Математические основы защиты информации

Лекция 9

Пилиди Владимир Ставрович

26 мая 2020 года

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \stackrel{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+$,

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+, \ , \ f : z \mapsto |z|$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+, \, , \, f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+, \,, f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+, \ , \ f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.
Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+, \, , \, f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto z^n$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+, \ , \ f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}, \ f : z \mapsto z^n$,

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+, \, , \, f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.
Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}, \; f : z \mapsto z^n$,
$f(z_1 z_2)$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+$, , $f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto z^n$,
$f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+, \, , \, f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto z^n$,
$f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+,\ ,\ f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto z^n$,
$f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = f(z_1) f(z_2)$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+, \, , \, f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}, \; f : z \mapsto z^n$,
$f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = f(z_1) f(z_2)$,

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+$, , $f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto z^n$,
$f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = f(z_1) f(z_2)$,
$\ker f$:

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+,\ ,\ f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto z^n$,
$f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = f(z_1)f(z_2)$,
$\ker f$:
$f(z) = 1$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+$, , $f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto z^n$,
$f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = f(z_1)f(z_2)$,
$\ker f$:
$f(z) = 1 \Leftrightarrow z^n = 1$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+$, , $f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto z^n$,
$f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = f(z_1) f(z_2)$,
$\ker f$:
$f(z) = 1 \Leftrightarrow z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_n$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+, \ , \ f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}, \ f : z \mapsto z^n$,
$f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = f(z_1) f(z_2)$,
$\ker f$:
$f(z) = 1 \Leftrightarrow z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_n$, $\ker f = \mathbb{U}_n$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+, \, , \, f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}, \, f : z \mapsto z^n$,
$f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = f(z_1)f(z_2)$,
$\ker f$:
$f(z) = 1 \Leftrightarrow z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_n$, $\ker f = \mathbb{U}_n$,

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+, \, , \, f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto z^n$,
$f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = f(z_1) f(z_2)$,
$\ker f$:
$f(z) = 1 \Leftrightarrow z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_n$, $\ker f = \mathbb{U}_n$,
$\operatorname{im} f$:

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+,\ ,\ f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U},\ f : z \mapsto z^n$,
$f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = f(z_1) f(z_2)$,
$\ker f$:
$f(z) = 1 \Leftrightarrow z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_n$, $\ker f = \mathbb{U}_n$,
$\operatorname{im} f$:
$\alpha \in [0, 2\pi/n]$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \stackrel{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+,\ ,\ f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \stackrel{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U},\ f : z \mapsto z^n$,
$f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = f(z_1) f(z_2)$,
$\ker f$:
$f(z) = 1 \Leftrightarrow z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_n$, $\ker f = \mathbb{U}_n$,
$\operatorname{im} f$:
$\alpha \in [0, 2\pi/n]$, $f(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+, \, , \, f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}, \; f : z \mapsto z^n$,
$f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = f(z_1) f(z_2)$,
$\ker f$:
$f(z) = 1 \Leftrightarrow z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_n$, $\ker f = \mathbb{U}_n$,
$\operatorname{im} f$:
$\alpha \in [0, 2\pi/n]$, $f(\cos\alpha + i \sin\alpha) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.
$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+, \ , \ f : z \mapsto |z|$
$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.
Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}, \ f : z \mapsto z^n$,
$f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = f(z_1)f(z_2)$,
$\ker f$:
$f(z) = 1 \Leftrightarrow z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_n$, $\ker f = \mathbb{U}_n$,
$\operatorname{im} f$:
$\alpha \in [0, 2\pi/n]$, $f(\cos\alpha + i\sin\alpha) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+, \; , \; f : z \mapsto |z|$

$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.

$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}, \; f : z \mapsto z^n$,

$f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = f(z_1) f(z_2)$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_n$, $\ker f = \mathbb{U}_n$,

$\operatorname{im} f$:

$\alpha \in [0, 2\pi/n]$, $f(\cos\alpha + i\sin\alpha) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$

$\Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{U}$

Задача: $\mathbb{C}^*/\mathbb{U} \overset{?}{\cong} \mathbb{R}_+$.

$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+,$, $f : z \mapsto |z|$

$\ker f = \mathbb{U}$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}_+$.

Задача: $\mathbb{U}/\mathbb{U}_n \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$, $n \geqslant 2$.

