

Математические основы защиты информации

Лекция 8

Пилиди Владимир Ставрович

19 мая 2020 года

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

$$1) \forall x \in G \quad x^{-1}Hx \subset H$$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

$$1) \forall x \in G \quad x^{-1}Hx \subset H, \quad x(x^{-1}Hx) \subset xH$$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

$$1) \forall x \in G \quad x^{-1}Hx \subset H, \quad x(x^{-1}Hx) \subset xH, \quad Hx \subset xH$$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

$$1) \forall x \in G \quad x^{-1}Hx \subset H, \quad x(x^{-1}Hx) \subset xH, \quad Hx \subset xH, \\ Hx^{-1} \subset x^{-1}H$$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

$$1) \forall x \in G \quad x^{-1}Hx \subset H, \quad x(x^{-1}Hx) \subset xH, \quad Hx \subset xH, \\ Hx^{-1} \subset x^{-1}H, \quad x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x$$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

$$\begin{aligned} 1) \forall x \in G \quad & x^{-1}Hx \subset H, \quad x(x^{-1}Hx) \subset xH, \quad Hx \subset xH, \\ & Hx^{-1} \subset x^{-1}H, \quad x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x, \\ & xH \subset Hx \end{aligned}$$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

$$\begin{aligned} 1) \forall x \in G \quad & x^{-1}Hx \subset H, \quad x(x^{-1}Hx) \subset xH, \quad Hx \subset xH, \\ & Hx^{-1} \subset x^{-1}H, \quad x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x, \\ & xH \subset Hx, \quad xH = Hx. \end{aligned}$$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

- 1) $\forall x \in G \ x^{-1}Hx \subset H, x(x^{-1}Hx) \subset xH, Hx \subset xH, Hx^{-1} \subset x^{-1}H, x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x, xH \subset Hx, xH = Hx.$
- 2) H нормальная

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

- 1) $\forall x \in G \ x^{-1}Hx \subset H, x(x^{-1}Hx) \subset xH, Hx \subset xH, Hx^{-1} \subset x^{-1}H, x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x, xH \subset Hx, xH = Hx.$
- 2) H нормальная, $x \in G$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

- 1) $\forall x \in G \quad x^{-1}Hx \subset H, x(x^{-1}Hx) \subset xH, Hx \subset xH,$
 $Hx^{-1} \subset x^{-1}H, x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x,$
 $xH \subset Hx, xH = Hx.$
- 2) H нормальная, $x \in G, Hx = xH$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

$$1) \forall x \in G \quad x^{-1}Hx \subset H, \quad x(x^{-1}Hx) \subset xH, \quad Hx \subset xH, \\ Hx^{-1} \subset x^{-1}H, \quad x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x, \\ xH \subset Hx, \quad xH = Hx.$$

$$2) H \text{ нормальная, } x \in G, \quad Hx = xH, \quad x^{-1}(Hx) = x^{-1}(xH)$$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

$$1) \forall x \in G \quad x^{-1}Hx \subset H, \quad x(x^{-1}Hx) \subset xH, \quad Hx \subset xH, \\ Hx^{-1} \subset x^{-1}H, \quad x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x, \\ xH \subset Hx, \quad xH = Hx.$$

$$2) H \text{ нормальная, } x \in G, \quad Hx = xH, \quad x^{-1}(Hx) = x^{-1}(xH), \\ x^{-1}Hx = H$$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

$$1) \forall x \in G \quad x^{-1}Hx \subset H, \quad x(x^{-1}Hx) \subset xH, \quad Hx \subset xH, \\ Hx^{-1} \subset x^{-1}H, \quad x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x, \\ xH \subset Hx, \quad xH = Hx.$$

$$2) H \text{ нормальная, } x \in G, \quad Hx = xH, \quad x^{-1}(Hx) = x^{-1}(xH), \\ x^{-1}Hx = H, \quad x^{-1}Hx \subset H.$$



Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G \ x^{-1}Nx \subset N$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \ \forall y \in N \ x^{-1}yx \in N$.

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G \ x^{-1}Nx \subset N$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \ \forall y \in N \ x^{-1}yx \in N$.

Примеры.

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G x^{-1}Nx \subset N$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \forall y \in N x^{-1}yx \in N$.

Примеры.

1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G \ x^{-1}Nx \subset N$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \ \forall y \in N \ x^{-1}yx \in N$.

Примеры.

- 1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
- 2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G \ x^{-1}Nx \subset N$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \ \forall y \in N \ x^{-1}yx \in N$.

Примеры.

- 1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
- 2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.
- 3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \rightarrow G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G x^{-1}Nx \subset N$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \forall y \in N x^{-1}yx \in N$.

Примеры.

- 1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
- 2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.
- 3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \rightarrow G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.
 $x \in G_1, y \in \ker f$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G x^{-1}Nx \subset N$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \forall y \in N x^{-1}yx \in N$.

Примеры.

- 1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
- 2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.
- 3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \rightarrow G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.
 $x \in G_1, y \in \ker f, f(x^{-1}yx)$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G x^{-1}Nx \subset N$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \forall y \in N x^{-1}yx \in N$.

Примеры.

