1 Общая постановка динамической задачи теории упругости

Рассмотрим упругое тело объёма V, ограниченное поверхностью $S = \partial V$. Для тела выполняются уравнения движения в виде:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \tag{1}$$

В уравнении (1) σ_{ij} — компонента тензора напряжений, F_i — компонента вектора массовых сил, ρ — плотность материала, u_i — компонента вектора перемещений. Введены следующие обозначения:

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

$$\dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}.$$

По повторяющимся индексам ведётся суммирование, если прямо не указано обратное.

Также для тела выполняются определяющие соотношения в виде:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{2}$$

где c_{ijkl} — компоненты тензора упругих констант, ε_{ij} — компоненты тезора напряжений. Тензор упругих констант — положительно определённый, его компоненты удовлетворяют соотношениям:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}.$$

В случае изотропного тела соотношение (2) приобретает вид:

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{3}$$

где λ, μ — коэффициенты Ляме,

$$\theta = \varepsilon_{ii} = u_{ii} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}$$

— коэффициент объёмного расширения, δ_{ij} — символ Кронекера,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Также выполняются геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \tag{4}$$

Уравнения (4) связывают компоненты тензора деформаций с вектором перемещений.

Для тела выполняются граничные условия. Существуют граничные условия трёх типов:

1. На границе тела задаётся вектор перемещений (граничные условия первого типа):
$$u_i|_{\partial V} = u_i^0 \tag{5}$$

2. На границе тела задаётся вектор нормальных напряжений (граничные условия второго типа):
$$\sigma_{ij}n_j|_{\partial V} = p_i, \tag{6}$$
где n_j — компонента вектора внешней нормали.

3. Смешанные граничные условия:

$$\partial V = S = S_u \cup S_\sigma$$

$$u_i\big|_{S_u} = u_i^0,\ \sigma_{ij} n_j\big|_{S_\sigma} = p_i, \tag{7}$$

где n_j компонента вектора внешней нормали.

Так как в уравнении (1) присутствует время, следует задать также начальные условия:

$$u_i\big|_{t=0} = f_i(x),\ \dot{u}_i\big|_{t=0} = g_i(x) \tag{8}$$

Рассмотрим соотношение (1) и подставим в него (3). Получаем:

$$\left(\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}\right)_{,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \tag{9}$$

Пользуемся геометрическими соотношениями (4), а также свойствами символа Кронекера:

$$\lambda u_{k,ki} + \mu \left(u_{i,jj} + u_{j,ij}\right) + F_i = \rho \ddot{u}_i \tag{10}$$

Меняем немой индекс в первом слагаемом и считая вектор u_i достаточно гладким, меняем порядок дифференцирования во втором слагаемом в скобках. Перегруппируем слагаемые:

$$\left(\lambda + \mu\right) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + F_i = \rho \ddot{u}_i \tag{11}$$

Полученное равенство называется **уравнением Ляме**.

Его часто записывают в виде

$$\left(\lambda + \mu\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{u} + \mu \operatorname{div} \operatorname{grad} \underline{u} + \underline{F} = \rho \underline{\ddot{u}} \tag{12}$$

или

$$\left(\lambda + \mu\right) \nabla \nabla \cdot \underline{u} + \mu \nabla \cdot \nabla \underline{u} + \underline{F} = \rho \underline{\ddot{u}} \tag{13}$$

Также можно воспользоваться соотношением

$$\nabla \times \nabla \times \underline{u} = \nabla\nabla \cdot \underline{u} - \nabla \cdot \nabla \underline{u},$$

из которого следует

$$\nabla \cdot \nabla \underline{u} = \nabla\nabla \cdot \underline{u} - \nabla \times \nabla \times \underline{u},$$

Окончательно

$$(\lambda + 2\mu)\, \nabla\nabla \cdot \underline{u} - \mu\nabla \times \nabla \times \underline{u} + \underline{F} = \rho\ddot{\underline{u}} \tag{14}$$

Применим к обеим частям уравнения (14) операцию div:

$$(\lambda + 2\mu)\, \nabla \cdot \nabla \left(\nabla \cdot \underline{u}\right) + \nabla \cdot \underline{F} = \rho\nabla \cdot \ddot{\underline{u}} \tag{15}$$