$f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, $f : z \mapsto z^n$,

$f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = f(z_1) f(z_2)$,

$\ker f$:

$f(z) = 1 \Leftrightarrow z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_n$, $\ker f = \mathbb{U}_n$,

$\operatorname{im} f$:

$\alpha \in [0, 2\pi/n]$, $f(\cos\alpha + i\sin\alpha) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$

$\Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{U}$. $\square$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2)$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
ker f:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,

$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$

$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,

$\ker f$:

$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z}$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n$

<u>Задача:</u> $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,

$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,

$\ker f$:

$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,

$\operatorname{im} f$:

$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$

<u>Задача:</u> $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,

$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$

$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,

$\ker f$:

$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,

$\operatorname{im} f$:

$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. $\square$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. $\square$

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. □

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n,\ n \geqslant 2.$

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n,\ f : k \mapsto k \bmod n\,,$

$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$

$= f(k_1) \oplus f(k_2)\,,$

$\ker f$:

$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z},$

$\operatorname{im} f$:

$k \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\,,\ f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n\,.$ $\square$

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}.$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U},\ f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x\,,$

$f(x + y)$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. $\square$

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$,
$f(x + y) = \cos 2\pi(x + y) + i \sin 2\pi(x + y)$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. $\square$

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$,
$f(x+y) = \cos 2\pi(x+y) + i \sin 2\pi(x+y) =$
$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y)$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. $\square$

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$,
$f(x + y) = \cos 2\pi(x + y) + i \sin 2\pi(x + y) =$
$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) = f(x)f(y)$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. □

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$,
$f(x + y) = \cos 2\pi(x + y) + i \sin 2\pi(x + y) =$
$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) = f(x)f(y)$,

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. □

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$,
$f(x + y) = \cos 2\pi(x + y) + i \sin 2\pi(x + y) =$
$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) = f(x)f(y)$,
$\ker f$:

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. □

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$,
$f(x + y) = \cos 2\pi(x + y) + i \sin 2\pi(x + y) =$
$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) = f(x)f(y)$,
$\ker f$:
$f(x) = 1$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. $\square$

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$,
$f(x+y) = \cos 2\pi(x+y) + i \sin 2\pi(x+y) =$
$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) = f(x)f(y)$,
$\ker f$:
$f(x) = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. □

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$,
$f(x+y) = \cos 2\pi(x+y) + i \sin 2\pi(x+y) =$
$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) = f(x)f(y)$,
$\ker f$:
$f(x) = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x = 1, \sin 2\pi x = 0$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. $\square$

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$,
$f(x + y) = \cos 2\pi(x + y) + i \sin 2\pi(x + y) =$
$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) = f(x)f(y)$,
$\ker f$:
$f(x) = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x = 1, \sin 2\pi x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\pi x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,

$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$

$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,

$\ker f$:

$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,

$\operatorname{im} f$:

$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. □

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$,

$f(x+y) = \cos 2\pi(x+y) + i \sin 2\pi(x+y) =$

$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) = f(x) f(y)$,

$\ker f$:

$f(x) = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x = 1,\ \sin 2\pi x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\pi x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. $\square$

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$,
$f(x + y) = \cos 2\pi(x + y) + i \sin 2\pi(x + y) =$
$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) = f(x)f(y)$,
$\ker f$:
$f(x) = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x = 1, \sin 2\pi x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\pi x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = \mathbb{Z}$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. $\square$

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$,
$f(x + y) = \cos 2\pi(x + y) + i \sin 2\pi(x + y) =$
$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) = f(x)f(y)$,
$\ker f$:
$f(x) = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x = 1, \sin 2\pi x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\pi x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = \mathbb{Z}$,

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
ker f:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
im f:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. □

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$,
$f(x + y) = \cos 2\pi(x + y) + i \sin 2\pi(x + y) =$
$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) = f(x)f(y)$,
ker f:
$f(x) = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x = 1, \sin 2\pi x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\pi x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = \mathbb{Z}$,
im f:

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. □

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$,
$f(x + y) = \cos 2\pi(x + y) + i \sin 2\pi(x + y) =$
$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) = f(x)f(y)$,
$\ker f$:
$f(x) = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x = 1, \sin 2\pi x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\pi x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = \mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$0 \leqslant x < 1$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
$\ker f$:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. $\square$

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$,
$f(x + y) = \cos 2\pi(x + y) + i \sin 2\pi(x + y) =$
$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) = f(x)f(y)$,
$\ker f$:
$f(x) = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x = 1, \sin 2\pi x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\pi x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = \mathbb{Z}$,
$\operatorname{im} f$:
$0 \leqslant x < 1 \Rightarrow 0 \leqslant 2\pi x < 2\pi$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n$, $n \geqslant 2$.
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $f : k \mapsto k \bmod n$,
$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$
$= f(k_1) \oplus f(k_2)$,
ker f:
$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z}$,
im f:
$k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{Z}_n$. $\square$

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$,
$f(x + y) = \cos 2\pi(x + y) + i \sin 2\pi(x + y) =$
$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) = f(x)f(y)$,
ker f:
$f(x) = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x = 1, \sin 2\pi x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\pi x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = \mathbb{Z}$,
im f:
$0 \leqslant x < 1 \ \Rightarrow 0 \leqslant 2\pi x < 2\pi \quad \Rightarrow \operatorname{im} f = \mathbb{U}$

Задача: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{Z}_n,\ n \geqslant 2.$

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n,\ f : k \mapsto k \bmod n\,,$

$f(k_1 + k_2) = (k_1 + k_2) \bmod n = (k_1 \bmod n + k_2 \bmod n) \bmod n =$

$= f(k_1) \oplus f(k_2)\,,$

$\ker f$:

$f(k) = 0 \Leftrightarrow k \bmod n = 0 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = n\mathbb{Z},$