- 1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
- 2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.
- 3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \rightarrow G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.
 $x \in G_1, y \in \ker f, f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x)$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G x^{-1}Nx \subset N$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \forall y \in N x^{-1}yx \in N$.

Примеры.

- 1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
- 2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.
- 3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \rightarrow G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.
 $x \in G_1, y \in \ker f, f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x)$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G x^{-1}Nx \subset N$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \forall y \in N x^{-1}yx \in N$.

Примеры.

- 1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
- 2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.
- 3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \rightarrow G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.
 $x \in G_1, y \in \ker f, f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G x^{-1}Nx \subset N$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \forall y \in N x^{-1}yx \in N$.

Примеры.

- 1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
- 2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.
- 3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \rightarrow G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.

$x \in G_1, y \in \ker f, f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2,$
 $x^{-1}yx \in \ker f.$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G x^{-1}Nx \subset N$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \forall y \in N x^{-1}yx \in N$.

Примеры.

- 1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
- 2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.
- 3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \rightarrow G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.
 $x \in G_1, y \in \ker f, f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2,$
 $x^{-1}yx \in \ker f.$
- 4) $A_n \subset S_n$.

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G x^{-1}Nx \subset N$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \forall y \in N x^{-1}yx \in N$.

Примеры.

1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.

2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.

3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \rightarrow G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.

$x \in G_1, y \in \ker f, f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2,$
 $x^{-1}yx \in \ker f.$

4) $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{S}_n. \quad \varphi \in \mathbb{S}_n, \psi \in \mathbb{A}_n$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G x^{-1}Nx \subset N$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \forall y \in N x^{-1}yx \in N$.

Примеры.

1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.

2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.

3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \rightarrow G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.

$x \in G_1, y \in \ker f, f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2,$
 $x^{-1}yx \in \ker f.$

4) $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{S}_n. \quad \varphi \in \mathbb{S}_n, \psi \in \mathbb{A}_n \Rightarrow \varphi^{-1}\psi\varphi \stackrel{?}{\in} \mathbb{A}_n.$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \forall y \in H x^{-1}yx \in H$.

Примеры.

1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.

2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.

3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \rightarrow G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.

$x \in G_1, y \in \ker f, f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2,$
 $x^{-1}yx \in \ker f.$

4) $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{S}_n. \quad \varphi \in \mathbb{S}_n, \psi \in \mathbb{A}_n \Rightarrow \varphi^{-1}\psi\varphi \stackrel{?}{\in} \mathbb{A}_n.$
 $\varepsilon(\varphi^{-1}\psi\varphi)$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G \ x^{-1}Nx \subset N$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \ \forall y \in N \ x^{-1}yx \in N$.

Примеры.

1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.

2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.

3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \rightarrow G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.

$x \in G_1, y \in \ker f, f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2,$
 $x^{-1}yx \in \ker f.$

4) $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{S}_n. \quad \varphi \in \mathbb{S}_n, \psi \in \mathbb{A}_n \Rightarrow \varphi^{-1}\psi\varphi \stackrel{?}{\in} \mathbb{A}_n.$

$$\varepsilon(\varphi^{-1}\psi\varphi) = \varepsilon(\varphi^{-1}) \underbrace{\varepsilon(\psi)}_{=1} \varepsilon(\varphi)$$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G \ x^{-1}Nx \subset N$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \ \forall y \in N \ x^{-1}yx \in N$.

Примеры.

1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.

2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.

3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \rightarrow G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.

$x \in G_1, y \in \ker f, f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2,$
 $x^{-1}yx \in \ker f.$

4) $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{S}_n. \ \varphi \in \mathbb{S}_n, \psi \in \mathbb{A}_n \Rightarrow \varphi^{-1}\psi\varphi \overset{?}{\in} \mathbb{A}_n.$
 $\varepsilon(\varphi^{-1}\psi\varphi) = \varepsilon(\varphi^{-1}) \underbrace{\varepsilon(\psi)}_{=1} \varepsilon(\varphi) = (\varepsilon(\varphi))^2$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G \ x^{-1}Nx \subset N$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \ \forall y \in N \ x^{-1}yx \in N$.

Примеры.

1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.

2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.

3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \rightarrow G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.

$x \in G_1, y \in \ker f, f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2,$
 $x^{-1}yx \in \ker f.$

4) $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{S}_n. \quad \varphi \in \mathbb{S}_n, \psi \in \mathbb{A}_n \Rightarrow \varphi^{-1}\psi\varphi \overset{?}{\in} \mathbb{A}_n.$
 $\varepsilon(\varphi^{-1}\psi\varphi) = \varepsilon(\varphi^{-1}) \underbrace{\varepsilon(\psi)}_{=1} \varepsilon(\varphi) = (\varepsilon(\varphi))^2 = 1$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так:
 $\forall x \in G \forall y \in H x^{-1}yx \in H$.

Примеры.

1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.

2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.

3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \rightarrow G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.

$x \in G_1, y \in \ker f, f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2, x^{-1}yx \in \ker f$.

4) $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{S}_n. \varphi \in \mathbb{S}_n, \psi \in \mathbb{A}_n \Rightarrow \varphi^{-1}\psi\varphi \overset{?}{\in} \mathbb{A}_n$.

