Математические основы защиты информации

Лекция 8

Пилиди Владимир Ставрович

19 мая 2020 года

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

1) $\forall x \in G \ x^{-1}Hx \subset H$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

1) $\forall x \in G$ $x^{-1}Hx \subset H$, $x(x^{-1}Hx) \subset xH$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

1) $\forall x \in G$ $x^{-1}Hx \subset H$, $x(x^{-1}Hx) \subset xH$, $Hx \subset xH$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

1) $\forall x \in G$ $x^{-1}Hx \subset H$, $x(x^{-1}Hx) \subset xH$, $Hx \subset xH$,
$Hx^{-1} \subset x^{-1}H$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

1) $\forall x \in G\ x^{-1}Hx \subset H$, $x(x^{-1}Hx) \subset xH$, $Hx \subset xH$,
$Hx^{-1} \subset x^{-1}H$, $x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

1) $\forall x \in G \; x^{-1}Hx \subset H$, $x(x^{-1}Hx) \subset xH$, $Hx \subset xH$,
$Hx^{-1} \subset x^{-1}H$, $x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x$,
$xH \subset Hx$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

1) $\forall x \in G$ $x^{-1}Hx \subset H$, $x(x^{-1}Hx) \subset xH$, $Hx \subset xH$,
$Hx^{-1} \subset x^{-1}H$, $x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x$,
$xH \subset Hx$, $xH = Hx$.

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

1) $\forall x \in G$ $x^{-1}Hx \subset H$, $x(x^{-1}Hx) \subset xH$, $Hx \subset xH$,
$Hx^{-1} \subset x^{-1}H$, $x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x$,
$xH \subset Hx$, $xH = Hx$.
2) H нормальная

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

1) $\forall x \in G$ $x^{-1}Hx \subset H$, $x(x^{-1}Hx) \subset xH$, $Hx \subset xH$,
$Hx^{-1} \subset x^{-1}H$, $x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x$,
$xH \subset Hx$, $xH = Hx$.
2) H нормальная, $x \in G$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

1) $\forall x \in G$ $x^{-1}Hx \subset H$, $x(x^{-1}Hx) \subset xH$, $Hx \subset xH$,
$Hx^{-1} \subset x^{-1}H$, $x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x$,
$xH \subset Hx$, $xH = Hx$.
2) H нормальная, $x \in G$, $Hx = xH$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

1) $\forall x \in G$ $x^{-1}Hx \subset H$, $x(x^{-1}Hx) \subset xH$, $Hx \subset xH$,
$Hx^{-1} \subset x^{-1}H$, $x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x$,
$xH \subset Hx$, $xH = Hx$.
2) H нормальная, $x \in G$, $Hx = xH$, $x^{-1}(Hx) = x^{-1}(xH)$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

1) $\forall x \in G \ x^{-1}Hx \subset H$, $x(x^{-1}Hx) \subset xH$, $Hx \subset xH$,
$Hx^{-1} \subset x^{-1}H$, $x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x$,
$xH \subset Hx$, $xH = Hx$.
2) H нормальная, $x \in G$, $Hx = xH$, $x^{-1}(Hx) = x^{-1}(xH)$,
$x^{-1}Hx = H$

Определение

Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $x \in G$ имеет место равенство $xH = Hx$, то есть любой левый смежный класс является одновременно и правым смежным классом.

Вместо термина «нормальная подгруппа» используются также термины «инвариантная подгруппа» и «нормальный делитель».

Теорема

Подгруппа H группы G является нормальной в том и только том случае, когда $x^{-1}Hx \subset H$ для любого $x \in G$.

1) $\forall x \in G\ x^{-1}Hx \subset H$, $x(x^{-1}Hx) \subset xH$, $Hx \subset xH$,
$Hx^{-1} \subset x^{-1}H$, $x(Hx^{-1})x \subset x(x^{-1}H)x$,
$xH \subset Hx$, $xH = Hx$.
2) H нормальная, $x \in G$, $Hx = xH$, $x^{-1}(Hx) = x^{-1}(xH)$,
$x^{-1}Hx = H$, $x^{-1}Hx \subset H$. $\square$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G \ x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G \ \forall y \in H \ x^{-1}yx \in H$.

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G \; x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G \; \forall y \in H \; x^{-1}yx \in H$.

Примеры.

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G\ x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G\ \forall y \in H\ x^{-1}yx \in H$.

Примеры.
1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G\ x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G\ \forall y \in H\ x^{-1}yx \in H$.

Примеры.
1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G \ x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G \ \forall y \in H \ x^{-1}yx \in H$.

Примеры.
1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.
3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \to G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G\ x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G\ \forall y \in H\ x^{-1}yx \in H$.

Примеры.

1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.

2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.

3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \to G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.

$x \in G_1$, $y \in \ker f$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G\ x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G\ \forall y \in H\ x^{-1}yx \in H$.

Примеры.
1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.
3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \to G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.
$x \in G_1,\ y \in \ker f\ ,\ f(x^{-1}yx)$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G \ x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G \ \forall y \in H \ x^{-1}yx \in H$.