$\mathrm{im}\, f$:

$k \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\,,\ f(k) = k \bmod n = k \in \mathbb{Z}_n \quad \Rightarrow \mathrm{im}\, f = \mathbb{Z}_n\,.$ □

Задача: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{?}{\cong} \mathbb{U}.$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{U},\ f : x \mapsto \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x\,,$

$f(x+y) = \cos 2\pi(x+y) + i \sin 2\pi(x+y) =$

$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) = f(x)f(y)\,,$

$\ker f$:

$f(x) = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi x = 1,\ \sin 2\pi x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\pi x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ker f = \mathbb{Z},$

$\mathrm{im}\, f$:

$0 \leqslant x < 1 \ \Rightarrow 0 \leqslant 2\pi x < 2\pi \quad \Rightarrow \mathrm{im}\, f = \mathbb{U}\,.$ □

G_1, G_2

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.
1) Ассоциативность:

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2)$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.
1) Ассоциативность:
$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2)$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$.

1) Ассоциативность:

$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1b_1, a_2b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1b_1)c_1, (a_2b_2)c_2\big)$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big)$$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) = \\ = \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2)$$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1b_1, a_2b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1b_1)c_1, (a_2b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1c_1), a_2(b_2c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1c_1, b_2c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big)$$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1b_1, a_2b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1b_1)c_1, (a_2b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1c_1), a_2(b_2c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1c_1, b_2c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) .$$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) \ .$$

2) Единичный элемент:

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) \ .$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2)

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) .$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2) , $(e_1, e_2)(a_1, a_2)$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1b_1, a_2b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1b_1)c_1, (a_2b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1c_1), a_2(b_2c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1c_1, b_2c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) .$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2) , $(e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1a_1, e_2a_2)$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) .$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2) , $(e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1 a_1, e_2 a_2) = (a_1, a_2)$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) .$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2) , $(e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1 a_1, e_2 a_2) = (a_1, a_2)$

3) Обратный элемент:

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) .$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2) , $(e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1 a_1, e_2 a_2) = (a_1, a_2)$

3) Обратный элемент:

$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$

$G_1,\ G_2\ ,\ G_1 \times G_2\ ,\ (a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2).$

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big)\ .$$

2) Единичный элемент:

$(e_1, e_2)\ ,\ (e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1 a_1, e_2 a_2) = (a_1, a_2)$

3) Обратный элемент:

$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})\ ,\ (a, b)^n = (a^n, b^n) n \in \mathbb{Z}.$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) \ .$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2) , $(e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1 a_1, e_2 a_2) = (a_1, a_2)$

3) Обратный элемент:

$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$, $(a, b)^n = (a^n, b^n) n \in \mathbb{Z}$.

Обозначения $G_1 \times G_2$, $G_1 \oplus G_2$.

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) .$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2) , $(e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1 a_1, e_2 a_2) = (a_1, a_2)$

3) Обратный элемент:

$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$, $(a, b)^n = (a^n, b^n) n \in \mathbb{Z}$.

Обозначения $G_1 \times G_2$, $G_1 \oplus G_2$.

$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$.

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1b_1, a_2b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1b_1)c_1, (a_2b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1c_1), a_2(b_2c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1c_1, b_2c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) .$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2) , $(e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1a_1, e_2a_2) = (a_1, a_2)$

3) Обратный элемент:

$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$, $(a, b)^n = (a^n, b^n) n \in \mathbb{Z}$.

Обозначения $G_1 \times G_2$, $G_1 \oplus G_2$.

$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$.

$G_1 \times G_2$ коммутативная

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) .$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2) , $(e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1 a_1, e_2 a_2) = (a_1, a_2)$

3) Обратный элемент:

$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$, $(a, b)^n = (a^n, b^n) n \in \mathbb{Z}$.

Обозначения $G_1 \times G_2$, $G_1 \oplus G_2$.

$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$.

$G_1 \times G_2$ коммутативная $\Leftrightarrow$ G_1 и G_2 коммутативные

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) \ .$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2) , $(e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1 a_1, e_2 a_2) = (a_1, a_2)$

3) Обратный элемент:

$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$, $(a, b)^n = (a^n, b^n) n \in \mathbb{Z}$.

Обозначения $G_1 \times G_2$, $G_1 \oplus G_2$.

$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$.

$G_1 \times G_2$ коммутативная $\Leftrightarrow$ G_1 и G_2 коммутативные.

$|(a, b)| < \infty$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) .$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2) , $(e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1 a_1, e_2 a_2) = (a_1, a_2)$

3) Обратный элемент:

$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$, $(a, b)^n = (a^n, b^n) n \in \mathbb{Z}$.

Обозначения $G_1 \times G_2$, $G_1 \oplus G_2$.

$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$.

$G_1 \times G_2$ коммутативная $\Leftrightarrow$ G_1 и G_2 коммутативные .

$|(a, b)| < \infty \Leftrightarrow |a| < \infty$, $|b| < \infty$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) \ .$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2) , $(e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1 a_1, e_2 a_2) = (a_1, a_2)$

3) Обратный элемент:

$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$, $(a, b)^n = (a^n, b^n) n \in \mathbb{Z}$.

