



Алгебра и теория чисел

многочлены

Алгебра многочленов

Многочлены одной переменной





Литература (учебники)

- *Винберг Э.Б. Алгебра многочленов*
- *Курош А.Г. Курс высшей алгебры.*
- *Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1997.*



Литература (задачники)

- *Сб. задач по алгебре. (Под ред. Кострикина А.И.)*
- *Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре*
- *Солодовников А.С., Родина М.А. Задачник-практикум по алгебре (Ч.4)*

Алгебра многочленов

- Пусть K – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей (поле)
- **def.** Многочленом f называется бесконечный вектор
 - $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$
- где $a_0, a_1, \dots, a_n$ – элементы кольца K

Алгебра многочленов

def. Степенью многочлена называется номер последнего ненулевого элемента.

$$n = \deg f \Leftrightarrow a_n \neq 0, a_k = 0 \text{ при } k > n$$

Элемент a_n называется старшим коэффициентом, а элемент a_0 — свободным членом многочлена f

Алгебра многочленов

def. Нулевым многочленом $\mathbf{0}$ называется бесконечный нулевой вектор. Степень нуль-многочлена не определена.

Условие равенства многочленов

def. Два многочлена одинаковой степени равны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты совпадают

Операция сложения многочленов и ее свойства

def. Сложение многочленов осуществляется по координатно

Свойства:

1. Степень суммы
2. Коммутативность
3. Ассоциативность
4. Наличие нейтрального элемента
5. Наличие противоположного элемента

Следствие: множество многочленов образует абелеву группу относительно сложения

Операция умножения многочленов и ее свойства

def. Умножение многочленов – свертка
последовательностей

$$f = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$$

$$g = (b_0, b_1, \dots, b_k, 0, 0, \dots)$$

$$fg = (c_0, c_1, \dots) \quad c_j = \sum_{i=0}^j a_i b_{j-i}$$

Свойства операции умножения многочленов

1. *Степень произведения*
2. *Дистрибутивность*
3. *Ассоциативность*
4. *Коммутативность*
5. *Наличие нейтрального*

*$K[x]$ – кольцо многочленов с
компонентами из кольца K*

Стандартный вид многочлена

$$\alpha f \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha a_0, \alpha a_1, \dots, \alpha a_n, 0, 0, \dots)$$

$$\alpha = (\alpha, 0, 0, \dots)$$

$$X = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$e = X^0 = (1, 0, 0, \dots)$$

Многочлены – функции

- Пусть $P[x]$ – множество многочленов с коэффициентами из поля $P(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ или кольца Z .
- $P[x] \rightarrow P$: $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \rightarrow$
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
- **Теорема.** Если многочлены $f(X)$ и $g(X)$ различны, то различны (как отображения) и функции $f(x)$ и $g(x)$

Многочлены – функции

- *Операции сложения и умножения многочленов-функций:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

- *Условие равенства многочленов-функций. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают коэффициенты при одинаковых степенях переменной x*

Теория делимости в кольце многочленов $P[x]$

*Отношение
делимости и его
свойства*



Свойства отношения делимости

- 
- 1. Степени
 - 2. Транзитивность
 - 3. Линейная комбинация
 - 4. Делимость на многочлен нулевой степени
 - 5. Делимость с точностью до постоянного множителя
 - 6. Делимость друг на друга

Наибольший общий делитель двух многочленов

□ *def1.* Общим делителем двух многочленов называется многочлен, на который делятся оба эти многочлена.

□ *def2.* Нормированный общий делитель многочленов **наивысшей** степени называется их наибольшим общим делителем

□ *def3.* Многочлены называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1

Леммы теории делимости

- *Лемма 1.* Для любых двух многочленов из $P[x]$ разрешим алгоритм евклидова деления.
- *Лемма 2.* Если многочлен f при делении на многочлен g дает остаток r , то $\text{НОД}(f, g) = \text{НОД}(g, r)$

Алгоритм Евклида

1	$f = gq_0 + r_1$	$\text{degr}_1 < \text{deg } g$	$\text{НОД}(f, g) = \text{НОД}(g, r_1)$
2	$g = r_1q_1 + r_2$	$\text{degr}_2 < \text{degr}_1$	$\text{НОД}(g, r_1) = \text{НОД}(r_1, r_2)$
3	$r_1 = r_2q_2 + r_3$	$\text{degr}_3 < \text{degr}_2$	$\text{НОД}(r_1, r_2) = \text{НОД}(r_2, r_3)$
n	$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n$	$\text{degr}_n < \text{degr}_{n-1}$	$\text{НОД}(r_{n-2}, r_{n-1}) = \text{НОД}(r_{n-1}, r_n)$
n+1	$r_{n-1} = r_nq_n$		$\text{НОД}(r_{n-1}, r_n) = r_n / \text{const}$

Алгоритм Евклида



- $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5x - 2;$

- $g(x) = 3x^2 - 2x - 1$

- $\text{НОД}(f, g) = x - 1$

Свойства НОД многочленов

- 1. Делимость на ОД
- 2. Единственность
- 3. Линейное выражение
- $f(x) = x^2 + 2; \quad g(x) = x^3 + x + 1$
- 4. Критерий взаимной простоты
- 5. Если $\text{НОД}(f, g) = uf + vg$, то
- $\deg u < \deg f$ и $\deg v < \deg g$

*Нахождение линейного выражения НОД
методом неопределенных коэффициентов*

□ $f(x) = x^2 + 2; \quad g(x) = x^3 + x + 1$

Корни многочлена

□ Пусть $f \in \mathbb{P}[x]$, $\mathbb{P}$ – поле

□ *def.* Число $\alpha \in \mathbb{P}$ называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(\alpha) = 0$.