Примеры.
1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.
3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \to G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.
$x \in G_1$, $y \in \ker f$, $f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x)$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G\ x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G\ \forall y \in H\ x^{-1}yx \in H$.

Примеры.
1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.
3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \to G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.
$x \in G_1$, $y \in \ker f$, $f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x)$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G\ x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G\ \forall y \in H\ x^{-1}yx \in H$.

Примеры.
1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.
3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \to G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.
$x \in G_1$, $y \in \ker f$, $f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G\ x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G\ \forall y \in H\ x^{-1}yx \in H$.

Примеры.
1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.
3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \to G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.
$x \in G_1$, $y \in \ker f$, $f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2$, $x^{-1}yx \in \ker f$.

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G\ x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G\ \forall y \in H\ x^{-1}yx \in H$.

Примеры.
1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.
3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \to G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.
$x \in G_1$, $y \in \ker f$, $f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2$, $x^{-1}yx \in \ker f$.

4) $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{S}_n$.

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G\ x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G\ \forall y \in H\ x^{-1}yx \in H$.

Примеры.

1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.

2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.

3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \to G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.

$x \in G_1$, $y \in \ker f$, $f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2$, $x^{-1}yx \in \ker f$.

4) $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{S}_n$. $\quad \varphi \in \mathbb{S}_n$, $\psi \in \mathbb{A}_n$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G\ x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G\ \forall y \in H\ x^{-1}yx \in H$.

Примеры.

1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.

2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.

3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \to G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.

$x \in G_1$, $y \in \ker f$, $f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2$, $x^{-1}yx \in \ker f$.

4) $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{S}_n$. $\quad \varphi \in \mathbb{S}_n,\ \psi \in \mathbb{A}_n \Rightarrow \varphi^{-1}\psi\varphi \overset{?}{\in} \mathbb{A}_n$.

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G \; x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G \; \forall y \in H \; x^{-1}yx \in H$.

Примеры.

1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.

2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.

3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \to G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.

$x \in G_1$, $y \in \ker f$, $f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2$, $x^{-1}yx \in \ker f$.

4) $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{S}_n$. $\quad \varphi \in \mathbb{S}_n$, $\psi \in \mathbb{A}_n \Rightarrow \varphi^{-1}\psi\varphi \stackrel{?}{\in} \mathbb{A}_n$.

$\varepsilon(\varphi^{-1}\psi\varphi)$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G\ x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G\ \forall y \in H\ x^{-1}yx \in H$.

Примеры.
1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.
3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \to G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.
$x \in G_1$, $y \in \ker f$, $f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2$, $x^{-1}yx \in \ker f$.

4) $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{S}_n$. $\quad \varphi \in \mathbb{S}_n,\ \psi \in \mathbb{A}_n \Rightarrow \varphi^{-1}\psi\varphi \overset{?}{\in} \mathbb{A}_n$.
$\varepsilon(\varphi^{-1}\psi\varphi) = \varepsilon(\varphi^{-1})\underbrace{\varepsilon(\psi)}_{=1}\varepsilon(\varphi)$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G\ x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G\ \forall y \in H\ x^{-1}yx \in H$.

Примеры.
1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.
2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.
3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \to G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.
$x \in G_1,\ y \in \ker f\ ,\ f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2\ ,$
$x^{-1}yx \in \ker f$.

4) $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{S}_n$. $\quad \varphi \in \mathbb{S}_n,\ \psi \in \mathbb{A}_n \Rightarrow \varphi^{-1}\psi\varphi \overset{?}{\in} \mathbb{A}_n$.
$\varepsilon(\varphi^{-1}\psi\varphi) = \varepsilon(\varphi^{-1})\underbrace{\varepsilon(\psi)}_{=1}\varepsilon(\varphi) = (\varepsilon(\varphi))^2$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G\ x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G\ \forall y \in H\ x^{-1}yx \in H$.

Примеры.

1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.

2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.

3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \to G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.

$x \in G_1$, $y \in \ker f$, $f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2$, $x^{-1}yx \in \ker f$.

4) $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{S}_n$. $\quad \varphi \in \mathbb{S}_n,\ \psi \in \mathbb{A}_n \Rightarrow \varphi^{-1}\psi\varphi \overset{?}{\in} \mathbb{A}_n$.

$\varepsilon(\varphi^{-1}\psi\varphi) = \varepsilon(\varphi^{-1})\underbrace{\varepsilon(\psi)}_{=1}\varepsilon(\varphi) = (\varepsilon(\varphi))^2 = 1$

Замечание

Условие теоремы $\forall x \in G\ x^{-1}Hx \subset H$ может быть переписано так: $\forall x \in G\ \forall y \in H\ x^{-1}yx \in H$.

Примеры.

1) В любой группе G несобственные подгруппы $\{e\}$ и G являются нормальными.

2) Любая подгруппа коммутативной группы является нормальной.

3) Для любого гомоморфизма групп $f : G_1 \to G_2$ подгруппа $\ker f$ является нормальной.

$x \in G_1$, $y \in \ker f$, $f(x^{-1}yx) = f(x^{-1})f(y)f(x) = (f(x))^{-1}f(x) = e_2$, $x^{-1}yx \in \ker f$.

