

Тема 4 б)

Контрольные задания

Интегрирование функции одной переменной

1. Вычислить неопределенный интеграл $\int \frac{(x^3 - 6)dx}{x^4 + 6x^2 + 8}$.
2. Вычислить определенные интегралы $\int_1^2 2x^2 dx$, $\int_{-2}^2 \operatorname{tg}(x) dx$, $\int_{-1}^1 \operatorname{tg}(x) dx$. Почему значение интеграла может быть не определено?
3. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)\cos(bx)dx}{x}$ при $a > 0$ $b > 0$ для случаев $a > b$, $a = b$, $a < b$.
4. Численно найти интеграл $\int_{0,1}^{0,2} \frac{\sin(3x)e^{-x^2}}{x^4} dx$.
5. Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^2 \sqrt{x} + \sin(x) dx$. С помощью команд пакета student или Student[Calculus1] посчитать значения левой, правой и средней Риманновских сумм, изобразите их графически (см. Лекцию 4). Выяснить, при каком количестве аппроксимирующих прямоугольников значение определенного интеграла и его средней Риманновской суммы совпадают с точностью до 10^{-4} .
6. Полностью проделать все этапы вычисления интеграла $\int_0^{\pi/2} x^3 \cos x dx$ по частям.
7. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$ с помощью универсальной подстановки $\operatorname{tg}(x/2) = t$.

Интегрирование функции многих переменных

8. Вычислить двойной интеграл $\iint_D x - y^2 dx dy$. Область интегрирования D ограничена графиками функций $x = 0$, $x = 1$, $y = x$, $y = 2 - x^2$. Проиллюстрировать графический смысл двойного интеграла: изобразить графически область интегрирования (здесь можно использовать команду implicitplot) и поверхность (заданную подынтегральной функцией), ограничивающую объем цилиндра. Для вычисления интеграла использовать соответствующую команду из пакета student или команду MultiInt из пакета Student[MultivariateCalculus] и вычисление с помощью повторного интеграла. Сравнить действия двух команд.
9. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -x$. Для этого построить графики указанных функций и вычислить площадь с помощью интеграла.

10. Вычислить тройной интеграл $\int_0^{e-1} dx \int_0^{e-x-1} dy \int_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)dz}{(x-e)(x+y-e)}$. Использовать соответствующую команду из пакета student или команду MultiInt из пакета Student[MultivariateCalculus] и вычисление с помощью повторного интеграла. Сравнить действия двух команд.

Сумма и произведение ряда

11. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ и сумму первых N членов.
12. Найти функцию, к которой сходится степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.
13. Вычислить бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$ и произведение первых 10 членов, найти приближенное значение.

Интегральные преобразования (дополнительные задания на бонусные баллы)

14. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$.
15. Найти изображения Лапласа и построить их графики для следующих функций:
а) $\frac{\sin t}{t}$; б) $\frac{1 - \cos 2t}{t} e^{-3t}$.
16. Найти оригинал Лапласа функции $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p^2+1)}$ и построить его график.
17. Дана функция $f(t) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos xt}{x^2} dx$, найти ее изображение Лапласа.

Литература

Саботченко С.Е., Кузьмичева Т.Г. Методы решения математических задач в Maple: Учебное пособие – Белгород: Изд. Белаудит, 2001. – 116 с.