Исследование устойчивости стационарных состояний линейных автономных динамических систем первого порядка. Построение фазового портрета

Для исследования устойчивости стационарных состояний и построения фазового портрета линейной динамической системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \qquad (1)$$

или уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} \qquad (2)$$

надо выполнить следующие действия.

1. Определить особые точки системы.
2. Найти корни характеристического уравнения системы (=собственные числа матрицы коэффициентов системы) и в зависимости от их вида определить характер особых точек.
3. Построить фазовый портрет на плоскости (x,y), изобразив поле направлений и несколько траекторий, характеризующих тип каждой особой точки.

Особая точка динамической системы

Рассмотрим систему двух автономных обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида. *Автономными* называются уравнения, правая часть которых не зависит явно от времени.

Особой точкой системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

или уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

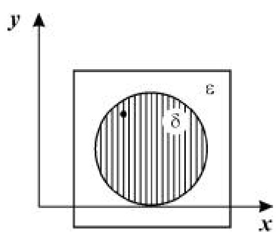
где функции P и Q непрерывно дифференцируемы, называется такая точка, в которой $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$.

Синонимы термина «*особая точка*»: *стационарное состояние, состояние равновесия*

Устойчивость особой точки

Устойчива или нет особая точка, определяется тем, уйдет или нет изображающая точка при малом отклонении от стационарного состояния. Применительно к системе из двух уравнений определение устойчивости на языке ε, δ выглядит следующим образом.

Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия (ε) *можно указать область* $\delta(\varepsilon)$, *окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области* δ, *никогда не достигнет границы* ε. (см. рис.)



Виды фазовых портретов линейных систем

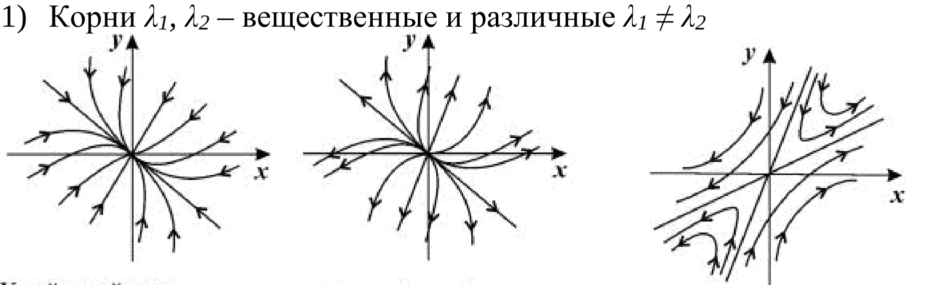
Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений (1). Очевидно, что от системы (1) можно перейти к уравнению (2), и наоборот.

Особой точкой системы (1) будет точка (0,0), если определитель матрицы коэффициентов системы отличен от нуля. Если же определитель матрицы коэффициентов системы обращается в ноль, значит, коэффициенты правых частей уравнений системы (1) пропорциональны друг другу $a/b=c/d$, и система имеет своими состояниями равновесия все точки прямой $ax+by=0$.

Пусть λ_1, λ_2 – корни характеристического уравнения $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Если оба корня <u>ненулевые</u> (т.е. определитель матрицы системы отличен от нуля), то возможны следующие варианты:

1) Корни λ_1, λ_2 – вещественные и различные $\lambda_1 \neq \lambda_2$

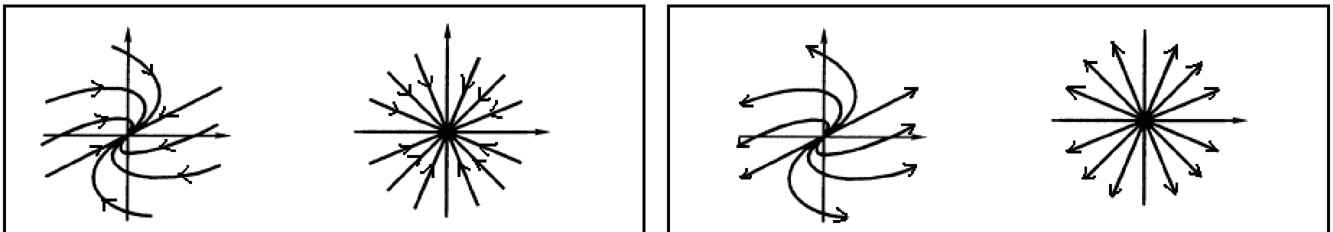


Устойчивый узел. (λ_1, λ_2 отрицательны)

Неустойчивый узел. (λ_1, λ_2 положительны)