или

$$\Delta\Phi + \frac{\nabla \cdot \underline{F}}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{c_1^2}\ddot{\Phi}, \tag{16}$$

где

$$\Phi = \nabla \cdot \underline{u},$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Величину c_1 называют **скоростью продольных волн.**

Применим теперь к обеим частям (14) операцию rot:

$$-\, \mu\nabla \times \nabla \times \left(\nabla \times \underline{u}\right) + \nabla \times \underline{F} = \rho\nabla \times \ddot{\underline{u}} \tag{17}$$

Преобразуем:

$$\nabla \times \nabla \times \left(\nabla \times \underline{u}\right) = \nabla\nabla \cdot \left(\nabla \times \underline{u}\right) - \nabla \cdot \nabla \left(\nabla \times \underline{u}\right) = -\nabla \cdot \nabla \left(\nabla \times \underline{u}\right)$$

Окончательно

$$\mu\nabla \cdot \nabla \left(\nabla \times \underline{u}\right) + \nabla \times \underline{F} = \rho\nabla \times \ddot{\underline{u}} \tag{18}$$

или
$$\Delta\underline{\Psi} + \frac{\nabla \times \underline{F}}{\mu} = \frac{1}{c_2^2}\ddot{\underline{\Psi}}, \tag{19}$$

где
$$\Psi = \nabla \times \underline{u},$$
$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Величину c_2 называют **скоростью поперечных волн.**

2 Представление Ляме

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\underline{u} - \mu\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\underline{u} + \underline{F} = \rho\underline{\ddot{u}} \tag{20}$$

Будем искать решение (20) в виде:

$$\underline{u} = \mathrm{grad}\varphi + \mathrm{rot}\underline{\psi},\ \mathrm{div}\underline{\psi} = 0 \tag{21}$$

Также будем считать, что вектор массовых сил представим в виде:

$$\underline{F} = \mathrm{grad}\theta + \mathrm{rot}\underline{\chi} \tag{22}$$

(в теории поля доказано, что такие представления возможны)

Подставим (21) и (22) в (20):

$$\begin{gathered}(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\varphi + \mathrm{rot}\underline{\psi}\right) - \\ -\mu\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(\mathrm{grad}\varphi + \mathrm{rot}\underline{\psi}\right) + \mathrm{grad}\theta + \mathrm{rot}\underline{\chi} = \rho\left(\mathrm{grad}\ddot{\varphi} + \mathrm{rot}\underline{\ddot{\psi}}\right)\end{gathered} \tag{23}$$

Воспользуемся тождествами:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\underline{\psi} \equiv 0$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\varphi \equiv 0$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\begin{gathered}\mathrm{grad}\left[(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\varphi + \theta - \rho\ddot{\varphi}\right] = \\ = -\mathrm{rot}\left[-\mu\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\underline{\psi} + \underline{\chi} - \rho\underline{\ddot{\psi}}\right]\end{gathered} \tag{24}$$

Воспользуемся формулами:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\varphi = \Delta\varphi$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{\psi} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{\psi} - \operatorname{div}\operatorname{grad}\underline{\psi} = -\Delta\underline{\psi}$$

Теперь мы можем сделать вывод, что вектор-функция $\underline{u}$ удовлетворяет уравнению Ляме (20), если выполняются два следующих уравнения:

$$(\lambda + 2\mu)\,\Delta\varphi + \theta = \rho\ddot{\varphi} \tag{25}$$

$$\mu\Delta\underline{\psi} + \underline{\chi} = \rho\ddot{\underline{\psi}} \tag{26}$$

Функция φ называется продольным потенциалом, вектор $\underline{\psi}$ — поперечным потенциалом, представление (21) называется **представлением Ляме**.

$$\Delta\varphi + \frac{\theta}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{c_1^2}\ddot{\varphi} \tag{27}$$

$$\Delta\underline{\psi} + \frac{1}{\mu}\underline{\chi} = \frac{1}{c_1^2}\ddot{\underline{\psi}} \tag{28}$$

Уравнения (25) и (26) переписываются в виде:

В неограниченной упругой среде имеют место следующие свойства решения:

- Пусто при $t = 0$ возмущения носят продольный характер:

$$\underline{\psi}(x, 0) = \dot{\underline{\psi}}(x, 0) = 0.$$

Пусть также $\underline{\chi} = 0$.

