25 февраля 2020 г.

1 Лекция 1. Классическая и обобщенная постановки задачи о растяжении-сжатии стержня

Рассмотрим упругий стержень. Пусть E — модуль Юнга стержня, A — площадь его поперечного сечения, $u_x = u(x,t)$ — продольное перемещение сечения стержня, длина стержня — L, продольная координата — x. Продольная деформация выражается через напряжения в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Напряжения выражаются через деформации следующим образом:

$$\sigma = \sigma_{xx} = E\varepsilon$$

Перемещение стержня удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A\sigma\right) = \rho A\ddot{u} \tag{1}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho A\ddot{u} \tag{2}$$

Уравнение (2) вместе с краевыми условиями образует классическую постановку задачи. Предположим, что краевые условия имеют вид:

левый конец стержня жестко защемлен:

$$u|_{x=0} = 0 \tag{3}$$

на правом конце стержня задана нагрузка:

$$\sigma|_{x=L} = p(t) \tag{4}$$

Предположим, что функция $v = \delta u$ — произвольная достаточно гладкая функция, удовлетворяющя главному краевому условию (3). Умножим обе части уравнения (2) на функцию v и проинтегрируем результат по отрезку $[0, L]$. Получим:

$$\int\limits_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right) v dx = \int\limits_0^L \rho A\ddot{u} v dx \tag{5}$$

Преобразуем левую часть уравнения, используя интегрирование по частям:

$$\int\limits_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right) v dx = \left(EA\frac{\partial u}{\partial x} v\right)\Bigg|_{x=0}^{x=L} - \int\limits_0^L EA\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} dx$$

С учетом краевых условий (5) приобретает вид:

$$\int\limits_0^L EA\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} dx = Apv(L) - \int\limits_0^L \rho A\ddot{u} v dx \tag{6}$$

Равенство (6) представляет из себя обобщённую (или слабую) постановку задачи для стержня. Обобщённым решением называется функция, которая удовлетворяет равенству (6) для произвольной функции v, удовлетворяющей условию (3).

Если в (6) заменить v на δu, в левой части получается вариация функционала упругой энергии, а в правой части — работа внешних сил на возможных перемещениях.

Разобьем отрезок $[0, L]$ на N отрезков. Координаты концов отрезков — $0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = L$.

$$[0, L] = \bigcup_{l=1}^{N} [x_{i-1}, x_i].$$

Рассмотрим отрезок $[-1, 1]$. Пусть переменная ξ принадлежит этому отрезку. Введём две функции

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2};\ N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \tag{7}$$

Каждый из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ можно взаимно однозначно отобразить на отрезок $[-1; 1]$. Переменная x может быть выражена через ξ следующим образом:

$$x = x_{i-1}N_1(\xi) + x_i N_2(\xi), \tag{8}$$

или, подставляя в (8) выражения (7), Получаем:

$$x = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\xi + \frac{x_i + x_{i-1}}{2}.$$

Вводим обозначение:

$$x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Тогда

$$x = \frac{h_i}{2}\xi + \frac{x_i + x_{i-1}}{2}. \tag{9}$$

Рассмотрим левую часть (6). Разобьем интеграл на сумму интегралов по отрезкам:

$$\int\limits_0^L EA\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx = \sum_{i=1}^{N}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} EA\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx$$

Рассмотрим слагаемое в последней сумме и заменим в нем переменные:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} EA\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx = \int\limits_{-1}^{1} EA\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dx}\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dx}\frac{dx}{d\xi}d\xi = \int\limits_{-1}^{1} EA\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dx}d\xi \tag{10}$$

Найдем $d\xi/dx$. Найдём выражение для ξ:

$$\xi = \frac{2}{h_i}\left(x - \frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

Следовательно

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{h_i}$$

На каждом из отрезков приближенно представим неизвестную функцию u в виде линейной функции:

$$u \approx U_{i-1}N_1(\xi) + U_i N_2(\xi), \tag{11}$$

Соотношение (11) может быть представлено в виде:

$$u \approx \mathbf{N}^i\mathbf{U}^i = \left[\begin{array}{cc} N_1(\xi) & N_2(\xi) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_{i-1} \\ u_i \end{array}\right], \tag{12}$$

Матрица $\mathbf{N}^i$ называется матрицей мазисных функций, $\mathbf{U}^i$ — вектор узловых неизвестных.

