

1 Общая постановка динамической задачи теории упругости

Рассмотрим упругое тело объёма V , ограниченное поверхностью $S = \partial V$. Для тела выполняются уравнения движения в виде:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

В уравнении (1) σ_{ij} — компонента тензора напряжений, F_i — компонента вектора массовых сил, ρ — плотность материала, u_i — компонента вектора перемещений. Введены следующие обозначения:

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

$$\dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}.$$

По повторяющимся индексам ведётся суммирование, если прямо не указано обратное.

Также для тела выполняются определяющие соотношения в виде:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2)$$

где c_{ijkl} — компоненты тензора упругих констант, ε_{ij} — компоненты тензора напряжений. Тензор упругих констант — положительно определённый, его компоненты удовлетворяют соотношениям:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}.$$

В случае изотропного тела соотношение (2) приобретает вид:

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad (3)$$

где λ, μ — коэффициенты Ляме,

$$\theta = \varepsilon_{ii} = u_{ii} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}$$

— коэффициент объёмного расширения, δ_{ij} — символ Кронекера,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Также выполняются геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (4)$$

Уравнения (4) связывают компоненты тензора деформаций с вектором перемещений.

Для тела выполняются граничные условия. Существуют граничные условия трёх типов:

1. На границе тела задаётся вектор перемещений (граничные условия первого типа):

$$u_i|_{\partial V} = u_i^0 \quad (5)$$

2. На границе тела задаётся вектор нормальных напряжений (граничные условия второго типа):

$$\sigma_{ij}n_j|_{\partial V} = p_i, \quad (6)$$

где n_j — компонента вектора внешней нормали.

3. Смешанные граничные условия:

$$\partial V = S = S_u \cup S_\sigma$$

$$u_i|_{S_u} = u_i^0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = p_i, \quad (7)$$

где n_j компонента вектора внешней нормали.

Так как в уравнении (1) присутствует время, следует задать также начальные условия:

$$u_i|_{t=0} = f_i(x), \quad \dot{u}_i|_{t=0} = g_i(x) \quad (8)$$

Рассмотрим соотношение (1) и подставим в него (3). Получаем:

$$(\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij})_{,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (9)$$

Пользуемся геометрическими соотношениями (4), а также свойствами символа Кронекера:

$$\lambda u_{k,ki} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ij}) + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (10)$$

Меняем немой индекс в первом слагаемом и считая вектор u_i достаточно гладким, меняем порядок дифференцирования во втором слагаемом в скобках. Перегруппируем слагаемые:

$$(\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (11)$$

Полученное равенство называется **уравнением Ляме**.

Его часто записывают в виде

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{u} + \mu \operatorname{div} \operatorname{grad} \underline{u} + \underline{F} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (12)$$

или

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \underline{u} + \mu \nabla \cdot \nabla \underline{u} + \underline{F} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (13)$$

Также можно воспользоваться соотношением

$$\nabla \times \nabla \times \underline{u} = \nabla \nabla \cdot \underline{u} - \nabla \cdot \nabla \underline{u},$$

из которого следует

$$\nabla \cdot \nabla \underline{u} = \nabla \nabla \cdot \underline{u} - \nabla \times \nabla \times \underline{u},$$

Окончательно

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \underline{u} - \mu \nabla \times \nabla \times \underline{u} + \underline{F} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (14)$$

Применим к обеим частям уравнения (14) операцию div:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) + \nabla \cdot \underline{F} = \rho \nabla \cdot \ddot{\underline{u}} \quad (15)$$

или

$$\Delta \Phi + \frac{\nabla \cdot \underline{F}}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{c_1^2} \ddot{\Phi}, \quad (16)$$

где

$$\Phi = \nabla \cdot \underline{u},$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Величину c_1 называют **скоростью продольных волн**.

Применим теперь к обеим частям (14) операцию rot:

$$-\mu \nabla \times \nabla \times (\nabla \times \underline{u}) + \nabla \times \underline{F} = \rho \nabla \times \ddot{\underline{u}} \quad (17)$$

Преобразуем:

$$\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \underline{u}) = \nabla \nabla \cdot (\nabla \times \underline{u}) - \nabla \cdot \nabla (\nabla \times \underline{u}) = -\nabla \cdot \nabla (\nabla \times \underline{u})$$

Окончательно

$$\mu \nabla \cdot \nabla (\nabla \times \underline{u}) + \nabla \times \underline{F} = \rho \nabla \times \ddot{\underline{u}} \quad (18)$$

или

$$\Delta \underline{\Psi} + \frac{\nabla \times \underline{F}}{\mu} = \frac{1}{c_2^2} \ddot{\underline{\Psi}}, \quad (19)$$

где

$$\underline{\Psi} = \nabla \times \underline{u},$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Величину c_2 называют **скоростью поперечных волн**.