Тогда во все последующие моменты времени

$$\underline{\psi} \equiv 0$$

- Аналогично для φ;

Рассмотрим обычное волновое уравнение:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c_1^2}\ddot{\varphi} \tag{29}$$

Уравнение (29) всегда имеет решение вида:

$$\varphi(x,t) = \Phi(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_1 t) \tag{30}$$

Φ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, $\underline{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ — радиус-вектор, $k = k_1, k_2, k_3$ — волновой вектор, $|k| = 1$.

Найдём вектор перемещений, соответсвующий волновому потенциалы (30):

$$\underline{u} = \mathrm{grad}\varphi = \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_1 t) = \underline{e}_i k_i \Phi'(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_1 t) = \underline{k}\Phi'(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_1 t) \tag{31}$$

Говорят, что решение носит продольный характер (или представляет продольную волну), если вектор перемещений коллинеарен волновому вектору.

Теперь рассмотрим уравнение:

$$\Delta\underline{\psi} = \frac{1}{c_2^2}\ddot{\underline{\psi}} \tag{32}$$

Решение Даламбера имеет вид:

$$\underline{\psi}(x,t) = \underline{\Psi}(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_2 t) \tag{33}$$

Найдём перемещение:

$$\underline{u}(x,t) = \mathrm{rot}\Psi(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_2 t) = \underline{e}_i \times \frac{\partial}{\partial x_i}\underline{\Psi}(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_2 t) = \underline{e}_i \times k_i \underline{\Psi}'(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_2 t) \tag{34}$$

или

$$\underline{u} = k_i \underline{e}_i \times \underline{\Psi}'(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_2 t) = \underline{k} \times \underline{\Psi}'(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_2 t) \tag{35}$$

Косое произведение двух векторов ортогонально обоим сомножителям.

Говорят, что смещение носит поперечный характер, (представляет поперечную волну), если вектор перемещения ортогонален волновому вектору.

Замечание Таким образом, мы получили два типа волн в упругой среде:

продольные и поперечные. При этом

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} > c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Величины c_1 и c_2 также называются c_p и c_s соответственно (от слов primary и secondary), а сами волны разделяются на P-волны и S-волны. В свою очередь, S-волны разделяются на SH-волны и SV-волны.

Примеры

- P-волны:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ u_3 = e^{i(x_3 - c_2 t)} \end{cases}$$

- SV-волны:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ u_3 = e^{i(x_2 - c_2 t)} \end{cases}$$

- SH-волны:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ u_3 = e^{i(x_1 - c_2 t)} \end{cases}$$

3 Принцип возможных перемещений в динамических задачах. Теорема единственности

Рассмотрим упругое тело объёма V, ограниченное поверхностью $S = \partial V$. Для тела выполняются уравнения движения в виде:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \tag{36}$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\partial V = S = S_u \cup S_\sigma$$

$$u_i|_{S_u} = u_i^0, \; \sigma_{ij} n_j|_{S_\sigma} = p_i, \tag{37}$$

Начальные условия следующие:

$$u_i|_{t=0} = f_i(x), \; \dot{u}_i|_{t=0} = g_i(x) \tag{38}$$

Определение. Под кинематически возможным полем перемещений будем понимать множество вектор-функций

$$U = \left\{ u_i(x,t) \in C^2 \left[V \times [0,T] \right]; \; u_i|_{S_u} = u_i^0 \right\}$$

или множество достаточно гладких функций, удовлетворяющих кинематическим (или главным) граничным условиям.