4) $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{S}_n$. $\quad \varphi \in \mathbb{S}_n$, $\psi \in \mathbb{A}_n \Rightarrow \varphi^{-1}\psi\varphi \overset{?}{\in} \mathbb{A}_n$.

$\varepsilon(\varphi^{-1}\psi\varphi) = \varepsilon(\varphi^{-1})\underbrace{\varepsilon(\psi)}_{=1}\varepsilon(\varphi) = (\varepsilon(\varphi))^2 = 1$, $\varphi^{-1}\psi\varphi \in \mathbb{A}_n$.

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.
$|G : H| = 2$

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.
$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.
$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс ,
$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.
$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс ,
$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.
6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.
$|G:H|=2$, H — левый и правый смежный класс ,
$G\setminus H$ — левый и правый смежный класс.
6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H=\{A\in G:\det A=1\}$.

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.
$|G:H|=2$, H — левый и правый смежный класс ,
$G\setminus H$ — левый и правый смежный класс.
6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H=\{A\in G:\det A=1\}$.
$A,\,B\in H\Rightarrow AB^{-1}\in H$.

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.
$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс ,
$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.
6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H = \{A \in G : \det A = 1\}$.
$A, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H$.
$\det(AB^{-1})$

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.
$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс ,
$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.
6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H = \{A \in G : \det A = 1\}$.
$A,\, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H$.
$\det(AB^{-1}) = \det A (\det B)^{-1}$

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.
$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс ,
$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.
6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H = \{A \in G : \det A = 1\}$.
$A, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H$.
$\det(AB^{-1}) = \det A (\det B)^{-1} = 1$.

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.
$|G:H|=2$, H — левый и правый смежный класс ,
$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.
6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H=\{A \in G : \det A = 1\}$.
$A,\, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H$.
$\det(AB^{-1}) = \det A(\det B)^{-1} = 1$.
$A \in G,\, B \in H \overset{?}{\Rightarrow} A^{-1}BA \in H$.

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.
$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс ,
$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.
6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H = \{A \in G : \det A = 1\}$.
$A, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H$.
$\det(AB^{-1}) = \det A(\det B)^{-1} = 1$.
$A \in G, B \in H \overset{?}{\Rightarrow} A^{-1}BA \in H$.
$\det(A^{-1}BA)$

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.
$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс ,
$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.
6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H = \{A \in G : \det A = 1\}$.
$A,\, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H$.
$\det(AB^{-1}) = \det A(\det B)^{-1} = 1$.
$A \in G,\, B \in H \overset{?}{\Rightarrow} A^{-1}BA \in H$.
$\det(A^{-1}BA) = (\det A)^{-1} \det B \det A$

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.
$|G:H| = 2$, H — левый и правый смежный класс ,
$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.
6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H = \{A \in G : \det A = 1\}$.
$A,\, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H$.
$\det(AB^{-1}) = \det A(\det B)^{-1} = 1$.
$A \in G,\, B \in H \overset{?}{\Rightarrow} A^{-1}BA \in H$.
$\det(A^{-1}BA) = (\det A)^{-1} \det B \det A = (\det A)^{-1} \det A$

5) Подгруппа индекса 2 является нормальной.
$|G : H| = 2$, H — левый и правый смежный класс ,
$G \setminus H$ — левый и правый смежный класс.
6) G — мультипликативная группа обратимых вещественных матриц порядка n , $H = \{A \in G : \det A = 1\}$.
$A,\, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H$.
$\det(AB^{-1}) = \det A(\det B)^{-1} = 1$.
$A \in G,\, B \in H \overset{?}{\Rightarrow} A^{-1}BA \in H$.
$\det(A^{-1}BA) = (\det A)^{-1} \det B \det A = (\det A)^{-1} \det A = 1$.

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G, то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G, то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

A, B — смежные классы

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G, то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

A, B — смежные классы, $A = aH$, $B = bH$, $a, b \in G$

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G, то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

A, B — смежные классы , $A = aH$, $B = bH$, a, $b \in G$,
$AB = (aH)(bH)$

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G, то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

A, B — смежные классы , $A = aH$, $B = bH$, a, $b \in G$,
$AB = (aH)(bH) = a(Hb)H$

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G, то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

A, B — смежные классы, $A = aH$, $B = bH$, $a, b \in G$,
$AB = (aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H$

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G, то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

A, B — смежные классы, $A = aH$, $B = bH$, a, $b \in G$,
$AB = (aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H =$
$= ab(HH)$

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G, то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

A, B — смежные классы, $A = aH$, $B = bH$, a, $b \in G$,
$AB = (aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H =$
$= ab(HH) = ab(HH)$

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G, то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

A, B — смежные классы, $A = aH$, $B = bH$, $a, b \in G$,
$AB = (aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H =$
$= ab(HH) = ab(HH) = abH$

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G, то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

A, B — смежные классы, $A = aH$, $B = bH$, $a, b \in G$,
$AB = (aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H =$
$= ab(HH) = ab(HH) = abH$. $\square$

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G, то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

A, B — смежные классы, $A = aH$, $B = bH$, $a, b \in G$,
$AB = (aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H =$
$= ab(HH) = ab(HH) = abH$. $\square$

G/H множество всех смежных классов группы G по нормальной подгруппе H.