Обозначения $G_1 \times G_2$, $G_1 \oplus G_2$.

$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$.

$G_1 \times G_2$ коммутативная $\Leftrightarrow$ G_1 и G_2 коммутативные.

$|(a, b)| < \infty \Leftrightarrow |a| < \infty$, $|b| < \infty$.

$|a| = m$, $|b| = n$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) \ .$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2) , $(e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1 a_1, e_2 a_2) = (a_1, a_2)$

3) Обратный элемент:

$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$, $(a, b)^n = (a^n, b^n) n \in \mathbb{Z}$.

Обозначения $G_1 \times G_2$, $G_1 \oplus G_2$.

$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$.

$G_1 \times G_2$ коммутативная $\Leftrightarrow$ G_1 и G_2 коммутативные.

$|(a, b)| < \infty \Leftrightarrow |a| < \infty, \ |b| < \infty$.

$|a| = m, \ |b| = n$, $(a, b)^k = (e_1, e_2)$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) .$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2) , $(e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1 a_1, e_2 a_2) = (a_1, a_2)$

3) Обратный элемент:

$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$, $(a, b)^n = (a^n, b^n) n \in \mathbb{Z}$.

Обозначения $G_1 \times G_2$, $G_1 \oplus G_2$.

$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$.

$G_1 \times G_2$ коммутативная $\Leftrightarrow$ G_1 и G_2 коммутативные.

$|(a, b)| < \infty \Leftrightarrow |a| < \infty, \ |b| < \infty$.

$|a| = m, \ |b| = n$, $(a, b)^k = (e_1, e_2) \Leftrightarrow a^k = e_1, \ b^k = e_2$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1b_1, a_2b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1b_1)c_1, (a_2b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1c_1), a_2(b_2c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1c_1, b_2c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) .$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2) , $(e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1a_1, e_2a_2) = (a_1, a_2)$

3) Обратный элемент:

$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$, $(a, b)^n = (a^n, b^n) n \in \mathbb{Z}$.

Обозначения $G_1 \times G_2$, $G_1 \oplus G_2$.

$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$.

$G_1 \times G_2$ коммутативная $\Leftrightarrow$ G_1 и G_2 коммутативные.

$|(a, b)| < \infty \Leftrightarrow |a| < \infty$, $|b| < \infty$.

$|a| = m$, $|b| = n$, $(a, b)^k = (e_1, e_2) \Leftrightarrow a^k = e_1$, $b^k = e_2 \Leftrightarrow m|k$, $n|k$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) \,.$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2) , $(e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1 a_1, e_2 a_2) = (a_1, a_2)$

3) Обратный элемент:

$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$, $(a, b)^n = (a^n, b^n) n \in \mathbb{Z}$.

Обозначения $G_1 \times G_2$, $G_1 \oplus G_2$.

$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$.

$G_1 \times G_2$ коммутативная $\Leftrightarrow$ G_1 и G_2 коммутативные.

$|(a, b)| < \infty \Leftrightarrow |a| < \infty, \; |b| < \infty$.

$|a| = m$, $|b| = n$, $(a, b)^k = (e_1, e_2) \Leftrightarrow a^k = e_1, \; b^k = e_2 \Leftrightarrow m|k, \; n|k \Rightarrow$
$\Rightarrow |(a, b)| = [m, n]$

G_1, G_2 , $G_1 \times G_2$, $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$.

1) Ассоциативность:

$$\big((a_1, a_2)(b_1, b_2)\big)(c_1, c_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)(c_1, c_2) = \big((a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2\big) =$$
$$= \big(a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2)\big) = (a_1, a_2)(b_1 c_1, b_2 c_2) = (a_1, a_2)\big((b_1, b_2)(c_1, c_2)\big) .$$

2) Единичный элемент:

(e_1, e_2) , $(e_1, e_2)(a_1, a_2) = (e_1 a_1, e_2 a_2) = (a_1, a_2)$

3) Обратный элемент:

$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$, $(a, b)^n = (a^n, b^n) n \in \mathbb{Z}$.

Обозначения $G_1 \times G_2$, $G_1 \oplus G_2$.

$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$.

$G_1 \times G_2$ коммутативная $\Leftrightarrow$ G_1 и G_2 коммутативные .

$|(a, b)| < \infty \Leftrightarrow |a| < \infty$, $|b| < \infty$.

$|a| = m$, $|b| = n$, $(a, b)^k = (e_1, e_2) \Leftrightarrow a^k = e_1$, $b^k = e_2 \Leftrightarrow m|k$, $n|k \Rightarrow$

$\Rightarrow |(a, b)| = [m, n]$, $|(a, b)| = [|a|, |b|]$.

Определение

Говорят, что группа G имеет конечную экспоненту, если существует такое натуральное n, что для любого $x \in G$ выполняется равенство $x^n = e$.