Подставляем (12) в (13):

$$\int\limits_{-1}^{1} EA\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dx}d\xi = \frac{2}{h_i}\int\limits_{-1}^{1} EA\frac{\partial v}{\partial \xi}\left[\begin{array}{cc} \frac{dN_1}{d\xi} & \frac{dN_2}{d\xi} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_{i-1} \\ u_i \end{array}\right] d\xi \tag{13}$$

Подставим в (13) следующие значения пробной функции v:

$$v = N_k(\xi)$$

Получаем равенства:

$$\frac{2}{h_i}\int\limits_{-1}^{1} EA\frac{\partial v}{\partial \xi}\left[\begin{array}{cc} \dfrac{dN_1}{d\xi} & \dfrac{dN_2}{d\xi} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} u_{i-1} \\ u_i \end{array}\right] d\xi = \frac{2}{h_i}\int\limits_{-1}^{1} EA\frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi}\left[\begin{array}{cc} \dfrac{dN_1}{d\xi} & \dfrac{dN_2}{d\xi} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} u_{i-1} \\ u_i \end{array}\right] d\xi$$

и

$$\frac{2}{h_i}\int\limits_{-1}^{1} EA\frac{\partial v}{\partial \xi}\left[\begin{array}{cc} \dfrac{dN_1}{d\xi} & \dfrac{dN_2}{d\xi} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} u_{i-1} \\ u_i \end{array}\right] d\xi = \frac{2}{h_i}\int\limits_{-1}^{1} EA\frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi}\left[\begin{array}{cc} \dfrac{dN_1}{d\xi} & \dfrac{dN_2}{d\xi} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} u_{i-1} \\ u_i \end{array}\right] d\xi$$

Объединяем выражения:

$$\frac{2}{h_i}\int\limits_{-1}^{1} EA\left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \dfrac{dN_1}{d\xi} & \dfrac{dN_2}{d\xi} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} u_{i-1} \\ u_i \end{array}\right] d\xi = \left[\begin{array}{cc} K_{11}^i & K_{12}^i \\ K_{21}^i & K_{22}^i \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} u_{i-1} \\ u_i \end{array}\right]$$

Здесь

$$K_{jk}^i = \frac{2}{h}\int\limits_{-1}^{1} EA\frac{\partial N_j}{\partial \xi}\frac{\partial N_k}{\partial \xi} d\xi$$

— матрица жёсткости.

Будем приближенно считать модуль Юнга E и площадь поперечного сечения A постоянными в пределах элемента. В этом случае

$$K_{11}^i = \frac{2E_iA_i}{h_i}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial N_1}{\partial \xi}\frac{\partial N_1}{\partial \xi} d\xi = \frac{E_iA_i}{h}$$

Аналогично находим другие элементы матрицы. Окончательно

$$K^i = \frac{E_iA_i}{h_i}\left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right)$$

Аналогично рассмотрим интегральное слагаемое в правой части (6). Аналогично предыдущему представим ускорение в виде

$$\ddot{u} \approx \ddot{u}_{i-1} N_1(\xi) + \ddot{u}_i N_2(\xi),$$

Преобразуем слагаемое

$$\int\limits_0^L \rho A \ddot{u} v dx = \sum_{i=1}^N \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \rho A \ddot{u} v dx = \frac{h_i}{2} \sum_{i=1}^N \int\limits_{-1}^{1} \rho A \ddot{u} v d\xi \tag{14}$$