Теорема

Если H нормальная подгруппа в группе G, то произведение любых смежных классов по этой подгруппе также является смежным классом.

A, B — смежные классы, $A = aH$, $B = bH$, a, $b \in G$,
$AB = (aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H =$
$= ab(HH) = ab(HH) = abH$. □

G/H множество всех смежных классов группы G по нормальной подгруппе H.

Множество G/H с операцией умножения смежных классов является группой.

1) Ассоциативность операции умножения:

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C$

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH$

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH$

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC)$

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC) = (a(bc))H$

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC) = (a(bc))H$, $(AB)C = A(BC)$.

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC) = (a(bc))H$, $(AB)C = A(BC)$.
2) Существование единичного элемента:

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC) = (a(bc))H$, $(AB)C = A(BC)$.
2) Существование единичного элемента:
$H = eH$

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC) = (a(bc))H$, $(AB)C = A(BC)$.
2) Существование единичного элемента:
$H = eH$, $A = aH$

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC) = (a(bc))H$, $(AB)C = A(BC)$.
2) Существование единичного элемента:
$H = eH$, $A = aH$, AH

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC) = (a(bc))H$, $(AB)C = A(BC)$.
2) Существование единичного элемента:
$H = eH$, $A = aH$, $AH = aHH$

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC) = (a(bc))H$, $(AB)C = A(BC)$.
2) Существование единичного элемента:
$H = eH$, $A = aH$, $AH = aHH = aHH$

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC) = (a(bc))H$, $(AB)C = A(BC)$.
2) Существование единичного элемента:
$H = eH$, $A = aH$, $AH = aHH = aHH = aH$

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC) = (a(bc))H$, $(AB)C = A(BC)$.
2) Существование единичного элемента:
$H = eH$, $A = aH$, $AH = aHH = aHH = aH = A$.

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC) = (a(bc))H$, $(AB)C = A(BC)$.
2) Существование единичного элемента:
$H = eH$, $A = aH$, $AH = aHH = aHH = aH = A$.
3) Существование обратного элемента:

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC) = (a(bc))H$, $(AB)C = A(BC)$.
2) Существование единичного элемента:
$H = eH$, $A = aH$, $AH = aHH = aHH = aH = A$.
3) Существование обратного элемента:
$A = aH$

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC) = (a(bc))H$, $(AB)C = A(BC)$.
2) Существование единичного элемента:
$H = eH$, $A = aH$, $AH = aHH = aHH = aH = A$.
3) Существование обратного элемента:
$A = aH$, $(aH)\,(a^{-1}H)$

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC) = (a(bc))H$, $(AB)C = A(BC)$.
2) Существование единичного элемента:
$H = eH$, $A = aH$, $AH = aHH = aHH = aH = A$.
3) Существование обратного элемента:
$A = aH$, $(aH)\,(a^{-1}H) = (aa^{-1})H$

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC) = (a(bc))H$, $(AB)C = A(BC)$.
2) Существование единичного элемента:
$H = eH$, $A = aH$, $AH = aHH = aHH = aH = A$.
3) Существование обратного элемента:
$A = aH$, $(aH)\,(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH$

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC) = (a(bc))H$, $(AB)C = A(BC)$.
2) Существование единичного элемента:
$H = eH$, $A = aH$, $AH = aHH = aHH = aH = A$.
3) Существование обратного элемента:
$A = aH$, $(aH)\,(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H$.

1) Ассоциативность операции умножения:
$A = aH, B = bH, C = cH$,
$(AB)C = ((aH)(bH))cH = (abH)cH = ((ab)c)H$,
$A(BC) = (a(bc))H$, $(AB)C = A(BC)$.
2) Существование единичного элемента:
$H = eH$, $A = aH$, $AH = aHH = aHH = aH = A$.
3) Существование обратного элемента:
$A = aH$, $(aH)\,(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H$.

Определение

Группа G/H называется факторгруппой группы G по нормальной подгруппе H.

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$A = aH$, $B = bH$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$A = aH$, $B = bH$,
AB

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$A = aH$, $B = bH$,
$AB = (aH)(bH)$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$A = aH$, $B = bH$,
$AB = (aH)(bH) = (ab)H$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$A = aH$, $B = bH$,
$AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$A = aH$, $B = bH$,
$AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH)$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$A = aH$, $B = bH$,
$AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$A = aH$, $B = bH$,
$AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.$

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$A = aH$, $B = bH$,
$AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.$

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

a — образующий элемент группы G

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$A = aH$, $B = bH$,
$AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.$

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

a — образующий элемент группы G, $B \in G/H$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$A = aH$, $B = bH$,
$AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.$

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

a — образующий элемент группы G , $B \in G/H$, $B = bH$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$A = aH$, $B = bH$,
$AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.$

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

a — образующий элемент группы G, $B \in G/H$, $B = bH$,
$b = a^k, k \in \mathbb{Z}$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$A = aH$, $B = bH$,
$AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA$.