$\varepsilon(\varphi^{-1}\psi\varphi) = \varepsilon(\varphi^{-1}) \underbrace{\varepsilon(\psi)}_{=1} \varepsilon(\varphi) = (\varepsilon(\varphi))^2 = 1, \varphi^{-1}\psi\varphi \in \mathbb{A}_n$.

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.

$$|G : H| = 2$$

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.

$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.

$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс,

$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.

$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс,

$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.

6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.

$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс,

$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.

6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H = \{A \in G : \det A = 1\}$.

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.

$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс,

$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.

6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H = \{A \in G : \det A = 1\}$.

$A, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H$.

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.

$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс,

$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.

6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H = \{A \in G : \det A = 1\}$.

$A, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H$.

$\det(AB^{-1})$

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.

$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс,

$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.

6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H = \{A \in G : \det A = 1\}$.

$A, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H$.

$$\det(AB^{-1}) = \det A(\det B)^{-1}$$

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.

$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс,

$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.

6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H = \{A \in G : \det A = 1\}$.

$A, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H$.

$\det(AB^{-1}) = \det A(\det B)^{-1} = 1$.

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.

$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс,

$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.

6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H = \{A \in G : \det A = 1\}$.

$A, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H$.

$\det(AB^{-1}) = \det A(\det B)^{-1} = 1$.

$A \in G, B \in H \stackrel{?}{\Rightarrow} A^{-1}BA \in H$.

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.

$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс,

$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.

6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H = \{A \in G : \det A = 1\}$.

$A, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H$.

$\det(AB^{-1}) = \det A(\det B)^{-1} = 1$.

$A \in G, B \in H \stackrel{?}{\Rightarrow} A^{-1}BA \in H$.

$\det(A^{-1}BA)$

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.

$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс,

$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.

6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H = \{A \in G : \det A = 1\}$.

$A, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H$.

$\det(AB^{-1}) = \det A(\det B)^{-1} = 1$.

$A \in G, B \in H \stackrel{?}{\Rightarrow} A^{-1}BA \in H$.

$\det(A^{-1}BA) = (\det A)^{-1} \det B \det A$

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.

$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс,

$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.

6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H = \{A \in G : \det A = 1\}$.

$A, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H$.

$\det(AB^{-1}) = \det A(\det B)^{-1} = 1$.

$A \in G, B \in H \stackrel{?}{\Rightarrow} A^{-1}BA \in H$.

$\det(A^{-1}BA) = (\det A)^{-1} \det B \det A = (\det A)^{-1} \det A$

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.

$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс,

$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.

6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H = \{A \in G : \det A = 1\}$.

$A, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H$.

$\det(AB^{-1}) = \det A(\det B)^{-1} = 1$.

$A \in G, B \in H \stackrel{?}{\Rightarrow} A^{-1}BA \in H$.

$\det(A^{-1}BA) = (\det A)^{-1} \det B \det A = (\det A)^{-1} \det A = 1$.

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G , то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G , то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

A, B — смежные классы

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G , то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

A, B — смежные классы, $A = aH$, $B = bH$, $a, b \in G$

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G , то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

A, B — смежные классы, $A = aH$, $B = bH$, $a, b \in G$,
 $AB = (aH)(bH)$

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G , то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

$$A, B \text{ — смежные классы, } A = aH, B = bH, a, b \in G, \\ AB = (aH)(bH) = a(Hb)H$$

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G , то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

$$A, B \text{ — смежные классы, } A = aH, B = bH, a, b \in G, \\ AB = (aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H$$

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G , то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

$$\begin{aligned} A, B & \text{ — смежные классы, } A = aH, B = bH, a, b \in G, \\ AB & = (aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = \\ & = ab(HH) \end{aligned}$$

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G , то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

$$\begin{aligned} A, B & \text{ — смежные классы, } A = aH, B = bH, a, b \in G, \\ AB & = (aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = \\ & = ab(HH) = ab(HH) \end{aligned}$$

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G , то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

$$\begin{aligned} A, B & \text{ — смежные классы, } A = aH, B = bH, a, b \in G, \\ AB & = (aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = \\ & = ab(HH) = ab(HH) = abH \end{aligned}$$

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G , то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

$$\begin{aligned} A, B & \text{ — смежные классы, } A = aH, B = bH, a, b \in G, \\ AB & = (aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = \\ & = ab(HH) = ab(HH) = abH. \end{aligned}$$



Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G , то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

A, B — смежные классы, $A = aH$, $B = bH$, $a, b \in G$,

$$AB = (aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H =$$

$$= ab(HH) = ab(HH) = abH.$$

□

G/H множество всех смежных классов группы G по нормальной подгруппе H .

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G , то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

A, B — смежные классы, $A = aH$, $B = bH$, $a, b \in G$,

$$AB = (aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H =$$

$$= ab(HH) = ab(HH) = abH.$$

□

G/H множество всех смежных классов группы G по нормальной подгруппе H .

Множество G/H с операцией умножения смежных классов является группой.