2 Представление Ляме

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{u} + \underline{F} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (20)$$

Будем искать решение (20) в виде:

$$\underline{u} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \underline{\psi}, \quad \operatorname{div} \underline{\psi} = 0 \quad (21)$$

Также будем считать, что вектор массовых сил представим в виде:

$$\underline{F} = \operatorname{grad} \theta + \operatorname{rot} \underline{\chi} \quad (22)$$

(в теории поля доказано, что такие представления возможны)

Подставим (21) и (22) в (20):

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \underline{\psi}) - \\ & - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \underline{\psi}) + \operatorname{grad} \theta + \operatorname{rot} \underline{\chi} = \rho (\operatorname{grad} \ddot{\varphi} + \operatorname{rot} \ddot{\underline{\psi}}) \end{aligned} \quad (23)$$

Воспользуемся тождествами:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{\psi} \equiv 0$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} \text{grad} [(\lambda + 2\mu) \text{div grad} \varphi + \theta - \rho \ddot{\varphi}] = \\ = -\text{rot} \left[-\mu \text{rot rot} \underline{\psi} + \underline{\chi} - \rho \ddot{\underline{\psi}} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Воспользуемся формулами:

$$\text{div grad} \varphi = \Delta \varphi$$

$$\text{rot rot} \underline{\psi} = \text{grad div} \underline{\psi} - \text{div grad} \underline{\psi} = -\Delta \underline{\psi}$$

Теперь мы можем сделать вывод, что вектор-функция $\underline{u}$ удовлетворяет уравнению Ляме (20), если выполняются два следующих уравнения:

$$(\lambda + 2\mu) \Delta \varphi + \theta = \rho \ddot{\varphi} \quad (25)$$

$$\mu \Delta \underline{\psi} + \underline{\chi} = \rho \ddot{\underline{\psi}} \quad (26)$$

Функция φ называется продольным потенциалом, вектор $\underline{\psi}$ — поперечным потенциалом, представление (21) называется **представлением Ляме**.

$$\Delta \varphi + \frac{\theta}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{c_1^2} \ddot{\varphi} \quad (27)$$

$$\Delta \underline{\psi} + \frac{1}{\mu} \underline{\chi} = \frac{1}{c_1^2} \ddot{\underline{\psi}} \quad (28)$$

Уравнения (25) и (26) переписываются в виде:

В неограниченной упругой среде имеют место следующие свойства решения:

- Пусто при $t = 0$ возмущения носят продольный характер:

$$\underline{\psi}(x, 0) = \dot{\underline{\psi}}(x, 0) = 0.$$

Пусть также $\underline{\chi} = 0$.

Тогда во все последующие моменты времени

$$\underline{\psi} \equiv 0$$

- Аналогично для φ ;

Рассмотрим обычное волновое уравнение:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c_1^2}\ddot{\varphi} \quad (29)$$

Уравнение (29) всегда имеет решение вида:

$$\varphi(x, t) = \Phi(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_1 t) \quad (30)$$

Φ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, $\underline{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ — радиус-вектор, $\underline{k} = k_1, k_2, k_3$ — волновой вектор, $|\underline{k}| = 1$.

Найдём вектор перемещений, соответствующий волновому потенциалу (30):

$$\underline{u} = \text{grad}\varphi = \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_1 t) = \underline{e}_i k_i \Phi'(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_1 t) = \underline{k} \Phi'(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_1 t) \quad (31)$$

Говорят, что решение носит продольный характер (или представляет продольную волну), если вектор перемещений коллинеарен волновому вектору.