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

a — образующий элемент группы G , $B \in G/H$, $B = bH$,
$b = a^k, k \in \mathbb{Z}$, $(aH)^k$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$A = aH$, $B = bH$,
$AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.$

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

a — образующий элемент группы G , $B \in G/H$, $B = bH$,
$b = a^k, k \in \mathbb{Z}$, $(aH)^k = a^k H$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$A = aH$, $B = bH$,
$AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.$

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

a — образующий элемент группы G , $B \in G/H$, $B = bH$,
$b = a^k, k \in \mathbb{Z}$, $(aH)^k = a^k H = bH$

Замечание

Факторгруппа коммутативной группы по ее произвольной подгруппе является коммутативной.

$A = aH$, $B = bH$,
$AB = (aH)(bH) = (ab)H = (ba)H = (bH)(aH) = BA.$

Замечание

Факторгруппа циклической группы по ее произвольной подгруппе является циклической.

a — образующий элемент группы G , $B \in G/H$, $B = bH$,
$b = a^k, k \in \mathbb{Z}$, $(aH)^k = a^k H = bH = B.$

$G = \mathbb{Z}$, $H = 5\mathbb{Z}$,

$G = \mathbb{Z}$, $H = 5\mathbb{Z}$,
$z_0 = 0 + H = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$

$G = \mathbb{Z}$, $H = 5\mathbb{Z}$,
$z_0 = 0 + H = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$
$z_1 = 1 + H = \{\dots, \ -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$

$G = \mathbb{Z}$, $H = 5\mathbb{Z}$,

$$z_0 = 0 + H = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$
$$z_1 = 1 + H = \{\dots, \ \ -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$$
$$z_2 = 2 + H = \{\dots, \ \ -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$$

$$
\begin{aligned}
&G = \mathbb{Z},\ H = 5\mathbb{Z},\\
&z_0 = 0 + H = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}\\
&z_1 = 1 + H = \{\dots,\ \ -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}\\
&z_2 = 2 + H = \{\dots,\ \ -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}\\
&z_3 = 3 + H = \{\dots,\ \ -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}
\end{aligned}
$$

$G = \mathbb{Z}$, $H = 5\mathbb{Z}$,

$z_0 = 0 + H = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$

$z_1 = 1 + H = \{\dots, \ -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$

$z_2 = 2 + H = \{\dots, \ -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$

$z_3 = 3 + H = \{\dots, \ -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$

$z_4 = 4 + H = \{\dots, \ -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$

$G = \mathbb{Z}$, $H = 5\mathbb{Z}$,

$z_0 = 0 + H = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$

$z_1 = 1 + H = \{\dots, \ -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$

$z_2 = 2 + H = \{\dots, \ -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$

$z_3 = 3 + H = \{\dots, \ -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$

$z_4 = 4 + H = \{\dots, \ -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
z_0	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
z_1	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0
z_2	z_2	z_3	z_4	z_0	z_1
z_3	z_3	z_4	z_0	z_1	z_2
z_4	z_4	z_0	z_1	z_2	z_3

$G = \mathbb{Z}$, $H = 5\mathbb{Z}$,

$z_0 = 0 + H = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$

$z_1 = 1 + H = \{\ldots, \quad -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$

$z_2 = 2 + H = \{\ldots, \quad -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$

$z_3 = 3 + H = \{\ldots, \quad -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}$

$z_4 = 4 + H = \{\ldots, \quad -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}$

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
z_0	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
z_1	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0
z_2	z_2	z_3	z_4	z_0	z_1
z_3	z_3	z_4	z_0	z_1	z_2
z_4	z_4	z_0	z_1	z_2	z_3

$z_k + z_l = z_{(k+l) \bmod 5}$

$G = \mathbb{Z}$, $H = 5\mathbb{Z}$,
$z_0 = 0 + H = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$
$z_1 = 1 + H = \{\dots, \ -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$
$z_2 = 2 + H = \{\dots, \ -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$
$z_3 = 3 + H = \{\dots, \ -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$
$z_4 = 4 + H = \{\dots, \ -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$

	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
z_0	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
z_1	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0
z_2	z_2	z_3	z_4	z_0	z_1
z_3	z_3	z_4	z_0	z_1	z_2
z_4	z_4	z_0	z_1	z_2	z_3

$z_k + z_l = z_{(k+l) \bmod 5}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_5$.

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда отображение $\gamma : G \to G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker \gamma = H$, $\operatorname{im} \gamma = G/H$.

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда отображение $\gamma : G \to G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker \gamma = H$, $\operatorname{im} \gamma = G/H$.

a, $b \in G$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда отображение $\gamma : G \to G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker\gamma = H$, $\operatorname{im}\gamma = G/H$.

a, $b \in G$, $(aH)(bH) = (ab)H$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда отображение $\gamma : G \to G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker \gamma = H$, $\operatorname{im} \gamma = G/H$.

$a, b \in G$, $(aH)(bH) = (ab)H$, $\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab)$.

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда отображение $\gamma : G \to G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker\gamma = H$, $\operatorname{im}\gamma = G/H$.

a, $b \in G$, $(aH)(bH) = (ab)H$, $\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab)$.
$\gamma(x) = H$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда отображение $\gamma : G \to G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker\gamma = H$, $\operatorname{im}\gamma = G/H$.