Рассматриваем интеграл по элементу и выбираем в качестве пробной функции узловую функцию $N_k(\xi)$:

$$\frac{h_i}{2} \int\limits_{-1}^{1} \rho A \ddot{u} v d\xi = \frac{h_i}{2} \int\limits_{-1}^{1} \rho A v \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{i-1} \\ \ddot{u}_i \end{bmatrix} d\xi$$

$$\frac{h_i}{2} \int\limits_{-1}^{1} \rho A \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{i-1} \\ \ddot{u}_i \end{bmatrix} d\xi = \begin{bmatrix} M_{11}^i & M_{12}^i \\ M_{21}^i & M_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{i-1} \\ \ddot{u}_i \end{bmatrix}$$

Здесь

$$M_{jk}^i = \frac{h_i}{2} \int\limits_{-1}^{1} \rho A N_j(\xi) N_k(\xi) d\xi$$

— матрица масс.

Также предположим, что ρ, A — постоянны в пределах элемента. В этом случае

$$M_{11}^i = \frac{A_i \rho_i h}{8} \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi)^2 d\xi = \frac{A_i \rho_i h}{3}$$

$$M_{22}^i = M_{11}^i,\ M_{12}^i = M_{21}^i = \frac{A_i \rho_i h}{6}$$

Ансамблированием элементов называется создание глобальных матрицы масс и матрицы жёсткости. При построении глобальных матрицы жескости и матрицы масс используется пробная функция, связанная с узлом глобальной сетки, которая строится из базисных функций элементов, соседних к узлу. В дальнейшем будем считать все h_i равными друг другу.

Например, для i-го узла соответствующая пробная функция имеет вид:

$$v_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},\ x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$v_i(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}},\ x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Для того, чтобы получить уравнение, соответствующее такой пробной функции рассмотрим уравнения, соответствующие базисным функциям из соседних элементов:

$$\begin{gathered} \frac{E_i A_i}{h}\left(-U_{i-1} + U_i\right) = -\frac{A_i \rho_i h}{6}\left(\ddot{U}_{i-1} + 2\ddot{U}_i\right) \\ \frac{E_{i+1} A_{i+1}}{h}\left(U_i - U_{i+1}\right) = -\frac{A_{i+1} \rho_{i+1} h}{6}\left(2\ddot{U}_i + \ddot{U}_{i+1}\right) \end{gathered} \tag{15}$$

Предположим, что A, E и ρ — постоянны по всей длине стержня. Сложим оба уравнения (15) и получим уравнение, соответствующее пробной функции $v_i(\xi)$.

$$\frac{EA}{h}\left(-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1}\right) = -\frac{A\rho h}{6}\left(\ddot{U}_{i-1} + 4\ddot{U}_i + \ddot{U}_{i+1}\right) \tag{16}$$

Объединяя уравнения (16), получаем:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} - \mathbf{M\ddot{U}} \tag{17}$$

где

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \frac{A\rho h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 4 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 4 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ Ap(t) \end{pmatrix}$$

Таким образом, процесс сборки конечноэлементной схемы (17) может быть осуществлен путем формирования элементных объектов с дальнейшим их объединением в глобальные.

Глобальную матрицу $\mathbf{K}$ можно представить в виде:

$$\mathbf{K} = \sum_{\mathbf{i}} {}^{\mathbf{a}}\mathbf{K}^{\mathbf{i}} \tag{18}$$

Символ Σ^a в (18) обозначает операцию ансамблирования конечноэлементных объектов в глобальные. Понятно, что просто сложить матрицы $\mathbf{K}^{\mathbf{i}}$ размера 2×2 и получить матрицу $\mathbf{K}$ размера $n \times n$ нельзя. Однако можно расширить элементные матрицы $\mathbf{K}^{\mathbf{i}}$ нулями до размера $n \times n$, расположив элементы K^i_{11}, K^i_{12}, K^i_{21}, K^i_{22} на соответствующих строках и столбцах с номерами $i-1$ и i, а затем сложить полученные матрицы. Аналогичным образом осуществляется и формирование конечно-элементных глобальных векторов $\mathbf{F}$ из элементных векторов $\mathbf{F}^{\mathbf{i}}$.