□ $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $\alpha = 1$

□ *Теорема Безу.* Остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x - \alpha$ равен значению многочлена $f(x)$ при $x = \alpha$

Корни многочлена

Следствие. Для того, чтобы число $\alpha \in P$ было корнем многочлена $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы многочлен $f(x)$ делился бы на двучлен

$x - \alpha$

Схема Горнера

Кратные корни

$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

Кратные корни многочлена

- Пусть $f \in P[x]$, P – поле
- **def.** Число $\alpha \in P$ называется корнем кратности k многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x - \alpha)^k$, но не делится на $(x - \alpha)^{k+1}$.
- $f(x) = x^2 - 3x + 2, \alpha = 1$
- $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2, \alpha = 1$

Производная многочлена

Пусть $f \in P[x]$,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

def. Производной многочлена $f(x)$

называется многочлен следующего вида:

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

Производная многочлена

- **Теорема 1.** Если $\alpha \in P$ является корнем многочлена $f(x)$ кратности k , то α является корнем его производной кратности $k - 1$.
- **Теорема 3 (критерий отсутствия кратных корней).** Для того, чтобы многочлен не имел кратных корней, необходимо и достаточно, чтобы он был взаимно прост со своей производной.
- **Ех.** $f(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 - 14x^2 - 20x - 8$



Отделить кратные корни многочлена и разложить многочлен на множители

Вариант 1	$f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$
Вариант 2	$f(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$
Вариант 3	$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
Вариант 4	$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

Многочлены над числовыми полями

Поле комплексных чисел



Основная теорема алгебры

- **Теорема.** Любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень.
- **Следствие.** Многочлен n -й степени с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней (с учетом их кратности)

Основная теорема алгебры

- *def.* Многочлен $f(x) \in P[x]$ называется приводимым над полем P , если его можно разложить в произведение многочленов меньшей степени с коэффициентами из поля P .
- *def.* Поле P называется алгебраически замкнутым, если любой многочлен степени выше 1 является приводимым.
- *Основная теорема алгебры.* Поле комплексных чисел алгебраически замкнуто

*Разложение многочлена в кольце $C[x]$
на неприводимые множители*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \\ &= a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \end{aligned}$$

Формулы Виета

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \\ &= a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \end{aligned}$$

Формулы Виета

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Многочлены над числовыми полями

Поле действительных чисел



Теорема о комплексных корнях многочлена с действительными коэффициентами

Теорема 1. Если число α – комплексный корень многочлена с действительными коэффициентами, то и число, ему комплексно сопряженное, также является корнем этого многочлена

Следствие. Многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень

Теорема о многочленах, неприводимых над полем действительных чисел

- *Теорема 2.* Над полем действительных чисел неприводимыми являются
- только
- многочлены первой степени и квадратные трехчлены с отрицательными дискриминантами



Разложение многочлена в кольце $\mathbb{R}[x]$ на неприводимые множители

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 =$$

$$= a_n \prod_{j=1}^k (x^2 - 2\alpha_j x + \alpha_j^2 + \beta_j^2) \prod_{j=2k+1}^n (x - x_j)$$

Многочлены над числовыми полями

Поле рациональных чисел



Теоремы о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами

- *Теорема 1.* Если число $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$ – рациональный корень многочлена с целыми коэффициентами, то q – делитель старшего коэффициента, а p – делитель свободного члена этого многочлена

Теоремы о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами

- *Теорема 2.* Нормированный многочлен с целыми коэффициентами не имеет дробных корней, а все его целые корни являются делителями свободного члена

Теоремы о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами

Теорема 3. Если число $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$ – рациональный корень многочлена с целыми коэффициентами и c – некоторое целое число, то $f(c)$ делится нацело на $(p - cq)$

Многочлены над числовыми полями

Многочлены в кольце целых чисел



Многочлены в кольце целых чисел

- *def.* Многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ называется **примитивным**, если все его коэффициенты взаимно просты.
- *Лемма Гаусса.* Произведение примитивных многочленов — примитивный многочлен.

Многочлены в кольце целых чисел

- *Лемма 2 о представлении многочлена с целыми коэффициентами. Любой многочлен с целыми коэффициентами может быть представлен в виде произведения примитивного многочлена и константы*



Многочлены в кольце целых чисел

Теорема 1 о представлении многочлена с рациональными коэффициентами.

Любой многочлен с рациональными коэффициентами может быть единственным образом представлен в виде произведения несократимой дроби и примитивного многочлена

Многочлены в кольце целых чисел

Теорема 2 о приводимости (неприводимости) многочленов над кольцом целых чисел и полем рациональных чисел. Если многочлен с целыми коэффициентами неприводим над кольцом целых чисел, то он неприводим и над полем рациональных чисел.

Если же многочлен с целыми коэффициентами приводим над полем рациональных чисел, то он приводим и над кольцом целых чисел.

Многочлены в кольце целых чисел

Критерий Эйзенштейна. Если $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами и существует такое простое число p , что:

- Старший коэффициент не делится на p ;
- Все остальные коэффициенты делятся на p ;
- Свободный член делится на p , но не делится на p^2 ,

ТО

$f(x)$ неприводим над полем рациональных чисел

Неприводимые многочлены

Поле	Неприводимые многочлены
$\mathbb{C}$	Многочлены первой степени: $ax+b$
$\mathbb{R}$	Многочлены первой степени $ax+b$ и квадратные трехчлены ax^2+bx+c с отрицательным дискриминантом
$\mathbb{Q}(Z)$	Существуют неприводимые многочлены произвольной степени