Определение

Говорят, что группа G имеет конечную экспоненту, если существует такое натуральное n, что для любого $x \in G$ выполняется равенство $x^n = e$.
В этом случае наименьшее n, удовлетворяющее этому условию, называется экспонентой группы и обозначается $\exp(G)$.

Определение

Говорят, что группа G имеет конечную экспоненту, если существует такое натуральное n, что для любого $x \in G$ выполняется равенство $x^n = e$.
В этом случае наименьшее n, удовлетворяющее этому условию, называется экспонентой группы и обозначается $\exp(G)$.

Свойство

Группа имеет конечную экспоненту тогда и только тогда, когда все ее элементы имеют конечные порядки и существует ненулевое общее кратное этих порядков.
В этом случае экспонента группы равна наименьшему натуральному общему кратному порядков ее элементов.

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы.

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы. Экспонента этой группы делит порядок группы.

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы.
Экспонента этой группы делит порядок группы.
Имеет место неравенство $\exp(G) \leqslant |G|$.

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы. Экспонента этой группы делит порядок группы.
Имеет место неравенство $\exp(G) \leqslant |G|$.

Свойство

Пусть G — коммутативная группа с конечной экспонентой. Тогда существует элемент $x \in G$, порядок которого равен экспоненте группы.

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы. Экспонента этой группы делит порядок группы. Имеет место неравенство $\exp(G) \leqslant |G|$.

Свойство

Пусть G — коммутативная группа с конечной экспонентой. Тогда существует элемент $x \in G$, порядок которого равен экспоненте группы.

$\exp(G) = m$

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы. Экспонента этой группы делит порядок группы.
Имеет место неравенство $\exp(G) \leqslant |G|$.

Свойство

Пусть G — коммутативная группа с конечной экспонентой. Тогда существует элемент $x \in G$, порядок которого равен экспоненте группы.

$\exp(G) = m\,,\; m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы. Экспонента этой группы делит порядок группы.
Имеет место неравенство $\exp(G) \leqslant |G|$.

Свойство

Пусть G — коммутативная группа с конечной экспонентой. Тогда существует элемент $x \in G$, порядок которого равен экспоненте группы.

$\exp(G) = m \, , \, m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r} \, , \, x \in G$

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы. Экспонента этой группы делит порядок группы. Имеет место неравенство $\exp(G) \leqslant |G|$.

Свойство

Пусть G — коммутативная группа с конечной экспонентой. Тогда существует элемент $x \in G$, порядок которого равен экспоненте группы.

$\exp(G) = m$, $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$, $x \in G$, $|x| = p_1^{k_1} s$, $s \in \mathbb{N}$

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы. Экспонента этой группы делит порядок группы.
Имеет место неравенство $\exp(G) \leqslant |G|$.

Свойство

Пусть G — коммутативная группа с конечной экспонентой. Тогда существует элемент $x \in G$, порядок которого равен экспоненте группы.

$\exp(G) = m\,,\ m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}\,,\ x \in G\,,\ |x| = p_1^{k_1} s,\ s \in \mathbb{N}\,.$

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы.
Экспонента этой группы делит порядок группы.
Имеет место неравенство $\exp(G) \leqslant |G|$.

Свойство

Пусть G — коммутативная группа с конечной экспонентой. Тогда существует элемент $x \in G$, порядок которого равен экспоненте группы.

$\exp(G) = m\,,\ m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}\,,\ x \in G\,,\ |x| = p_1^{k_1} s,\ s \in \mathbb{N}\,.$
$y_1 = x^s$

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы. Экспонента этой группы делит порядок группы. Имеет место неравенство $\exp(G) \leqslant |G|$.

Свойство

Пусть G — коммутативная группа с конечной экспонентой. Тогда существует элемент $x \in G$, порядок которого равен экспоненте группы.

$\exp(G) = m\,,\ m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}\,,\ x \in G\,,\ |x| = p_1^{k_1} s,\ s \in \mathbb{N}\,.$
$y_1 = x^s,\ |y_1| = \frac{|x|}{(|x|,s)}$

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы. Экспонента этой группы делит порядок группы.
Имеет место неравенство $\exp(G) \leqslant |G|$.

Свойство

Пусть G — коммутативная группа с конечной экспонентой. Тогда существует элемент $x \in G$, порядок которого равен экспоненте группы.

$\exp(G) = m\,,\; m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}\,,\; x \in G\,,\; |x| = p_1^{k_1} s,\; s \in \mathbb{N}\,.$
$y_1 = x^s,\; |y_1| = \frac{|x|}{(|x|, s)} = p_1^{k_1}$

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы. Экспонента этой группы делит порядок группы. Имеет место неравенство $\exp(G) \leqslant |G|$.

Свойство

Пусть G — коммутативная группа с конечной экспонентой. Тогда существует элемент $x \in G$, порядок которого равен экспоненте группы.

$\exp(G) = m\,,\ m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}\,,\ x \in G\,,\ |x| = p_1^{k_1} s,\ s \in \mathbb{N}\,.$
$y_1 = x^s,\ |y_1| = \frac{|x|}{(|x|,s)} = p_1^{k_1},\ y_2,\ \ldots,\ y_r,$

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы. Экспонента этой группы делит порядок группы.
Имеет место неравенство $\exp(G) \leqslant |G|$.

