Лабораторная работа по теме
«Решение задачи Коши для СОДУ первого порядка»

Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка:

$$y^{(n)} = f(x, y, y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)); x \in [a, b]; y(a) = \alpha_1, y'(x) = \alpha_2, \ldots, y^{(n-1)}(a) = \alpha_n$$

Требуется найти решение задачи Коши на отрезке $[a, b]$.

Описание метода. Сведем задачу Коши для одного дифференциального уравнения к системе из n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}
&(u_1)'(x) = u_2 \\
&(u_2)'(x) = u_3 \\
\ldots \\
&(u_{n-1})'(x) = f(x, u_1, u_2, u_n)
\end{aligned}$$

В векторном виде

$$\mathbf{u}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{u})$$

Здесь выполнена замена и введена вектор-функция $\mathbf{u} = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Начальные условия примут вид

$$u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2, \ldots, u_n(a) = \alpha_n$$

Расчетные формулы метода Рунге-Кутта обобщаются на случай системы из n дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \frac{1}{6}\,(\mathbf{k}_1 + 2\,\mathbf{k}_2 + 2\,\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \\
&\mathbf{k}_1 = h\,\mathbf{F}(x_i, \mathbf{y}_i), \\
&\mathbf{k}_2 = h\,\mathbf{F}(x_i + \frac{h}{2}, \mathbf{u}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1), \\
&\mathbf{k}_3 = h\,\mathbf{F}(x_i + \frac{h}{2}, \mathbf{u}_i + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2), \\
&\mathbf{k}_4 = h\,\mathbf{F}(x_i + h, \mathbf{u} + \mathbf{k}_3).
\end{aligned}$$

Здесь индекс при векторе неизвестных $\mathbf{u}_i$ означает расчет в точке $x_i = a + i * h$ из отрезка интегрирования $[a, b]$.

Приближенное решение y_i для $x = x_i$ считается найденным с точностью ε, если

$$\|\mathbf{u}_i - \mathbf{u2}_i| < 15\,\varepsilon \tag{2}$$

здесь $\mathbf{u2}_i$ — решение, найденное для $x = x_i$ двойным пересчетом с шагом $h/2$.

Методические указания.

- 1. Рассмотрим задачу Коши с известным точным решением $y(x) = x\,e^{-x}$:

$$y^{IV}(x) + x\,y(x) = e^{-x}\,(x^2 + x - 4), x \in [0,1]$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -2, \quad y^{III}(0) = 3$$

Выполним переход к системе дифференциальных уравнений первого порядка с помощью замены переменных

$$\begin{aligned} u_1(x) &= y(x), \\ u_2(x) &= y'(x), \\ u_3(x) &= y''(x), \\ u_4(x) &= y'''(x) \end{aligned}$$

Получим систему следующих уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} (u_1)'(x) &= u_2, \\ (u_2)'(x) &= u_3, \\ (u_3)'(x) &= u_4, \\ (u_4)'(x) &= e^{-x}\,(x^2 + x - 4) - x\,u_1. \end{aligned}$$

Добавим начальное условие для вектор-функции $\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 0, \\ u_2(0) &= 1, \\ u_3(0) &= -2, \\ u_4(0) &= 3. \end{aligned}$$

- 2. Создайте процедуру SDU параметрами x, U, которая возвращает вектор производных DU в точке x.

- 3. Создайте процедуру одного шага метода Рунге-Кутта с параметрами $xold, Uold, h$, которая возвращает решение $Unew$ в точке $xnew = xold + h$.

- 3. Создайте процедуру автоматического выбора шага с параметрами $a, b, h, Ustart, eps$, которая возвращает матрицу, в строках которой-вектор решения Ux в некоторой точке отрезка интегрирования $[a, b]$.

- 5. Сохраните результаты в файле РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СДУ(тест).MWS

- 6. Создайте программу для решения задачи Коши из индивидуального варианта и сохраните ее в файле РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СДУ(вариант00).MWS.