Седло (λ_1, λ_2 - разных знаков) неустойчивое состояние равновесия

2) Корни λ_1, λ_2 – вещественные и равны между собой $\lambda_1 = \lambda_2$



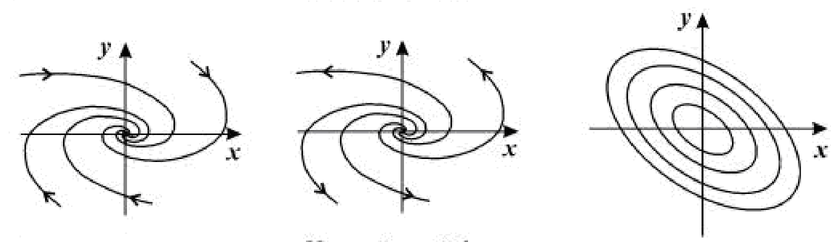
Устойчивый вырожденный узел (корень отрицателен)

Частный случай: устойчивый дикритический узел

Неустойчивый вырожденный узел (корень положителен)

Частный случай: неустойчивый дикритический узел

3) Корни λ_1, λ_2 – комплексные



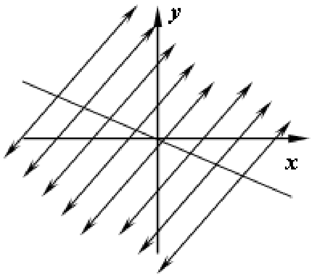
Устойчивый фокус (Re $\lambda_{1,2} < 0$)

Неустойчивый фокус (Re $\lambda_{1,2} > 0$)

Центр (λ_1, λ_2 - чисто мнимые) устойчивое состояние равновесия

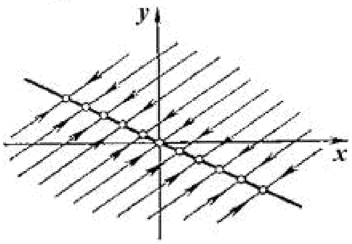
Если <u>один из корней равен нулю</u> (т.е. определитель матрицы системы равен нулю), то особая точка вырождается в прямую и называется в этом случае *непростой*. Возможные варианты:

1) Один из корней равен нулю, а другой – положителен



Непростая особая точка,
неустойчивое состояние равновесия

2) Один из корней равен нулю, а другой – отрицателен



Непростая особая точка, устойчивое
состояние равновесия

Примеры построения фазовых портретов линейных систем в Maple

Пример 1.

$$y' = \frac{2x+y}{3x+4y}$$

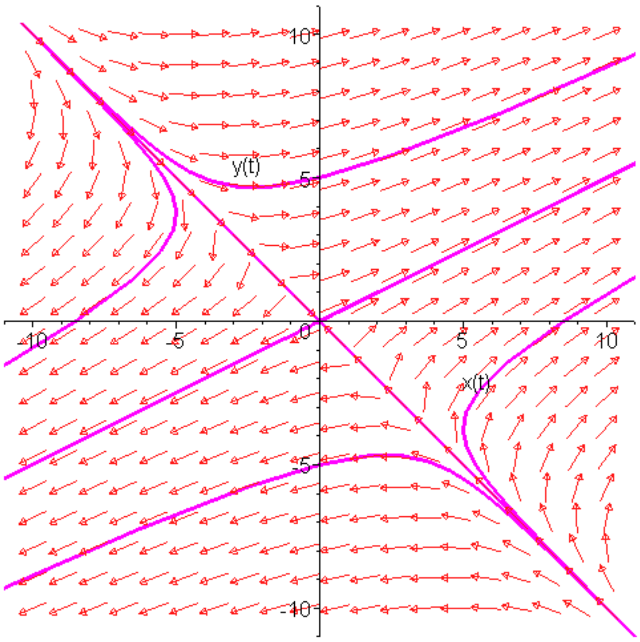


Рис.1 Фазовый портрет: седло

Пример 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$$

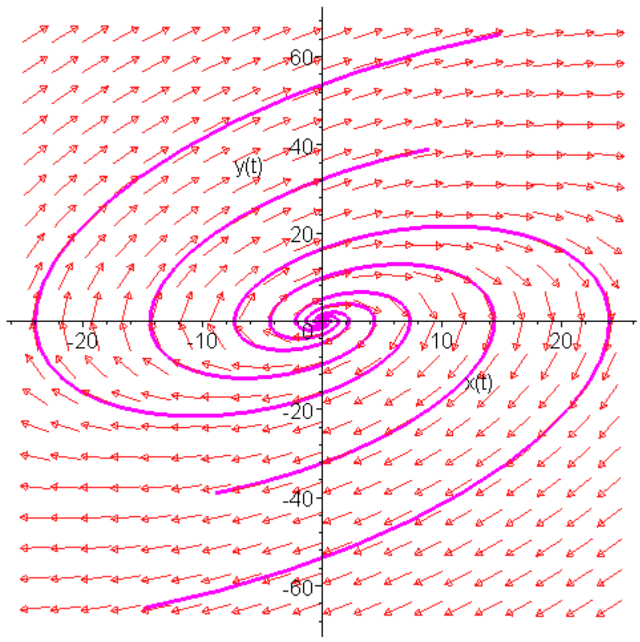


Рис.2 Фазовый портрет: неустойчивый фокус