Свойство

Пусть G — коммутативная группа с конечной экспонентой. Тогда существует элемент $x \in G$, порядок которого равен экспоненте группы.

$\exp(G) = m\,,\ m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}\,,\ x \in G\,,\ |x| = p_1^{k_1} s,\ s \in \mathbb{N}\,.$
$y_1 = x^s,\ |y_1| = \frac{|x|}{(|x|,s)} = p_1^{k_1},\ y_2,\ \dots,\ y_r, |y_i| = p_i^{k_i},\ i = 2,\ \dots,\ r$

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы. Экспонента этой группы делит порядок группы. Имеет место неравенство $\exp(G) \leqslant |G|$.

Свойство

Пусть G — коммутативная группа с конечной экспонентой. Тогда существует элемент $x \in G$, порядок которого равен экспоненте группы.

$\exp(G) = m\,,\ m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}\,,\ x \in G\,,\ |x| = p_1^{k_1} s,\ s \in \mathbb{N}\,.$
$y_1 = x^s,\ |y_1| = \frac{|x|}{(|x|,s)} = p_1^{k_1},\ y_2,\ \ldots,\ y_r, |y_i| = p_i^{k_i},\ i = 2,\ \ldots,\ r\,,$
$|y_1 y_2 \ldots y_r|$

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы. Экспонента этой группы делит порядок группы.
Имеет место неравенство $\exp(G) \leqslant |G|$.

Свойство

Пусть G — коммутативная группа с конечной экспонентой. Тогда существует элемент $x \in G$, порядок которого равен экспоненте группы.

$\exp(G) = m\,,\ m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}\,,\ x \in G\,,\ |x| = p_1^{k_1} s,\ s \in \mathbb{N}\,.$
$y_1 = x^s,\ |y_1| = \frac{|x|}{(|x|, s)} = p_1^{k_1},\ y_2, \ldots, y_r, |y_i| = p_i^{k_i},\ i = 2, \ldots, r\,,$
$|y_1 y_2 \ldots y_r| = |y_1||y_2| \ldots |y_r|$

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы.
Экспонента этой группы делит порядок группы.
Имеет место неравенство $\exp(G) \leqslant |G|$.

Свойство

Пусть G — коммутативная группа с конечной экспонентой. Тогда существует элемент $x \in G$, порядок которого равен экспоненте группы.

$\exp(G) = m\,,\ m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}\,,\ x \in G\,,\ |x| = p_1^{k_1} s,\ s \in \mathbb{N}\,.$
$y_1 = x^s,\ |y_1| = \frac{|x|}{(|x|,s)} = p_1^{k_1},\ y_2,\ \dots,\ y_r, |y_i| = p_i^{k_i},\ i = 2,\ \dots,\ r\,,$
$|y_1 y_2 \dots y_r| = |y_1||y_2| \dots |y_r| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы.
Экспонента этой группы делит порядок группы.
Имеет место неравенство $\exp(G) \leqslant |G|$.

Свойство

Пусть G — коммутативная группа с конечной экспонентой. Тогда существует элемент $x \in G$, порядок которого равен экспоненте группы.

$\exp(G) = m\,,\ m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}\,,\ x \in G\,,\ |x| = p_1^{k_1} s,\ s \in \mathbb{N}\,.$
$y_1 = x^s,\ |y_1| = \frac{|x|}{(|x|,s)} = p_1^{k_1},\ y_2,\ \ldots,\ y_r, |y_i| = p_i^{k_i},\ i = 2,\ \ldots,\ r\,,$
$|y_1 y_2 \ldots y_r| = |y_1||y_2| \ldots |y_r| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r} = m$

Свойство

Конечная группа имеет конечную экспоненту, она является наименьшим общим кратным порядков всех элементов группы.
Экспонента этой группы делит порядок группы.
Имеет место неравенство $\exp(G) \leqslant |G|$.

Свойство

Пусть G — коммутативная группа с конечной экспонентой. Тогда существует элемент $x \in G$, порядок которого равен экспоненте группы.

$\exp(G) = m\,,\ m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}\,,\ x \in G\,,\ |x| = p_1^{k_1} s,\ s \in \mathbb{N}\,.$
$y_1 = x^s,\ |y_1| = \frac{|x|}{(|x|,s)} = p_1^{k_1},\ y_2,\ \ldots,\ y_r, |y_i| = p_i^{k_i},\ i = 2,\ \ldots,\ r\,,$
$|y_1 y_2 \ldots y_r| = |y_1||y_2| \ldots |y_r| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r} = m\,.$ □

Свойство

Конечная коммутативная группа G является циклической в том и только том случае, когда $|G| = \exp(G)$.

Свойство

Конечная коммутативная группа G является циклической в том и только том случае, когда $|G| = \exp(G)$.
Эта группа не является циклической в том и только том случае, когда $\exp(G) < |G|$.