1) Ассоциативность операции умножения:

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC)$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC) = (a(bc))H$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC) = (a(bc))H, (AB)C = A(BC).$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC) = (a(bc))H, (AB)C = A(BC).$$

2) Существование единичного элемента:

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC) = (a(bc))H, (AB)C = A(BC).$$

2) Существование единичного элемента:

$$H = eH$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC) = (a(bc))H, (AB)C = A(BC).$$

2) Существование единичного элемента:

$$H = eH, A = aH$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC) = (a(bc))H, (AB)C = A(BC).$$

2) Существование единичного элемента:

$$H = eH, A = aH, AH$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC) = (a(bc))H, (AB)C = A(BC).$$

2) Существование единичного элемента:

$$H = eH, A = aH, AH = aHH$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC) = (a(bc))H, (AB)C = A(BC).$$

2) Существование единичного элемента:

$$H = eH, A = aH, AH = aHH = aHH$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC) = (a(bc))H, (AB)C = A(BC).$$

2) Существование единичного элемента:

$$H = eH, A = aH, AH = aHH = aHH = aH$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC) = (a(bc))H, (AB)C = A(BC).$$

2) Существование единичного элемента:

$$H = eH, A = aH, AH = aHH = aHH = aH = A.$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC) = (a(bc))H, (AB)C = A(BC).$$

2) Существование единичного элемента:

$$H = eH, A = aH, AH = aHH = aHH = aH = A.$$

3) Существование обратного элемента:

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC) = (a(bc))H, (AB)C = A(BC).$$

2) Существование единичного элемента:

$$H = eH, A = aH, AH = aHH = aHH = aH = A.$$

3) Существование обратного элемента:

$$A = aH$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC) = (a(bc))H, (AB)C = A(BC).$$

2) Существование единичного элемента:

$$H = eH, A = aH, AH = aHH = aHH = aH = A.$$

3) Существование обратного элемента:

$$A = aH, (aH)(a^{-1}H)$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC) = (a(bc))H, (AB)C = A(BC).$$

2) Существование единичного элемента:

$$H = eH, A = aH, AH = aHH = aHH = aH = A.$$

3) Существование обратного элемента:

$$A = aH, (aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC) = (a(bc))H, (AB)C = A(BC).$$

2) Существование единичного элемента:

$$H = eH, A = aH, AH = aHH = aHH = aH = A.$$

3) Существование обратного элемента:

$$A = aH, (aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC) = (a(bc))H, (AB)C = A(BC).$$

2) Существование единичного элемента:

$$H = eH, A = aH, AH = aHH = aHH = aH = A.$$

3) Существование обратного элемента:

$$A = aH, (aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H.$$

1) Ассоциативность операции умножения:

$$A = aH, B = bH, C = cH,$$

$$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H,$$

$$A(BC) = (a(bc))H, (AB)C = A(BC).$$

2) Существование единичного элемента:

$$H = eH, A = aH, AH = aHH = aHH = aH = A.$$

3) Существование обратного элемента:

$$A = aH, (aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H.$$

Определение

Группа G/H называется факторгруппой группы G по нормальной подгруппе H .

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$$A = aH, B = bH$$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$$A = aH, B = bH, \\ AB$$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$$A = aH, B = bH,$$
$$AB = (aH)(bH)$$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$$\begin{aligned}A &= aH, \quad B = bH, \\AB &= (aH)(bH) = (ab)H\end{aligned}$$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$$A = aH, B = bH,$$

$$AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H$$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$$A = aH, B = bH,$$

$$AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH)$$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$$A = aH, B = bH,$$

$$AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.$$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$$A = aH, B = bH,$$

$$AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.$$

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$$A = aH, B = bH, \\ AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.$$

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

a — образующий элемент группы G

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$$A = aH, B = bH, \\ AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.$$

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

a — образующий элемент группы G , $B \in G/H$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$$A = aH, B = bH, \\ AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.$$

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

a — образующий элемент группы G , $B \in G/H$, $B = bH$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$$A = aH, B = bH, \\ AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.$$

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

$$a \text{ — образующий элемент группы } G, B \in G/H, B = bH, \\ b = a^k, k \in \mathbb{Z}$$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$$\begin{aligned}A &= aH, B = bH, \\AB &= (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.\end{aligned}$$

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

$$\begin{aligned}a &\text{ — образующий элемент группы } G, B \in G/H, B = bH, \\b &= a^k, k \in \mathbb{Z}, (aH)^k\end{aligned}$$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$$\begin{aligned}A &= aH, \quad B = bH, \\AB &= (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.\end{aligned}$$

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

$$\begin{aligned}a &\text{ — образующий элемент группы } G, \quad B \in G/H, \quad B = bH, \\b &= a^k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (aH)^k = a^k H\end{aligned}$$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$$A = aH, B = bH, \\ AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.$$

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

$$a \text{ — образующий элемент группы } G, B \in G/H, B = bH, \\ b = a^k, k \in \mathbb{Z}, (aH)^k = a^k H = bH$$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$$\begin{aligned}A &= aH, \quad B = bH, \\AB &= (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.\end{aligned}$$

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

$$\begin{aligned}a &\text{ — образующий элемент группы } G, \quad B \in G/H, \quad B = bH, \\b &= a^k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (aH)^k = a^k H = bH = B.\end{aligned}$$