Теперь рассмотрим уравнение:

$$\Delta\underline{\psi} = \frac{1}{c_2^2}\ddot{\underline{\psi}} \quad (32)$$

Решение Даламбера имеет вид:

$$\underline{\psi}(x, t) = \underline{\Psi}(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_2 t) \quad (33)$$

Найдём перемещение:

$$\underline{u}(x, t) = \text{rot} \Psi(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_2 t) = \underline{e}_i \times \frac{\partial}{\partial x_i} \Psi(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_2 t) = \underline{e}_i \times k_i \underline{\Psi}'(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_2 t) \quad (34)$$

или

$$\underline{u} = k_i \underline{e}_i \times \underline{\Psi}'(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_2 t) = \underline{k} \times \underline{\Psi}'(\underline{k} \cdot \underline{x} \pm c_2 t) \quad (35)$$

Косое произведение двух векторов ортогонально обоим сомножителям.

Говорят, что смещение носит поперечный характер, (представляет поперечную волну), если вектор перемещения ортогонален волновому вектору.

Замечание Таким образом, мы получили два типа волн в упругой среде: продольные и поперечные. При этом

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} > c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Величины c_1 и c_2 также называются c_p и c_s соответственно (от слов primary и secondary), а сами волны разделяются на Р-волны и S-волны. В свою очередь, S-волны разделяются на SH-волны и SV-волны.

Примеры

- Р-волны:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ u_3 = e^{i(x_3 - c_2 t)} \end{cases}$$

- SV-волны:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ u_3 = e^{i(x_2 - c_2 t)} \end{cases}$$

- SH-волны:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ u_3 = e^{i(x_1 - c_2 t)} \end{cases}$$

3 Принцип возможных перемещений в динамических задачах. Теорема единственности

Рассмотрим упругое тело объёма V , ограниченное поверхностью $S = \partial V$. Для тела выполняются уравнения движения в виде:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (36)$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\partial V = S = S_u \cup S_\sigma$$

$$u_i|_{S_u} = u_i^0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = p_i, \quad (37)$$

Начальные условия следующие:

$$u_i|_{t=0} = f_i(x), \quad \dot{u}_i|_{t=0} = g_i(x) \quad (38)$$

Определение. Под кинематически возможным полем перемещений будем понимать множество вектор-функций

$$U = \{u_i(x, t) \in C^2[V \times [0, T]] ; u_i|_{S_u} = u_i^0\}$$

или множество достаточно гладких функций, удовлетворяющих кинематическим (или главным) граничным условиям.

Пусть $\underline{u}^{(1)}, \underline{u}^{(2)}$ — кинематически возможные перемещения. Введём новую вектор-функцию

$$\delta u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}, \quad \delta u_i|_{S_u} = 0 \quad (39)$$

Умножим уравнение (36) на δu_i и проинтегрируем по объёму V . Получаем:

$$\int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV + \int_V F_i \delta u_i dV = \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV \quad (40)$$

Рассмотрим первое слагаемое в левой части (40):

$$\int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV = \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV \quad (41)$$

В формулах (42) использована формула произведения двух функций. Рассмотрим теперь интегралы в формуле (42). В первом интеграле воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского и переходим к интегралу по поверхности. С учётом (39) получаем:

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV = \int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS = \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS = \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS \quad (42)$$

Во втором слагаемом в (42) пользуемся свойствами градиента перемещения и раскладываем $\delta u_{i,j}$ на симметричную и антисимметричную часть:

$$\delta u_{i,j} = \delta \varepsilon_{ij} + \delta \omega_{ij},$$

где

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

и

$$\delta \omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}).$$

Далее воспользуемся тем, что полное произведение симметричного и антисимметричного тензоров равняется нулю и следовательно

$$\sigma_{ij} \delta u_{i,j} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}.$$

Таким образом, соотношение (40) принимает вид:

$$\int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS - \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_V F_i \delta u_i dV = \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV \quad (43)$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS + \int_V (F_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV \quad (44)$$

Равенство (44) представляет собой формулировку принципа возможных перемещений, который гласит следующее: работа внутренних сил на возможных перемещениях равняется работе внешних сил и сил инерции на возможных перемещениях.