Свойство

Конечная коммутативная группа G является циклической в том и только том случае, когда $|G| = \exp(G)$.
Эта группа не является циклической в том и только том случае, когда $\exp(G) < |G|$.

G циклическая

Свойство

Конечная коммутативная группа G является циклической в том и только том случае, когда $|G| = \exp(G)$.
Эта группа не является циклической в том и только том случае, когда $\exp(G) < |G|$.

G циклическая $\Leftrightarrow \exists\ x \in G\ |x| = |G|$

Свойство

Конечная коммутативная группа G является циклической в том и только том случае, когда $|G| = \exp(G)$.
Эта группа не является циклической в том и только том случае, когда $\exp(G) < |G|$.

G циклическая $\Leftrightarrow \exists\ x \in G\ |x| = |G| \Leftrightarrow |G| = \exp(G)$

Свойство

Конечная коммутативная группа G является циклической в том и только том случае, когда $|G| = \exp(G)$.
Эта группа не является циклической в том и только том случае, когда $\exp(G) < |G|$.

G циклическая $\Leftrightarrow \exists\ x \in G\ |x| = |G| \Leftrightarrow |G| = \exp(G)$.

Свойство

Группа $G_1 \times G_2$ имеет конечную экспоненту в том и только том случае, когда каждая из групп G_1, G_2 имеет конечную экспоненту.

Свойство

Конечная коммутативная группа G является циклической в том и только том случае, когда $|G| = \exp(G)$.
Эта группа не является циклической в том и только том случае, когда $\exp(G) < |G|$.

G циклическая $\Leftrightarrow \exists\ x \in G\ |x| = |G| \Leftrightarrow |G| = \exp(G)$.

Свойство

Группа $G_1 \times G_2$ имеет конечную экспоненту в том и только том случае, когда каждая из групп G_1, G_2 имеет конечную экспоненту.
В этом случае экспонента группы $G_1 \times G_2$ является наименьшим общим кратным экспонент групп G_1 и G_2, в частности
$\exp(G_1 \times G_2) \leqslant \exp(G_1) \cdot \exp(G_2)$.

Свойство

Прямое произведение конечных коммутативных групп G_1 и G_2 является циклической группой в том и только том случае, когда эти группы циклические и их порядки взаимно простые.

Свойство

Прямое произведение конечных коммутативных групп G_1 и G_2 является циклической группой в том и только том случае, когда эти группы циклические и их порядки взаимно простые.

$G_1 \times G_2$ циклическая

Свойство

Прямое произведение конечных коммутативных групп G_1 и G_2 является циклической группой в том и только том случае, когда эти группы циклические и их порядки взаимно простые.

$G_1 \times G_2$ циклическая $\Leftrightarrow |G_1 \times G_2| = \exp(G_1 \times G_2)$

Свойство

Прямое произведение конечных коммутативных групп G_1 и G_2 является циклической группой в том и только том случае, когда эти группы циклические и их порядки взаимно простые.

$G_1 \times G_2$ циклическая $\Leftrightarrow |G_1 \times G_2| = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1 \times G_2|$

Свойство

Прямое произведение конечных коммутативных групп G_1 и G_2 является циклической группой в том и только том случае, когда эти группы циклические и их порядки взаимно простые.

$G_1 \times G_2$ циклическая $\Leftrightarrow |G_1 \times G_2| = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$

Свойство

Прямое произведение конечных коммутативных групп G_1 и G_2 является циклической группой в том и только том случае, когда эти группы циклические и их порядки взаимно простые.

$G_1 \times G_2$ циклическая $\Leftrightarrow |G_1 \times G_2| = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2| \geqslant \exp(G_1) \cdot \exp(G_2)$

Свойство

Прямое произведение конечных коммутативных групп G_1 и G_2 является циклической группой в том и только том случае, когда эти группы циклические и их порядки взаимно простые.

$G_1 \times G_2$ циклическая $\Leftrightarrow |G_1 \times G_2| = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2| \geqslant \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \geqslant \exp(G_1 \times G_2)$

Свойство

Прямое произведение конечных коммутативных групп G_1 и G_2 является циклической группой в том и только том случае, когда эти группы циклические и их порядки взаимно простые.

$G_1 \times G_2$ циклическая $\Leftrightarrow |G_1 \times G_2| = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2| \geqslant \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \geqslant \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1| \cdot |G_2| = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2)$

Свойство

Прямое произведение конечных коммутативных групп G_1 и G_2 является циклической группой в том и только том случае, когда эти группы циклические и их порядки взаимно простые.

$G_1 \times G_2$ циклическая $\Leftrightarrow |G_1 \times G_2| = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2| \geqslant \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \geqslant \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1| \cdot |G_2| = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2)$, $\exp(G_1) \cdot \exp(G_2) = \exp(G_1 \times G_2)$

Свойство

Прямое произведение конечных коммутативных групп G_1 и G_2 является циклической группой в том и только том случае, когда эти группы циклические и их порядки взаимно простые.

