

16 (повышенный уровень, время – 2 мин)

Тема: Кодирование чисел. Системы счисления.

Что нужно знать:

- принципы кодирования чисел в позиционных системах счисления
- чтобы перевести число, скажем, 12345_N , из системы счисления с основанием N в десятичную систему, нужно умножить значение каждой цифры на N в степени, равной ее разряду:

4 3 2 1 0 ← разряды

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5_N = 1 \cdot N^4 + 2 \cdot N^3 + 3 \cdot N^2 + 4 \cdot N^1 + 5 \cdot N^0$$

$$N^0 = 1$$

- последняя цифра записи числа в системе счисления с основанием N – это остаток от деления этого числа на N

- две последние цифры – это остаток от деления на N^2 , и т.д.

- число 10^N записывается как единица и N нулей: $10^N = \underbrace{10 \dots 0}_N$

- число $10^N - 1$ записывается как N девяток: $10^N - 1 = \underbrace{9 \dots 9}_N$

- число $10^N - 10^M = 10^M \cdot (10^{N-M} - 1)$ записывается как $N-M$ девяток, за которыми стоят M нулей: $10^N - 10^M = \underbrace{9 \dots 9}_{N-M} \underbrace{0 \dots 0}_M$

- число 2^N в двоичной системе записывается как единица и N нулей: $2^N = \underbrace{10 \dots 0}_2$

- число $2^N - 1$ в двоичной системе записывается как N единиц: $2^N - 1 = \underbrace{1 \dots 1}_2$

- число $2^N - 2^K$ при $K < N$ в двоичной системе записывается как $N-K$ единиц и K нулей:

$$2^N - 2^K = \underbrace{1 \dots 1}_{N-K} \underbrace{0 \dots 0}_K$$

- поскольку $2^N + 2^N = 2 \cdot 2^N = 2^{N+1}$, получаем $2^N = 2^{N+1} - 2^N$, откуда следует, что $-2^N = -2^{N+1} + 2^N$

- число 3^N записывается в троичной системе как единица и N нулей: $3^N = \underbrace{10 \dots 0}_3$

- число $3^N - 1$ записывается в троичной системе как N двоек: $3^N - 1 = \underbrace{2 \dots 2}_3$

- число $3^N - 3^M = 3^M \cdot (3^{N-M} - 1)$ записывается в троичной системе как $N-M$ двоек, за которыми стоят M нулей: $3^N - 3^M = \underbrace{2 \dots 2}_{N-M} \underbrace{0 \dots 0}_M$

- можно сделать аналогичные выводы для любой системы счисления с основанием a :

- число a^N в системе счисления с основанием a записывается как единица и N нулей: $a^N = \underbrace{10 \dots 0}_a$

- число $a^N - 1$ в системе счисления с основанием a записывается как N старших цифр этой системы счисления, то есть, цифр $(a-1)$: $a^N - 1 = \underbrace{(a-1)(a-1) \dots (a-1)}_a$

- число $a^N - a^M = a^M \cdot (a^{N-M} - 1)$ записывается в системе счисления с основанием a как $N-M$ старших цифр этой системы счисления, за которыми стоят M нулей: $a^N - a^M = \underbrace{(a-1) \dots (a-1)}_{N-M} \underbrace{0 \dots 0}_M$

Тренировка:

Р-8. Укажите, сколько всего раз встречается цифра 2 в записи чисел 10, 11, 12, ..., 17 в системе счисления с основанием 5.

РЕ 16.2

1. Укажите, сколько всего раз встречается цифра 3 в записи чисел 19, 20, 21, ..., 33 в системе счисления с основанием 6.

П.36. Укажите, сколько всего раз встречается цифра 2 в записи чисел 13, 14, 15, ..., 23 в системе счисления с основанием 3.

18. Запишите десятичное число 100 в системе счисления с основанием 9.

Р-15. Решите уравнение $60_8 + x = 120_7$.

Ответ запишите в шестеричной системе счисления. Основание системы счисления указывать не нужно.

П.67. Решите уравнение $42_5 + x = 1122_3$.

Ответ запишите в четверичной системе счисления. Основание системы счисления указывать не нужно.

П.82. Решите уравнение $60_8 + x = 200_5$.

Ответ запишите в шестеричной системе счисления. Основание системы счисления указывать не нужно.

Р_Е 16.2 № 24. Решите уравнение: $35_6 + x = 35_7$

Ответ запишите в десятичной системе счисления.

=====

Ещё пример задания:

Р-19. Решите уравнение $121_x + 1 = 101_7$.

Ответ запишите в троичной системе счисления. Основание системы счисления указывать не нужно.

П.118. Решите уравнение $224_x + 1 = 101_8$. Ответ запишите в десятичной системе счисления.

Р.Е. 6_1 № 6_1. Запись числа 65_8 в некоторой системе счисления выглядит так: 311q. Найдите основание системы счисления q.

6_3. В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 18 записывается в виде 30. Укажите это основание.

П. 144. Решите уравнение $104_x + 20_x = 84_{10}$. Ответ запишите в двоичной системе счисления.

2_3. Решите уравнение:

$$100_5 + x = 200_4.$$

Ответ запишите в семеричной системе (основание системы счисления в ответе писать не нужно).

2_5. Решите уравнение: $121_x + 1_{10} = 101_8$

Ответ запишите в троичной системе (основание системы счисления в ответе писать не нужно).

2_6. Найдите основание системы счисления, в которой выполнено сложение: $144 + 24 = 201$.

2_7. Чему равно наименьшее основание позиционной системы счисления x, при котором $225_x = 405_y$?

Ответ записать в виде целого числа.