Группы

Нормальные подгруппы

$$G = \mathbb{Z}, H = 5\mathbb{Z},$$

$$G = \mathbb{Z}, H = 5\mathbb{Z},$$

$$z_0 = 0 + H = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$

$$G = \mathbb{Z}, H = 5\mathbb{Z},$$

$$z_0 = 0 + H = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$

$$z_1 = 1 + H = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$$

$$G = \mathbb{Z}, H = 5\mathbb{Z},$$

$$z_0 = 0 + H = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$

$$z_1 = 1 + H = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$$

$$z_2 = 2 + H = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$$

$$G = \mathbb{Z}, H = 5\mathbb{Z},$$

$$z_0 = 0 + H = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$

$$z_1 = 1 + H = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$$

$$z_2 = 2 + H = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$$

$$z_3 = 3 + H = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$$

$$G = \mathbb{Z}, H = 5\mathbb{Z},$$

$$z_0 = 0 + H = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$

$$z_1 = 1 + H = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$$

$$z_2 = 2 + H = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$$

$$z_3 = 3 + H = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$$

$$z_4 = 4 + H = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$$

Группы

Нормальные подгруппы

$$G = \mathbb{Z}, H = 5\mathbb{Z},$$

$$z_0 = 0 + H = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$

$$z_1 = 1 + H = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$$

$$z_2 = 2 + H = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$$

$$z_3 = 3 + H = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$$

$$z_4 = 4 + H = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$$

| | z_0 | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| z_0 | z_0 | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 |
| z_1 | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 | z_0 |
| z_2 | z_2 | z_3 | z_4 | z_0 | z_1 |
| z_3 | z_3 | z_4 | z_0 | z_1 | z_2 |
| z_4 | z_4 | z_0 | z_1 | z_2 | z_3 |

Группы

Нормальные подгруппы

$$G = \mathbb{Z}, H = 5\mathbb{Z},$$

$$z_0 = 0 + H = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$

$$z_1 = 1 + H = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$$

$$z_2 = 2 + H = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$$

$$z_3 = 3 + H = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$$

$$z_4 = 4 + H = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$$

| | z_0 | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| z_0 | z_0 | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 |
| z_1 | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 | z_0 |
| z_2 | z_2 | z_3 | z_4 | z_0 | z_1 |
| z_3 | z_3 | z_4 | z_0 | z_1 | z_2 |
| z_4 | z_4 | z_0 | z_1 | z_2 | z_3 |

$$z_k + z_l = z_{(k+l) \bmod 5}$$

Группы

Нормальные подгруппы

$$G = \mathbb{Z}, H = 5\mathbb{Z},$$

$$z_0 = 0 + H = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$

$$z_1 = 1 + H = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$$

$$z_2 = 2 + H = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$$

$$z_3 = 3 + H = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$$

$$z_4 = 4 + H = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$$

| | z_0 | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| z_0 | z_0 | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 |
| z_1 | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 | z_0 |
| z_2 | z_2 | z_3 | z_4 | z_0 | z_1 |
| z_3 | z_3 | z_4 | z_0 | z_1 | z_2 |
| z_4 | z_4 | z_0 | z_1 | z_2 | z_3 |

$$z_k + z_l = z_{(k+l) \bmod 5}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_5.$$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G . Тогда отображение $\gamma : G \rightarrow G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker \gamma = H$, $\operatorname{im} \gamma = G/H$.

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G . Тогда отображение $\gamma : G \rightarrow G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker \gamma = H$, $\operatorname{im} \gamma = G/H$.

$$a, b \in G$$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G . Тогда отображение $\gamma : G \rightarrow G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker \gamma = H$, $\operatorname{im} \gamma = G/H$.

$$a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H$$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G . Тогда отображение $\gamma : G \rightarrow G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker \gamma = H$, $\operatorname{im} \gamma = G/H$.

$$a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H, \gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab).$$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G . Тогда отображение $\gamma : G \rightarrow G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker \gamma = H$, $\text{im } \gamma = G/H$.

$$a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H, \gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab).$$
$$\gamma(x) = H$$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G . Тогда отображение $\gamma : G \rightarrow G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker \gamma = H$, $\text{im } \gamma = G/H$.

$$a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H, \gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab).$$
$$\gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H$$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G . Тогда отображение $\gamma : G \rightarrow G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker \gamma = H$, $\operatorname{im} \gamma = G/H$.

$$a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H, \gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab). \\ \gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H \Leftrightarrow x \in H$$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G . Тогда отображение $\gamma : G \rightarrow G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker \gamma = H$, $\text{im } \gamma = G/H$.

$$a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H, \gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab).$$
$$\gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H \Leftrightarrow x \in H, \ker \gamma = H.$$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G . Тогда отображение $\gamma : G \rightarrow G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker \gamma = H$, $\text{im } \gamma = G/H$.

$$a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H, \gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab).$$

$$\gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H \Leftrightarrow x \in H, \ker \gamma = H.$$

$$xH \in G/H$$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G . Тогда отображение $\gamma : G \rightarrow G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker \gamma = H$, $\operatorname{im} \gamma = G/H$.