Пусть $\underline{u}^{(1)}, \underline{u}^{(2)}$ — кинематически возможные перемещения. Введём новый вектор-функцию

$$\delta u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}, \; \delta u_i|_{S_u} = 0 \tag{39}$$

Умножим уравнение (36) на δu_i и проинтегрируем по объёму V. Получаем:

$$\int\limits_V \sigma_{ij,j}\delta u_i dV + \int\limits_V F_i \delta u_i dV = \int\limits_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV \tag{40}$$

Рассмотрим первое слагаемое в левой части (40):

$$\int\limits_V \sigma_{ij,j}\delta u_i dV = \int\limits_V \left(\sigma_{ij}\delta u_i\right)_{,j} dV - \int\limits_V \sigma_{ij}\delta u_{i,j} dV \tag{41}$$

В формулах (42) использована формула произведения двух функций. Рассмотрим теперь интегралы в формуле (42). В первом интеграле воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского и переходим к интегралу по поверхности. С учётом (39) получаем:

$$\int\limits_V \left(\sigma_{ij}\delta u_i\right)_{,j} dV = \int\limits_{\partial V} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS = \int\limits_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS = \int\limits_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS \tag{42}$$

Во втором слагаемом в (42) пользуемся свойствами градиента перемещения и раскладываем $\delta u_{i,j}$ на симметричную и антисимметричную часть:

$$\delta u_{i,j} = \delta\varepsilon_{ij} + \delta\omega_{ij},$$

где

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

и

$$\delta\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right).$$

Далее воспользуемся тем, что полное произведение симметричного и антисимметричного тензоров равняется нулю и следовательно

$$\sigma_{ij}\delta u_{i,j} = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}.$$

Таким образом, соотношение (40) принимает вид:

$$\int\limits_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS - \int\limits_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int\limits_V F_i \delta u_i dV = \int\limits_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV \tag{43}$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\int\limits_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int\limits_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS + \int\limits_V \left(F_i - \rho \ddot{u}_i\right) \delta u_i dV \tag{44}$$

Равенство (44) представляет собой формулировку принципа возможных перемещений, который гласит следующее: работа внутренних сил на возможных перемещениях равняется работе внешних сил и сил инерции на возможных перемещениях.

Снова рассмотрим уравнение (40). Умножим его теперь на вектор скоростей $\dot{u}_i$ и проинтегрируем по объёму V:

$$\int\limits_V \sigma_{ij,j} \dot{u}_i dV + \int\limits_V F_i \dot{u}_i dV = \int\limits_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dV \tag{45}$$

Проделаем выкладки, аналогичные предыдущим:

$$\int\limits_V \sigma_{ij,j} \dot{u}_i dV = \int\limits_V \left(\sigma_{ij} \dot{u}_i\right)_{,j} dV - \int\limits_V \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} dV = \int\limits_{\partial V} \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i dV - \int\limits_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV \tag{46}$$

Равенство (45) принимает вид:

$$\int\limits_{\partial V} \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i dV - \int\limits_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV + \int\limits_V F_i \dot{u}_i dV = \int\limits_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dV \tag{47}$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\int\limits_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV + \int\limits_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dV = \int\limits_{\partial V} \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i dV + \int\limits_V F_i \dot{u}_i dV \tag{48}$$

Введём в рассмотрение две величины:

$$K = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \tag{49}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV \tag{50}$$

— кинетическая и потенциальная энергии соответственно. Найдём их производные по времени:

$$\dot{K} = \int\limits_V \rho \dot{u}_i \ddot{u}_i dV \tag{51}$$

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(\dot{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\right) dV = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(C_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}\varepsilon_{ij} + C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\dot{\varepsilon}_{ij}\right) dV \tag{52}$$

Поменяем местами немые индексы в первом слагаемом в (52):

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(C_{klij}\varepsilon_{kl}\dot{\varepsilon}_{ij} + C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\dot{\varepsilon}_{ij}\right) dV \tag{53}$$

Пользуемся свойствами тензора упругих констант:

$$C_{ijkl} = C_{klij},$$

следовательно

$$\dot{\Pi} = \int\limits_V C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int\limits_V \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} dV \tag{54}$$

Таким образом, с учётом (49) и (54) соотношение (48) приобретает вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\Pi + K\right) = \int\limits_{\partial V} \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i dV + \int\limits_V F_i \dot{u}_i dV \tag{55}$$

Равенство (55) представляет из себя формулировку **теоремы об изменении энергии**, которая гласит следующее: производна по времени от механической энергии тела равняется мощности внешних сил.