=====

Ещё пример задания:

P-14. Запись десятичного числа в системах счисления с основаниями 3 и 5 в обоих случаях имеет последней цифрой 0. Какое минимальное натуральное десятичное число удовлетворяет этому требованию?

П. 62. Запись натурального числа в системах счисления с основанием 4 и 6 заканчивается на 0. Найдите минимальное натуральное число, удовлетворяющее этим условиям.

П. 16. Десятичное число, переведенное в восьмеричную и в девятеричную систему, в обоих случаях заканчивается на цифру 0. Какое минимальное натуральное число удовлетворяет этому условию?

П. 75. В некоторой системе счисления записи десятичных чисел 68 и 94 заканчиваются на 3. Определите основание системы счисления.

П. 137. Некоторое число X из десятичной системы счисления перевели в системы счисления с основаниями 16, 8. Часть символов при записи утеряна. Позиции утерянных символов обозначены *:

$$X = *5_{16} = *0*_8.$$

Сколько чисел соответствуют условию задачи?

127. Некоторое число X из десятичной системы счисления перевели в системы счисления с основаниями 16, 8, 4. Часть символов при записи утеряна. Позиции утерянных символов обозначены знаком *:

$$X = *7*_{16} = 5*6_8 = ***1*_4$$

Определите число X .

=====

Ещё пример задания:

P-18. Сколько единиц в двоичной записи числа

$$4^{2014} + 2^{2015} - 8$$

P_Е 6_2 № 39. Сколько единиц содержится в двоичной записи значения выражения: $4^{255} + 2^{255} - 255$?

=====

Ещё пример задания:

P-17. Сколько единиц в двоичной записи числа

$$4^{2016} + 2^{2018} - 8^{600} + 6$$

P_е 6_2 №5. Сколько единиц содержится в двоичной записи значения выражения: $8^{2020} + 4^{2017} + 26 - 1$?

P-16. Сколько единиц в двоичной записи числа

$$4^{2016} - 2^{2018} + 8^{800} - 80$$

П. 89. Сколько единиц в двоичной записи числа $8^{1023} + 2^{1024} - 3$?

П. 100. Сколько единиц в двоичной записи числа $8^{2341} - 4^{342} + 2^{620} - 81$?

=====

Ещё пример задания:

P-20. Сколько единиц в двоичной записи числа

$$4^{2015} + 8^{405} - 2^{150} - 122$$

П. 193. Значение арифметического выражения: $4^{511} + 2^{511} - 511$ записали в системе счисления с основанием 2. Сколько единиц в этой записи?

P-21. Сколько значащих нулей в двоичной записи числа

$$4^{512} + 8^{512} - 2^{128} - 250$$

П. 113. Сколько значащих нулей в двоичной записи числа $4^{350} + 8^{340} - 2^{320} - 12$?

П. 117. Сколько значащих нулей в двоичной записи числа $4^{2015} + 8^{2016} - 2^{2017} - 150$?

=====

Ещё пример задания:

P-22. Значение арифметического выражения: $9^8 + 3^5 - 9$

записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

П. 158. Значение арифметического выражения: $9^{20} + 3^{60} - 5$ записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

П. 166. Значение арифметического выражения: $9^7 + 3^{21} - 9$ записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

П. 147. Значение арифметического выражения: $49^{12} - 7^{10} + 7^8 - 49$ записали в системе счисления с основанием 7. Сколько цифр «6» содержится в этой записи?

П. 149. Значение арифметического выражения: $3 \cdot 16^8 - 4^5 + 3$ записали в системе счисления с основанием 4. Сколько цифр «3» содержится в этой записи?

=====

Еще пример задания:

P-00. Запись числа 30_{10} в системе счисления с основанием N оканчивается на 0 и содержит 4 цифры. Чему равно основание этой системы счисления N ?

Решение (1 способ, подбор):

П. 5. В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 129 записывается как 1004. Укажите это основание.

П. 60. Запись числа 180 в системе счисления с основанием N содержит 3 цифры и оканчивается на 0. Перечислите в порядке возрастания все возможные основания системы счисления.

П. 55. Запись числа 281 в системе счисления с основанием N содержит 3 цифры и оканчивается на 1. Чему равно максимально возможное основание системы счисления?

P-01. Чему равно наименьшее основание позиционной системы счисления x , при котором $225_x = 405_y$? Ответ записать в виде целого числа.

П. 39. Найдите основание системы счисления, в которой выполнено умножение: $3 \cdot 213 = 1043$.

Новое 2020:

221. Выражение $2^5 \cdot 3^{25}$ записано в троичной системе счисления. Определите, сколько в этой записи цифр 0, 1 и 2.

222. Выражение $4^3 \cdot 3^{19}$ записано в троичной системе счисления. Определите, сколько в этой записи цифр 0, 1 и 2.

223. Выражение $4^4 \cdot 5^{69} - 70$ записано в системе счисления с основанием 5. Определите, сколько в этой записи цифр 0, 1, 2, 3 и 4.

229. Значение выражения $(66 + 6^{2019}) \cdot 6^{2019} + 66 + 6^6$ записали в системе счисления с основанием 6. Укажите сумму цифр этой записи.

230. Значение выражения $(88 + 2 \cdot 8^x) \cdot 8^x + 88 + 8^8$, где $x > 3$ – натуральное число, записали в системе счисления с основанием 8. Укажите сумму цифр этой записи.

231. Значение выражения $(55 + 2 \cdot 5^x) \cdot 5^x + 55 + 5^y$, где x, y – натуральные числа, записали в системе счисления с основанием 5. Укажите наибольшую возможную сумму цифр этой записи.

237. Значение выражения $7 \cdot 1296^{57} - 8 \cdot 216^{30} + 35$ записали в системе счисления с основанием 6. Сколько цифр 5 содержится в этой записи?