$$a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H, \gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab).$$

$$\gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H \Leftrightarrow x \in H, \ker \gamma = H.$$

$$xH \in G/H, \gamma(x) = xH$$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G . Тогда отображение $\gamma : G \rightarrow G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker \gamma = H$, $\operatorname{im} \gamma = G/H$.

$$a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H, \gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab).$$

$$\gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H \Leftrightarrow x \in H, \ker \gamma = H.$$

$$xH \in G/H, \gamma(x) = xH \Rightarrow xH \in \operatorname{im} \gamma$$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G . Тогда отображение $\gamma : G \rightarrow G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker \gamma = H$, $\operatorname{im} \gamma = G/H$.

$$a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H, \gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab).$$

$$\gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H \Leftrightarrow x \in H, \ker \gamma = H.$$

$$xH \in G/H, \gamma(x) = xH \Rightarrow xH \in \operatorname{im} \gamma \Rightarrow \operatorname{im} \gamma = G/H$$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G . Тогда отображение $\gamma : G \rightarrow G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker \gamma = H$, $\operatorname{im} \gamma = G/H$.

$$a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H, \gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab).$$

$$\gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H \Leftrightarrow x \in H, \ker \gamma = H.$$

$$xH \in G/H, \gamma(x) = xH \Rightarrow xH \in \operatorname{im} \gamma \Rightarrow \operatorname{im} \gamma = G/H. \quad \square$$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G . Тогда отображение $\gamma : G \rightarrow G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker \gamma = H$, $\operatorname{im} \gamma = G/H$.

$$a, b \in G, (aH)(bH) = (ab)H, \gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab).$$

$$\gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H \Leftrightarrow x \in H, \ker \gamma = H.$$

$$xH \in G/H, \gamma(x) = xH \Rightarrow xH \in \operatorname{im} \gamma \Rightarrow \operatorname{im} \gamma = G/H. \quad \square$$

Следствие

Любая нормальная подгруппа служит ядром некоторого гомоморфизма.

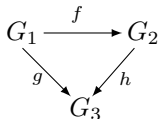
Обозначение гомоморфизма: $G_1 \xrightarrow{f} G_2$.

Обозначение гомоморфизма: $G_1 \xrightarrow{f} G_2$.

$G_1 \xrightarrow{f} G_2, G_1 \xrightarrow{g} G_3, G_2 \xrightarrow{h} G_3$

Обозначение гомоморфизма: $G_1 \xrightarrow{f} G_2$.

$G_1 \xrightarrow{f} G_2$, $G_1 \xrightarrow{g} G_3$, $G_2 \xrightarrow{h} G_3$



Обозначение гомоморфизма: $G_1 \xrightarrow{f} G_2$.

$G_1 \xrightarrow{f} G_2$, $G_1 \xrightarrow{g} G_3$, $G_2 \xrightarrow{h} G_3$

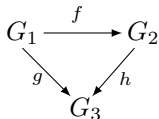


Диаграмма называется коммутативной, если $hf = g$.

Теорема (о гомоморфизмах)

Пусть $f : G \rightarrow G'$ — гомоморфизм

Теорема (о гомоморфизмах)

Пусть $f : G \rightarrow G'$ — гомоморфизм, $\text{im } f = G'$

Теорема (о гомоморфизмах)

Пусть $f : G \rightarrow G'$ — гомоморфизм, $\text{im } f = G'$, $\gamma : G \rightarrow G/\ker f$ — канонический гомоморфизм.

Теорема (о гомоморфизмах)

Пусть $f : G \rightarrow G'$ — гомоморфизм, $\text{im } f = G'$, $\gamma : G \rightarrow G/\ker f$ — канонический гомоморфизм.

Тогда группы G' и $G/\ker f$ изоморфны

Теорема (о гомоморфизмах)

Пусть $f : G \rightarrow G'$ — гомоморфизм, $\text{im } f = G'$, $\gamma : G \rightarrow G/\ker f$ — канонический гомоморфизм.

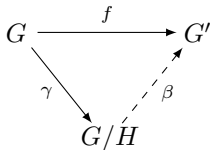
Тогда группы G' и $G/\ker f$ изоморфны и существует такой изоморфизм $\alpha : G' \rightarrow G/\ker f$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ & \searrow \gamma & \swarrow \alpha \\ & G/\ker f & \end{array}$$

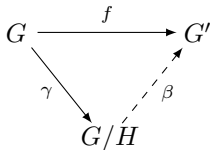
является коммутативной.

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .

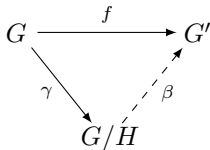


Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



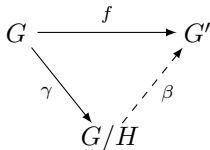
$A \in G/H$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



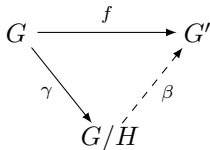
$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



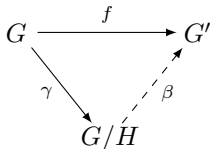
$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
 $f(A)$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



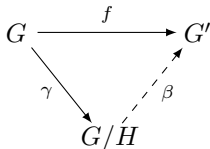
$$A \in G/H, A = aH, a \in G, \\ f(A) = f(aH)$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



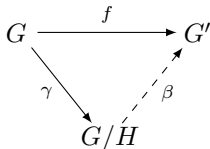
$$A \in G/H, A = aH, a \in G, \\ f(A) = f(aH) = f(a)f(H)$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



$$A \in G/H, A = aH, a \in G, \\ f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\}$$

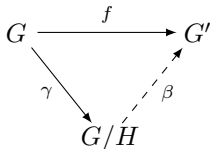
Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .

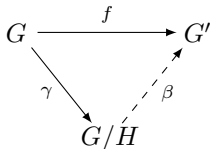


$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



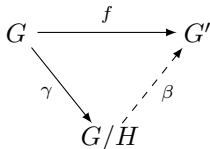
$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

$$\beta((aH)(bH))$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



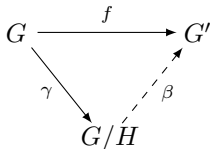
$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH)$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



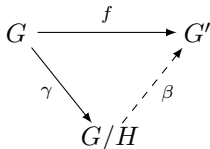
$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab)$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



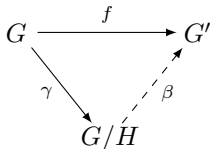
$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b)$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



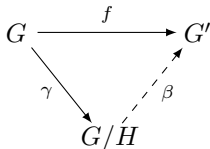
$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH).$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

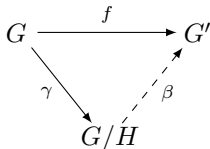
$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH).$$

$$\beta(xH) = e'$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

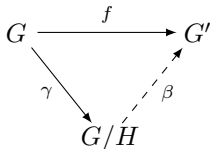
$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH).$$

$$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e'$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

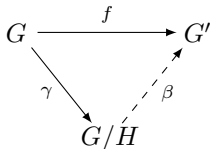
$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH).$$

$$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H}$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

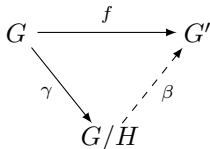
$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH).$$

$$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H.$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

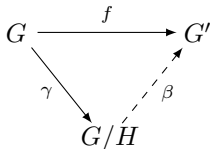
$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH).$$

$$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H.$$

$$\text{im } \beta$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

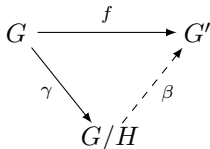
$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH).$$

$$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H.$$

$$\text{im } \beta = \text{im } f$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

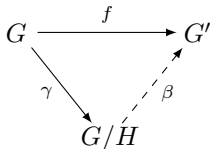
$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH).$$

$$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H.$$

$$\text{im } \beta = \text{im } f = G'.$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

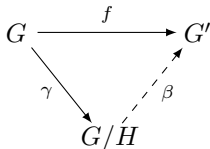
$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH).$$

$$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H.$$

$$\text{im } \beta = \text{im } f = G'.$$

β изоморфизм

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

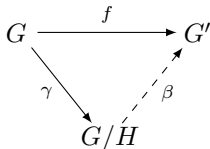
$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH).$$

$$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H.$$

$$\text{im } \beta = \text{im } f = G'.$$

$$\beta \text{ изоморфизм, } \alpha = \beta^{-1} : G' \rightarrow G/H$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

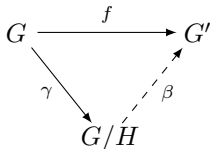
$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH).$$

$$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H.$$

$$\operatorname{im} \beta = \operatorname{im} f = G'.$$

β изоморфизм, $\alpha = \beta^{-1} : G' \rightarrow G/H$, это изоморфизм

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH).$$

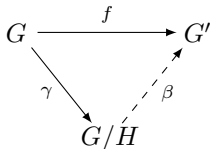
$$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H.$$

$$\text{im } \beta = \text{im } f = G'.$$

β изоморфизм, $\alpha = \beta^{-1} : G' \rightarrow G/H$, это изоморфизм,

$$\alpha(f(a)) = aH, a \in G$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH).$$

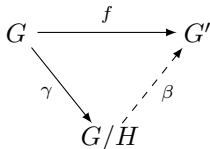
$$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H.$$

$$\text{im } \beta = \text{im } f = G'.$$

β изоморфизм, $\alpha = \beta^{-1} : G' \rightarrow G/H$, это изоморфизм,

$$\alpha(f(a)) = aH, a \in G, \forall a \in G \alpha(f(a)) = \gamma(a)$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH).$$

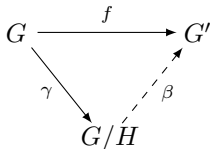
$$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H.$$

$$\text{im } \beta = \text{im } f = G'.$$

β изоморфизм, $\alpha = \beta^{-1} : G' \rightarrow G/H$, это изоморфизм,

$$\alpha(f(a)) = aH, a \in G, \forall a \in G \alpha(f(a)) = \gamma(a), \alpha f = \gamma$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G' .