$a, b \in G$, $(aH)(bH) = (ab)H$, $\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab)$.
$\gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда отображение $\gamma : G \to G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker\gamma = H$, $\operatorname{im}\gamma = G/H$.

$a, b \in G$, $(aH)(bH) = (ab)H$, $\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab)$.
$\gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H \Leftrightarrow x \in H$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда отображение $\gamma : G \to G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker\gamma = H$, $\operatorname{im}\gamma = G/H$.

a, $b \in G$, $(aH)(bH) = (ab)H$, $\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab)$.
$\gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H \Leftrightarrow x \in H$, $\ker\gamma = H$.

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда отображение $\gamma : G \to G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker\gamma = H$, $\operatorname{im}\gamma = G/H$.

a, $b \in G$, $(aH)(bH) = (ab)H$, $\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab)$.
$\gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H \Leftrightarrow x \in H$, $\ker\gamma = H$.
$xH \in G/H$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда отображение $\gamma : G \to G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker\gamma = H$, $\operatorname{im}\gamma = G/H$.

$a, b \in G$, $(aH)(bH) = (ab)H$, $\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab)$.
$\gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H \Leftrightarrow x \in H$, $\ker\gamma = H$.
$xH \in G/H$, $\gamma(x) = xH$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда отображение $\gamma : G \to G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker\gamma = H$, $\operatorname{im}\gamma = G/H$.

a, $b \in G$, $(aH)(bH) = (ab)H$, $\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab)$.
$\gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H \Leftrightarrow x \in H$, $\ker\gamma = H$.
$xH \in G/H$, $\gamma(x) = xH \Rightarrow xH \in \operatorname{im}\gamma$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда отображение $\gamma : G \to G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker\gamma = H$, $\operatorname{im}\gamma = G/H$.

a, $b \in G$, $(aH)(bH) = (ab)H$, $\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab)$.
$\gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H \Leftrightarrow x \in H$, $\ker\gamma = H$.
$xH \in G/H$, $\gamma(x) = xH \Rightarrow xH \in \operatorname{im}\gamma \Rightarrow \operatorname{im}\gamma = G/H$

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда отображение $\gamma : G \to G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker\gamma = H$, $\operatorname{im}\gamma = G/H$.

$a,\, b \in G$, $(aH)(bH) = (ab)H$, $\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab)$.
$\gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H \Leftrightarrow x \in H$, $\ker\gamma = H$.
$xH \in G/H$, $\gamma(x) = xH \Rightarrow xH \in \operatorname{im}\gamma \Rightarrow \operatorname{im}\gamma = G/H$. □

Теорема

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда отображение $\gamma : G \to G/H$, $\gamma : x \mapsto xH$ является гомоморфизмом. При этом $\ker\gamma = H$, $\operatorname{im}\gamma = G/H$.

$a, b \in G$, $(aH)(bH) = (ab)H$, $\gamma(a)\gamma(b) = \gamma(ab)$.
$\gamma(x) = H \Leftrightarrow xH = H \Leftrightarrow x \in H$, $\ker\gamma = H$.
$xH \in G/H$, $\gamma(x) = xH \Rightarrow xH \in \operatorname{im}\gamma \Rightarrow \operatorname{im}\gamma = G/H$. $\square$

Следствие

Любая нормальная подгруппа служит ядром некоторого гомоморфизма.

Обозначение гомоморфизма: $G_1 \xrightarrow{f} G_2$.

Обозначение гомоморфизма: $G_1 \xrightarrow{f} G_2$.
$G_1 \xrightarrow{f} G_2$, $G_1 \xrightarrow{g} G_3$, $G_2 \xrightarrow{h} G_3$

Обозначение гомоморфизма: $G_1 \xrightarrow{f} G_2$.

$G_1 \xrightarrow{f} G_2$, $G_1 \xrightarrow{g} G_3$, $G_2 \xrightarrow{h} G_3$

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & G_2 \arrow[dl, "h"] \\
& G_3 &
\end{tikzcd}$$

Обозначение гомоморфизма: $G_1 \xrightarrow{f} G_2$.

$G_1 \xrightarrow{f} G_2$, $G_1 \xrightarrow{g} G_3$, $G_2 \xrightarrow{h} G_3$

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & G_2 \arrow[dl, "h"] \\ & G_3 & \end{tikzcd}$$

Диаграмма называется коммутативной, если $hf = g$.

Теорема (о гомоморфизмах)

Пусть $f : G \to G'$ — гомоморфизм

Теорема (о гомоморфизмах)

Пусть $f : G \to G'$ — гомоморфизм, $\operatorname{im} f = G'$

Теорема (о гомоморфизмах)

Пусть $f : G \to G'$ — гомоморфизм, $\operatorname{im} f = G'$, $\gamma : G \to G/\ker f$ — канонический гомоморфизм.