Теорема единственности. Решение основной начально-краевой задачи (36)-(38) единственно.

Доказательство. Предположим противное: существуют два решения $\underline{u}^{(1)}$ и $\underline{u}^{(2)}$, $\underline{u}^{(1)} \neq \underline{u}^{(2)}$. Выпишем постановки задач для $\underline{u}^{(1)}$ и $\underline{u}^{(2)}$:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}^{(1)} + F_i = \rho \ddot{u}_i^{(1)}, \\ u_i^{(1)}\Big|_{S_u} = u_i^0, \ \sigma_{ij}^{(1)} n_j\Big|_{S_\sigma} = p_i, \\ u_i^{(1)}\Big|_{t=0} = f_i(x), \ \dot{u}_i^{(1)}\Big|_{t=0} = g_i(x) \end{cases} \tag{56}$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}^{(2)} + F_i = \rho \ddot{u}_i^{(2)}, \\ u_i^{(2)}\Big|_{S_u} = u_i^0, \ \sigma_{ij}^{(2)} n_j\Big|_{S_\sigma} = p_i, \\ u_i^{(2)}\Big|_{t=0} = f_i(x), \ \dot{u}_i^{(2)}\Big|_{t=0} = g_i(x) \end{cases} \tag{57}$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\tilde{u}_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}.$$

Вычтем теперь (57) из (56):

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{ij,j} = \rho \ddot{\tilde{u}}_i, \\ \tilde{u}_i|_{S_u} = 0, \ \tilde{\sigma}_{ij} n_j|_{S_\sigma} = 0, \\ \tilde{u}_i|_{t=0} = 0, \ \dot{\tilde{u}}_i\Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{58}$$

Выпишем теорему об изменении энергии для функции $\underline{\tilde{u}}$. В силу однородных граничных условий получаем:

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{\Pi} + \tilde{K}\right) = 0 \tag{59}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int\limits_V \tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij}dV + \frac{1}{2}\int\limits_V \rho\dot{\tilde{u}}_i\dot{\tilde{u}}_i dV\right) = 0 \tag{60}$$

Интегрируем и в силу однородных начальных условий получаем:

$$\frac{1}{2}\int\limits_V \tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij}dV + \frac{1}{2}\int\limits_V \rho\dot{\tilde{u}}_i\dot{\tilde{u}}_i dV = \mathrm{const} = 0 \tag{61}$$

В выражениях для $\tilde{\Pi}$ и $\tilde{K}$ под интегралами стоят положительно определённые квадратичные формы и следовательно, равенство (61) выполняется только если оба слагаемых обращаются в ноль:

$$\int\limits_V \tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij}dV = 0, \tag{62}$$

$$\int\limits_V \rho\dot{\tilde{u}}_i\dot{\tilde{u}}_i dV = 0 \tag{63}$$

В силы положительной определенности подынтегральных квадратичных форм мы можем заключить, что равенства (62) и (63) выполняются только если $\tilde{\varepsilon}_{ij} = 0$ и $\dot{\tilde{u}}_i = 0$. Следовательно, в силу однородных кинематических условий $\tilde{u}_i = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

4 Движение анизотропной среды

Рассмотрим однородное уравнение колебаний

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \tag{64}$$

и подставим в него определяющие соотношения в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = C_{ijkl}u_{k,l} \tag{65}$$

Получаем:

$$C_{ijkl}u_{k,lj} = \rho \ddot{u}_i \tag{66}$$

Будем искать решение в виде плоских волн:

$$u_i = u_{i0}e^{i(k_j x_j - \omega t)} \tag{67}$$

k_j — компонента волнового вектора. Подставим (68) в (66):

$$C_{ijkl}ik_l ik_j u_{k0}e^{i(k_j x_j - \omega t)} = -\rho\omega^2 u_{i0}e^{i(k_j x_j - \omega t)} \tag{68}$$