$G_1 \times G_2$ циклическая $\Leftrightarrow |G_1 \times G_2| = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2| \geqslant \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \geqslant \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1| \cdot |G_2| = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2)$, $\exp(G_1) \cdot \exp(G_2) = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1| \cdot |G_2| = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2)$

Свойство

Прямое произведение конечных коммутативных групп G_1 и G_2 является циклической группой в том и только том случае, когда эти группы циклические и их порядки взаимно простые.

$G_1 \times G_2$ циклическая $\Leftrightarrow |G_1 \times G_2| = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2| \geqslant \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \geqslant \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1| \cdot |G_2| = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2)$, $\exp(G_1) \cdot \exp(G_2) = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1| \cdot |G_2| = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \Leftrightarrow |G_1| = \exp(G_1)$, $|G_2| = \exp(G_2)$

Свойство

Прямое произведение конечных коммутативных групп G_1 и G_2 является циклической группой в том и только том случае, когда эти группы циклические и их порядки взаимно простые.

$G_1 \times G_2$ циклическая $\Leftrightarrow |G_1 \times G_2| = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2| \geqslant \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \geqslant \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1| \cdot |G_2| = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2)$, $\exp(G_1) \cdot \exp(G_2) = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1| \cdot |G_2| = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \Leftrightarrow |G_1| = \exp(G_1), |G_2| = \exp(G_2)$.
$\exp(G_1 \times G_2) = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2)$

Свойство

Прямое произведение конечных коммутативных групп G_1 и G_2 является циклической группой в том и только том случае, когда эти группы циклические и их порядки взаимно простые.

$G_1 \times G_2$ циклическая $\Leftrightarrow |G_1 \times G_2| = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2| \geqslant \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \geqslant \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1| \cdot |G_2| = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2)$, $\exp(G_1) \cdot \exp(G_2) = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1| \cdot |G_2| = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \Leftrightarrow |G_1| = \exp(G_1), |G_2| = \exp(G_2)$.
$\exp(G_1 \times G_2) = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exp(G_1), \exp(G_2)$ взаимно простые

Свойство

Прямое произведение конечных коммутативных групп G_1 и G_2 является циклической группой в том и только том случае, когда эти группы циклические и их порядки взаимно простые.

$G_1 \times G_2$ циклическая $\Leftrightarrow |G_1 \times G_2| = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2| \geqslant \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \geqslant \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1| \cdot |G_2| = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2)$, $\exp(G_1) \cdot \exp(G_2) = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1| \cdot |G_2| = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \Leftrightarrow |G_1| = \exp(G_1), |G_2| = \exp(G_2)$.
$\exp(G_1 \times G_2) = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exp(G_1), \exp(G_2)$ взаимно простые $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |G_1|$ и $|G_2|$ взаимно простые

Свойство

Прямое произведение конечных коммутативных групп G_1 и G_2 является циклической группой в том и только том случае, когда эти группы циклические и их порядки взаимно простые.

$G_1 \times G_2$ циклическая $\Leftrightarrow |G_1 \times G_2| = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2| \geqslant \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \geqslant \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1| \cdot |G_2| = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2)$, $\exp(G_1) \cdot \exp(G_2) = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1| \cdot |G_2| = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \Leftrightarrow |G_1| = \exp(G_1), |G_2| = \exp(G_2)$.
$\exp(G_1 \times G_2) = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exp(G_1), \exp(G_2)$ взаимно простые $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |G_1|$ и $|G_2|$ взаимно простые . $\square$

Свойство

Прямое произведение конечных коммутативных групп G_1 и G_2 является циклической группой в том и только том случае, когда эти группы циклические и их порядки взаимно простые.

$G_1 \times G_2$ циклическая $\Leftrightarrow |G_1 \times G_2| = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2| \geqslant \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \geqslant \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1| \cdot |G_2| = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2)$, $\exp(G_1) \cdot \exp(G_2) = \exp(G_1 \times G_2)$.
$|G_1| \cdot |G_2| = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \Leftrightarrow |G_1| = \exp(G_1)$, $|G_2| = \exp(G_2)$.
$\exp(G_1 \times G_2) = \exp(G_1) \cdot \exp(G_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exp(G_1)$, $\exp(G_2)$ взаимно простые $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |G_1|$ и $|G_2|$ взаимно простые . $\square$

Следствие

Прямое произведение конечных коммутативных групп $G_1, G_2, \ldots, G_k$ является циклической группой тогда и только тогда, когда эти группы циклические и их порядки попарно взаимно простые.

Следствие

Предположим, что $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$

Следствие

Предположим, что $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$,
тогда $\mathbb{U}_n \cong \mathbb{U}_{p_1^{k_1}} \times \mathbb{U}_{p_2^{k_2}} \times \dots \times \mathbb{U}_{p_r^{k_r}}$

Следствие

Предположим, что $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$,
тогда $\mathbb{U}_n \cong \mathbb{U}_{p_1^{k_1}} \times \mathbb{U}_{p_2^{k_2}} \times \dots \times \mathbb{U}_{p_r^{k_r}}$, $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \times \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_r^{k_r}}$.