Теорема (о гомоморфизмах)

Пусть $f : G \to G'$ — гомоморфизм, $\operatorname{im} f = G'$, $\gamma : G \to G/\ker f$ — канонический гомоморфизм.
Тогда группы G' и $G/\ker f$ изоморфны

Теорема (о гомоморфизмах)

Пусть $f : G \to G'$ — гомоморфизм, $\operatorname{im} f = G'$, $\gamma : G \to G/\ker f$ — канонический гомоморфизм.
Тогда группы G' и $G/\ker f$ изоморфны и существует такой изоморфизм $\alpha : G' \to G/\ker f$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \arrow[dl, "\alpha"] \\ & G/\ker f & \end{tikzcd}$$

является коммутативной.

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\
& G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] &
\end{tikzcd}
$$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\
& G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A)$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\
& G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH)$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\
& G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H)$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\}$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.

Группы

Нормальные подгруппы

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.
$\beta((aH)(bH))$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.
$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH)$

Группы

Нормальные подгруппы

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\
& G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] &
\end{tikzcd}
$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.
$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab)$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.
$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b)$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.
$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH)$.

Группы
Нормальные подгруппы

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.
$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH)$.
$\beta(xH) = e'$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.
$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH)$.
$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e'$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.
$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH)$.
$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H}$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\
& G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,

$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.

$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.

$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH)$.

$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H$.

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.
$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH)$.
$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H$.

$\operatorname{im} \beta$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.
$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH)$.
$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H$.

$\operatorname{im} \beta = \operatorname{im} f$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\
& G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] &
\end{tikzcd}
$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.
$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH)$.
$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H$.

$\operatorname{im}\beta = \operatorname{im} f = G'$.

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.
$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH)$.
$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H$.

$\operatorname{im} \beta = \operatorname{im} f = G'$.
β изоморфизм

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\
& G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] &
\end{tikzcd}
$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,

$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.

$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.

$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH)$.

$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H$.

$\operatorname{im} \beta = \operatorname{im} f = G'$.

β изоморфизм, $\alpha = \beta^{-1} : G' \to G/H$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\
& G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] &
\end{tikzcd}
$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.
$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH)$.
$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H$.

$\operatorname{im} \beta = \operatorname{im} f = G'$.
β изоморфизм , $\alpha = \beta^{-1} : G' \to G/H$, это изоморфизм

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.
$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH)$.
$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H$.

$\operatorname{im} \beta = \operatorname{im} f = G'$.
β изоморфизм, $\alpha = \beta^{-1} : G' \to G/H$, это изоморфизм,
$\alpha(f(a)) = aH$, $a \in G$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\
& G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] &
\end{tikzcd}
$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.
$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH)$.
$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H$.

$\operatorname{im}\beta = \operatorname{im} f = G'$.
β изоморфизм, $\alpha = \beta^{-1} : G' \to G/H$, это изоморфизм,
$\alpha(f(a)) = aH$, $a \in G$, $\forall a \in G\ \alpha(f(a)) = \gamma(a)$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.
$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH)$.
$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H$.
$\operatorname{im}\beta = \operatorname{im} f = G'$.
β изоморфизм, $\alpha = \beta^{-1} : G' \to G/H$, это изоморфизм,
$\alpha(f(a)) = aH$, $a \in G$, $\forall a \in G\ \alpha(f(a)) = \gamma(a)$, $\alpha f = \gamma$

Обозначения: $H = \ker f$, e' — единичный элемент группы G'.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$A \in G/H$, $A = aH$, $a \in G$,
$f(A) = f(aH) = f(a)f(H) = f(a)\{e'\} = \{f(a)\}$.
$\beta : G/H \to G'$, $\beta : aH \mapsto f(a)$.
$\beta((aH)(bH)) = \beta(abH) = f(ab) = f(a)f(b) = \beta(aH)\beta(bH)$.
$\beta(xH) = e' \Leftrightarrow f(x) = e' \Leftrightarrow x \in \underbrace{\ker f}_{=H} \Leftrightarrow xH = H$.

$\operatorname{im}\beta = \operatorname{im} f = G'$.
β изоморфизм , $\alpha = \beta^{-1} : G' \to G/H$, это изоморфизм ,
$\alpha(f(a)) = aH$, $a \in G$, $\forall a \in G\ \alpha(f(a)) = \gamma(a)$, $\alpha f = \gamma$. $\square$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\mathrm{im}\, f_1 = G_1$, $\mathrm{im}\, f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2$, $G_1 \cong G/H$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2$, $G_1 \cong G/H$, $G_2 \cong G/H$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2$, $G_1 \cong G/H$, $G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2$. $\square$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ $\square$

<u>Задача:</u> $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2$, $G_1 \cong G/H$, $G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2$. $\square$

<u>Задача:</u> $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ □

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}\,,$

$f(z_1 z_2)$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ □

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}$,

$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2}$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2$, $G_1 \cong G/H$, $G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2$. $\square$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}$,
$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|}{z_1 z_2}$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ □

<ins>Задача:</ins> $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}\,,$

$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2}$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ $\square$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}\,,$

$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2)$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ $\square$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}$,
$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1)f(z_2)$,
$\ker f$:

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ □

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}$,
$f(z_1z_2) = \frac{|z_1z_2|}{z_1z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|}{z_1z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1)f(z_2)$,
$\ker f$:
$f(z) = 1$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ $\square$

