Лабораторная работа.
Приближенное решение задачи Коши методом Рунге-Кутта

Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порялка

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= f(x,y)\\
y(a) &= y_0
\end{aligned}
$$

здесь $f(x,y)$ — известная функций. Требуется найти решение задачи Коши для $x \in [a,b]$ одним из методов Рунге-Кутта.

Элементы теории.

Метод Рунге-Кутта q порядка заключается в построении решения в виде таблицы приближенных значений функции $y(x)$, найденных в точках x_1, x_2, $\ldots$, x_n отрезка $[a,b]$.

Рассмотрим метод Рунге-Кутта четвертого порядка. Решение для $x+h$ определяется по формуле

$$
\begin{aligned}
&y(x+h) \approx y(x) + \frac{1}{6}(k_1(h) + (4-2\,t)\,k_2(h) + 2\,t\,k_3(h) + k_4(h))\\
&k_1 = h\,f(x,y)\\
&k_2 = h\,f(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_1}{2})\\
&k_3 = h\,f(x+\frac{h}{2}, y+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\,t})\,k_1 + \frac{1}{2\,t}\,k_2)\\
&k_4 = h\,f(x+h, y+(1-t)\,k_2 + t\,k_3),
\end{aligned}
$$

здесь t — параметр.

Методические указания.

0. Составить задачу Коши, имеющую точное аналитическое решение.

1. Составить процедуру F(X,Y), вычисляющую значение правой части дифференциального уравнения.

2. Составить процедуру расчета одного шага метода Рунге-Кутта RGKSTEP(XOLD, YOLD, H) для предложенного в индивидуальном задании метода.

3. Составить процедуру решения задачи Коши на всем отрезке методом Рунге-Кутта с постоянным шагом RGKH(X0, Y0, N, B).

4. Составить процедуру решения задачи Коши на всем отрезке методом Рунге-Кутта с выбором шага для заданной точности RGKAUTOH(X0, Y0, H, B, EPS). Шаг считается выбранным правильно, если

$$|\frac{\tilde{y}-\tilde{\tilde{y}}}{2^q-1}| < \varepsilon,$$

где $\tilde{y}$ - решение, найденное с шагом h, $\tilde{\tilde{y}}$ - решение, полученное двойным пересчетом с шагом $h/2$, q — порядок метода. Если условие выполнено, то шаг выбран правильно, иначе шаг делится пополам.

5. Предусмотреть возможность увеличения шага по правилу: если $|\frac{\tilde{y}-\tilde{\tilde{y}}}{2^q-1}| < \frac{\varepsilon}{2^{q+1}}$, то шаг можно удвоить.

6. Выходным параметром процедуры метода Рунге-Кутта с автоматическим выбором шага должна быть таблица значений искомой функции $y(x)$.

7. Составленные процедуры следует тестировать на задаче Коши с простейшим дифференциальным уравнением, имеющем явное решение.

8. Постройте на одном графике решение, найденное методом Рунге-Кутта, и точное решение задачи Коши $yt(x)$. Для построения графика по массивам точек используйте следующие команды:

```
> xy:=zip((x,y)->[x,y],convert(X_i,list),convert(Y_i,list));
> with(plots):
> gr1:=plot(xy):
> gr2:=plot(yt(x), x=a..b, color=red, thickness=6):
> display(gr1, gr2);
```

9. Сохраните результаты работы для своего примера в личной папке под именем ЗАДАЧА КОШИ(ТЕСТ).MWS.

10. Выполните индивидуальное задание и сохраните в своей папке под именем ЗАДАЧА КОШИ(ИНД).MWS.

11. Подготовьте отчет, содержащий постановку задачи, описание метода, описание тестового примера, код с решением теста и код с решением индивидуального задания.