$$A \in G/H, A = aH, a \in G,$$

$$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}.$$

$$\beta : G/H \rightarrow G', \beta : aH \mapsto f(a).$$

$$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH).$$

$$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H.$$

$$\operatorname{im} \beta = \operatorname{im} f = G'.$$

β изоморфизм, $\alpha = \beta^{-1} : G' \rightarrow G/H$, это изоморфизм,

$$\alpha(f(a)) = aH, a \in G, \forall a \in G \alpha(f(a)) = \gamma(a), \alpha f = \gamma.$$

□

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\text{im } f_1 = G_1$, $\text{im } f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\text{im } f_1 = G_1$, $\text{im } f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\text{im } f_1 = G_1$, $\text{im } f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\text{im } f_1 = G_1$, $\text{im } f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\text{im } f_1 = G_1$, $\text{im } f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\text{im } f_1 = G_1$, $\text{im } f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|}$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\text{im } f_1 = G_1$, $\text{im } f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2)$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2}$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2}$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2}$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\text{im } f_1 = G_1$, $\text{im } f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2)$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\text{im } f_1 = G_1$, $\text{im } f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2),$$

$\ker f$:

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2),$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2),$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2),$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z|$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\text{im } f_1 = G_1$, $\text{im } f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2),$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2),$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\text{im } f_1 = G_1$, $\text{im } f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2),$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+, \ker f = \mathbb{R}_+$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\text{im } f_1 = G_1$, $\text{im } f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2),$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+, \ker f = \mathbb{R}_+,$$

$\text{im } f$:

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2),$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+, \ker f = \mathbb{R}_+,$$

$\operatorname{im} f$:

$$\alpha \in [0, 2\pi]$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\text{im } f_1 = G_1$, $\text{im } f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2),$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+, \ker f = \mathbb{R}_+,$$

$\text{im } f$:

$$\alpha \in [0, 2\pi], f(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\text{im } f_1 = G_1$, $\text{im } f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2),$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+, \ker f = \mathbb{R}_+,$$

$\text{im } f$:

$$\alpha \in [0, 2\pi], f(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{|\cos \alpha + i \sin \alpha|}$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\text{im } f_1 = G_1$, $\text{im } f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2),$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+, \ker f = \mathbb{R}_+,$$

$\text{im } f$:

$$\alpha \in [0, 2\pi], f(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{|\cos \alpha + i \sin \alpha|} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2),$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+, \ker f = \mathbb{R}_+,$$

$\operatorname{im} f$:

$$\alpha \in [0, 2\pi], f(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{|\cos \alpha + i \sin \alpha|} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{U}$$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \rightarrow G_1$, $f_2 : G \rightarrow G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\text{im } f_1 = G_1$, $\text{im } f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$$H = \ker f_1 = \ker f_2, G_1 \cong G/H, G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2. \quad \square$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}, f : z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

$$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2),$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+, \ker f = \mathbb{R}_+,$$

$\text{im } f$:

$$\alpha \in [0, 2\pi], f(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{|\cos \alpha + i \sin \alpha|} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \text{im } f = \mathbb{U}. \quad \square$$

Группы

Нормальные подгруппы

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

Задача: $\mathbb{C}^* / \mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$$

Задача: $\mathbb{C}^* / \mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2},$$

Задача: $\mathbb{C}^* / \mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2},$$

$\ker f:$

Задача: $\mathbb{C}^* / \mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2},$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f: z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2},$$

$\ker f:$

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1$$

Задача: $\mathbb{C}^* / \mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2},$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f: z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2},$$

$\ker f:$

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z|$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f: z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2},$$

$\ker f:$

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$$

Задача: $\mathbb{C}^* / \mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2},$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*, \ker f = \mathbb{R}^*$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f: z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2},$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*, \ker f = \mathbb{R}^*,$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f: z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2},$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*, \ker f = \mathbb{R}^*,$$

$\operatorname{im} f$:

Группы

Нормальные подгруппы

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f: z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2},$$

$\ker f:$

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*, \ker f = \mathbb{R}^*,$$

$\operatorname{im} f:$

$$\alpha \in [0, \pi]$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f: z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2},$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*, \ker f = \mathbb{R}^*,$$

$\operatorname{im} f$:

$$\alpha \in [0, \pi], f(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Группы

Нормальные подгруппы

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f: z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2},$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*, \ker f = \mathbb{R}^*,$$

$\operatorname{im} f$:

$$\alpha \in [0, \pi], f(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha}{|\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha|}$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f: z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2},$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*, \ker f = \mathbb{R}^*,$$

$\operatorname{im} f$:

$$\alpha \in [0, \pi], f(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha}{|\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha|} = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f: z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2},$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*, \ker f = \mathbb{R}^*,$$

$\operatorname{im} f$:

$$\alpha \in [0, \pi], f(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha}{|\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha|} = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{U}$$

Группы

Нормальные подгруппы

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$$f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f: z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2},$$

$\ker f$:

$$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*, \ker f = \mathbb{R}^*,$$

$\operatorname{im} f$:

$$\alpha \in [0, \pi], f(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha}{|\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha|} = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{U}. \quad \square$$