<u>Задача:</u> $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}\,,$
$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1}\cdot\frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1)f(z_2),$
$\ker f$:
$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2$, $G_1 \cong G/H$, $G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2$. $\square$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}$,
$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2)$,
$\ker f$:
$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z|$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\; G_1 \cong G/H\,,\; G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ □

<u>Задача:</u> $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}$,

$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1) f(z_2)$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ $\square$

<u>Задача:</u> $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}$,

$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1)f(z_2)$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\mathrm{im}\, f_1 = G_1$, $\mathrm{im}\, f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ □

<u>Задача:</u> $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}$,
$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1)f(z_2)$,
$\ker f$:
$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+\,,\ \ker f = \mathbb{R}_+$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ $\square$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}$,
$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1)f(z_2)$,
$\ker f$:
$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+\,,\ \ker f = \mathbb{R}_+$,
$\operatorname{im} f$:

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ $\square$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}$,

$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1)f(z_2)$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+\,,\ \ker f = \mathbb{R}_+$,

$\operatorname{im} f$:

$\alpha \in [0, 2\pi]$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ $\square$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}$,
$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1)f(z_2)$,
$\ker f$:
$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+\,,\ \ker f = \mathbb{R}_+$,
$\operatorname{im} f$:
$\alpha \in [0, 2\pi]\,,\ f(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ $\square$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}$,
$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1)f(z_2)$,
$\ker f$:
$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+\,,\ \ker f = \mathbb{R}_+$,
$\operatorname{im} f$:
$\alpha \in [0, 2\pi]\,,\ f(\cos\alpha + i\sin\alpha) \ = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{|\cos\alpha + i\sin\alpha|}$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ $\square$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}\,,$

$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1}\cdot\frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1)f(z_2)$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+\,,\ \ker f = \mathbb{R}_+$,

$\operatorname{im} f$:

$\alpha \in [0, 2\pi]\,,\ f(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{|\cos\alpha + i\sin\alpha|} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\mathrm{im}\, f_1 = G_1$, $\mathrm{im}\, f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ □

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}\,,$
$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1)f(z_2)$,
$\ker f$:
$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+\,,\ \ker f = \mathbb{R}_+$,
$\mathrm{im}\, f$:
$\alpha \in [0, 2\pi]\,,\ f(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{|\cos\alpha + i\sin\alpha|} = \cos\alpha + i\sin\alpha$
$\Rightarrow \mathrm{im}\, f = \mathbb{U}$

Следствие

Предположим, что имеются гомоморфизмы групп $f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$, причем $\ker f_1 = \ker f_2$, $\operatorname{im} f_1 = G_1$, $\operatorname{im} f_2 = G_2$. Тогда группы G_1 и G_2 изоморфны.

$H = \ker f_1 = \ker f_2\,,\ G_1 \cong G/H\,,\ G_2 \cong G/H \Rightarrow G_1 \cong G_2\,.$ □

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto \frac{z}{|z|}$,

$f(z_1 z_2) = \frac{|z_1 z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|\cdot|z_2|}{z_1 z_2} = \frac{|z_1|}{z_1} \cdot \frac{|z_2|}{z_2} = f(z_1)f(z_2)$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{z} = 1 \Leftrightarrow z = |z| \Leftrightarrow z > 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+\,,\ \ker f = \mathbb{R}_+$,

$\operatorname{im} f$:

$\alpha \in [0, 2\pi]\,,\ f(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{|\cos\alpha + i\sin\alpha|} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$\Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{U}\,.$ □

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$

<u>Задача:</u> $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$,

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$,
$\ker f$:

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$,

$\ker f$:

$f(z) = 1$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2$

<u>Задача:</u> $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z|$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$

<u>Задача:</u> $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$, $\ker f = \mathbb{R}^*$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$, $\ker f = \mathbb{R}^*$,

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$, $\ker f = \mathbb{R}^*$,

$\operatorname{im} f$:

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$, $\ker f = \mathbb{R}^*$,

$\operatorname{im} f$:

$\alpha \in [0, \pi]$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$,
$\ker f$:
$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$, $\ker f = \mathbb{R}^*$,
$\operatorname{im} f$:
$\alpha \in [0, \pi]$, $f(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$, $\ker f = \mathbb{R}^*$,

$\operatorname{im} f$:

$\alpha \in [0, \pi]$, $f(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \frac{\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha}{|\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha|}$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$, $\ker f = \mathbb{R}^*$,

$\operatorname{im} f$:

$\alpha \in [0, \pi]$, $f(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \frac{\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha}{|\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha|} = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$, $\ker f = \mathbb{R}^*$,

$\operatorname{im} f$:

$\alpha \in [0, \pi]$, $f(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \frac{\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha}{|\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha|} = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$

$\Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{U}$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $f : z \mapsto \frac{z^2}{|z|^2}$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow \frac{z^2}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z = \pm|z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$, $\ker f = \mathbb{R}^*$,

$\operatorname{im} f$:

$\alpha \in [0, \pi]$, $f(\cos\alpha + i \sin\alpha) = \frac{\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha}{|\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha|} = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$

$\Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{U}$. $\square$