Снова рассмотрим уравнение (40). Умножим его теперь на вектор скоростей $\dot{u}_i$ и проинтегрируем по объёму V :

$$\int_V \sigma_{ij,j} \dot{u}_i dV + \int_V F_i \dot{u}_i dV = \int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dV \quad (45)$$

Проделаем выкладки, аналогичные предыдущим:

$$\int_V \sigma_{ij,j} \dot{u}_i dV = \int_V (\sigma_{ij} \dot{u}_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} dV = \int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i dV - \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV \quad (46)$$

Равенство (45) принимает вид:

$$\int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i dV - \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV + \int_V F_i \dot{u}_i dV = \int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dV \quad (47)$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV + \int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dV = \int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i dV + \int_V F_i \dot{u}_i dV \quad (48)$$

Введём в рассмотрение две величины:

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \quad (49)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (50)$$

— кинетическая и потенциальная энергии соответственно. Найдём их производные по времени:

$$\dot{K} = \int_V \rho \dot{u}_i \ddot{u}_i dV \quad (51)$$

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{2} \int_V (\dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}) dV = \frac{1}{2} \int_V (C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \varepsilon_{ij} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \dot{\varepsilon}_{ij}) dV \quad (52)$$

Поменяем местами немые индексы в первом слагаемом в (52):

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{2} \int_V (C_{klij} \varepsilon_{kl} \dot{\varepsilon}_{ij} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \dot{\varepsilon}_{ij}) dV \quad (53)$$

Пользуемся свойствами тензора упругих констант:

$$C_{ijkl} = C_{klij},$$

следовательно

$$\dot{\Pi} = \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV \quad (54)$$

Таким образом, с учётом (49) и (54) соотношение (48) приобретает вид:

$$\frac{d}{dt} (\Pi + K) = \int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i dV + \int_V F_i \dot{u}_i dV \quad (55)$$

Равенство (55) представляет из себя формулировку **теоремы об изменении энергии**, которая гласит следующее: производная по времени от механической

энергии тела равняется мощности внешних сил.

Теорема единственности. Решение основной начально-краевой задачи (36)-(38) единственно.

Доказательство. Предположим противное: существуют два решения $\underline{u}^{(1)}$ и $\underline{u}^{(2)}$, $\underline{u}^{(1)} \neq \underline{u}^{(2)}$. Выпишем постановки задач для $\underline{u}^{(1)}$ и $\underline{u}^{(2)}$:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}^{(1)} + F_i = \rho \ddot{u}_i^{(1)}, \\ u_i^{(1)}|_{S_u} = u_i^0, \sigma_{ij}^{(1)} n_j|_{S_\sigma} = p_i, \\ u_i^{(1)}|_{t=0} = f_i(x), \dot{u}_i^{(1)}|_{t=0} = g_i(x) \end{cases} \quad (56)$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}^{(2)} + F_i = \rho \ddot{u}_i^{(2)}, \\ u_i^{(2)}|_{S_u} = u_i^0, \sigma_{ij}^{(2)} n_j|_{S_\sigma} = p_i, \\ u_i^{(2)}|_{t=0} = f_i(x), \dot{u}_i^{(2)}|_{t=0} = g_i(x) \end{cases} \quad (57)$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\tilde{u}_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}.$$

Вычтем теперь (57) из (56):

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{ij,j} = \rho \ddot{\tilde{u}}_i, \\ \tilde{u}_i|_{S_u} = 0, \tilde{\sigma}_{ij} n_j|_{S_\sigma} = 0, \\ \tilde{u}_i|_{t=0} = 0, \dot{\tilde{u}}_i|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (58)$$

Выпишем теорему об изменении энергии для функции $\tilde{u}$. В силу однородных граничных условий получаем:

$$\frac{d}{dt} (\tilde{\Pi} + \tilde{K}) = 0 \quad (59)$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_V \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} dV + \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\tilde{u}}_i \dot{\tilde{u}}_i dV \right) = 0 \quad (60)$$

Интегрируем и в силу однородных начальных условий получаем:

$$\frac{1}{2} \int_V \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} dV + \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\tilde{u}}_i \dot{\tilde{u}}_i dV = \text{const} = 0 \quad (61)$$

В выражениях для $\tilde{P}$ и $\tilde{K}$ под интегралами стоят положительно определённые квадратичные формы и следовательно, равенство (61) выполняется только если оба слагаемых обращаются в ноль:

$$\int_V \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} dV = 0, \quad (62)$$

$$\int_V \rho \dot{\tilde{u}}_i \dot{\tilde{u}}_i dV = 0 \quad (63)$$

В силу положительной определенности подынтегральных квадратичных форм мы можем заключить, что равенства (62) и (63) выполняются только если $\tilde{\varepsilon}_{ij} = 0$ и $\dot{\tilde{u}}_i = 0$. Следовательно, в силу однородных кинематических условий $\tilde{u}_i = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.