Сокращаем ненулевой экспоненциальный множитель:

$$-C_{ijkl}k_l k_j u_{k0} = -\rho\omega^2 u_{i0} \tag{69}$$

Переносим всё в левую часть:

$$\left(C_{ijkl}k_l k_j - \rho\omega^2\delta_{ik}\right)u_{k0} = 0 \tag{70}$$

δ_{ik} — символ Кронекера. Система (70) является однородной алгебраической системой уравнений и имеет нетривиальное решение только, если её определитель равняется нулю:

$$\left|C_{ijkl}k_l k_j-\rho\omega^2\delta_{ik}\right|=0 \tag{71}$$

Разделим уравнение (71) на $|\underline{k}|^2$:

$$\left|C_{ijkl}n_l n_j-\rho v^2\delta_{ik}\right|=0, \tag{72}$$

где

$$n_j=\frac{k_j}{|\underline{k}|},\ v=\frac{\omega}{|\underline{k}|}$$

(72) — уравнение относительно v^2 (уравнение Кристоффеля); v_i^2 — главные значения тензора Кристоффеля

$$\Gamma_{ik}=\frac{1}{\rho}C_{ijkl}n_l n_j.$$

Тензор Кристоффеля — симметричный и положительно определённый, его главные значения — вещественные и положительные.

Следовательно, для каждого направления вектора $\underline{n}$ существуют три значения скорости v и три собственных вектора $u_{i0}^{(1)}$, $u_{i0}^{(2)}$, $u_{i0}^{(3)}$. Волна, для которой угол между вектором перемещения и волновым вектором — наименьший, называется квазипродольной, две другие — квазипоперечные.

5 Поток энергии. Фазовая и групповая скорости

Рассмотрим однородные уравнения движения

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \tag{73}$$

Умножим (73) на $\dot{u}_i$:

$$\sigma_{ij,j} \dot{u}_i = \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i, \tag{74}$$

Преобразуем левую часть (74):

$$\sigma_{ij,j} \dot{u}_i = \left(\sigma_{ij} \dot{u}_i\right)_{,j} - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}, \tag{75}$$

Подставим (75) в (74) и перегруппируем слагаемые:

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i - \left(\sigma_{ij} \dot{u}_i\right)_{,j} = 0, \tag{76}$$

Вводим в рассмотрение величины

$$T = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i,$$

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

Уравнение переписыватся в виде

$$\frac{dE_{mech}}{dt} + P_{j,j} = 0, \tag{77}$$

или

$$\frac{dE_{mech}}{dt} + \mathrm{div} \underline{P} = 0, \tag{78}$$

где

$$E_{mech} = T + W$$

— полная механическая энергия,

$$P = -\sigma_{ij}\dot{u}_i$$

— **вектор Умова-Пойнтинга**. Соотношение (78) называется законом сохранения энергии или уравнением неразрывности энергии.

Рассмотрим плоскую волну в виде

$$u_i = U_{i0}\cos\left(k_j x_j - \omega t\right).$$

Вычислим полную энергию:

$$\dot{u}_i = \omega U_{i0}\sin\left(k_j x_j - \omega t\right),$$

$$T = \frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i = \frac{1}{2}\rho\omega^2 U_{i0}^2\sin^2\left(k_j x_j - \omega t\right),$$

$$W = \frac{1}{2}C_{ijkl}U_{i0}U_{k0}k_j k_l\sin^2\left(k_j x_j - \omega t\right)$$

Осредним величины по времени:

$$\hat{T} = \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega} T dt = \frac{1}{4}\rho\omega^2 U_{i0}^2,$$

$$\hat{W} = \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega} W dt = \frac{1}{4}C_{ijkl}U_{i0}U_{k0}k_j k_l.$$

Если использовать уравнения Кристоффеля, можно показать, что

$$\hat{T} = \hat{W}$$

и

$$\hat{E}_{mech} = 2\hat{T}$$

Величина
$$v_j^{(g)} = \frac{\hat{P}_j}{\hat{E}_{mech}} \tag{79}$$
называется **групповой скоростью волн.**

(79) энергетическое определение групповой скорости. Также существует кинематическое определение групповой скорости

$$v_j^{(g)} = \frac{\partial \omega}{\partial k_j} \tag{80}$$

Можно показать, что это одна и та же величина.

Величина
$$v_j^{(p)} = \frac{\omega}{k_j} \tag{81}$$
называется **фазовой скоростью волн.**