета student или Student[Calculus1] посчитать значения левой, правой и средней Риманновских сумм, изобразите их графически (см. Лекцию 4). Выяснить, при каком количестве аппроксимирующих прямоугольников значение определенного интеграла и его средней Риманновской суммы совпадают с точностью до  $10^{-4}$ .
6. Полностью проделать все этапы вычисления интеграла  $\int_0^{\pi/2} x^3 \cos x dx$  по частям.
7. Вычислить интеграл  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$  с помощью универсальной подстановки  $\operatorname{tg}(x/2) = t$ .

#### Интегрирование функции многих переменных

8. Вычислить двойной интеграл  $\iint_D x - y^2 dx dy$ . Область интегрирования  $D$  ограничена графиками функций  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = x$ ,  $y = 2 - x^2$ . Проиллюстрировать графический смысл двойного интеграла: изобразить графически область интегрирования (здесь можно использовать команду implicitplot) и поверхность (заданную подынтегральной функцией), ограничивающую объем цилиндра. Для вычисления интеграла использовать соответствующую команду из пакета student или команду MultiInt из пакета Student[MultivariateCalculus] и вычисление с помощью повторного интеграла. Сравнить действия двух команд.
9. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2$ ,  $y = -x$ . Для этого построить графики указанных функций и вычислить площадь с помощью интеграла.

10. Вычислить тройной интеграл  $\int_0^{e-1} dx \int_0^{e-x-1} dy \int_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)dz}{(x-e)(x+y-e)}$ . Использовать соответствующую команду из пакета student или команду MultiInt из пакета Student[MultivariateCalculus] и вычисление с помощью повторного интеграла. Сравнить действия двух команд.

### Сумма и произведение ряда

11. Найти сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$  и сумму первых  $N$  членов.
12. Найти функцию, к которой сходится степенной ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ .
13. Вычислить бесконечное произведение  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$  и произведение первых 10 членов, найти приближенное значение.

### Интегральные преобразования (дополнительные задания на бонусные баллы)

14. Найти преобразование Фурье функции  $f(x) = e^{-ax^2}$ ,  $a > 0$ .
15. Найти изображения Лапласа и построить их графики для следующих функций:  
а)  $\frac{\sin t}{t}$ ; б)  $\frac{1 - \cos 2t}{t} e^{-3t}$ .
16. Найти оригинал Лапласа функции  $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p^2+1)}$  и построить его график.
17. Дана функция  $f(t) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos xt}{x^2} dx$ , найти ее изображение Лапласа.

### Литература

Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г. Методы решения математических задач в Maple: Учебное пособие – Белгород: Изд. Белаудит, 2001. – 116 с.