Протоколы многосторонних вычислений, часть 2

Косолапов Ю.В.

ЮФУ

8 апреля 2020 г.

Содержание

Формулировка задачи

- Пусть $\mathcal{P} = \{1, ..., n\}$ — множество участников.

Формулировка задачи

- Пусть $\mathcal{P} = \{1, ..., n\}$ — множество участников.
- $\mathcal{S} = \mathbb{F}_q$ — множество возможных значений секретов.

Формулировка задачи

- Пусть $\mathcal{P} = \{1, ..., n\}$ — множество участников.
- $\mathcal{S} = \mathbb{F}_q$ — множество возможных значений секретов.
- Каждый участник i из $\mathcal{P}$ обладает некоторым секретом $s_i \in \mathcal{S}$.

Формулировка задачи

- Пусть $\mathcal{P} = \{1, ..., n\}$ — множество участников.
- $\mathcal{S} = \mathbb{F}_q$ — множество возможных значений секретов.
- Каждый участник i из $\mathcal{P}$ обладает некоторым секретом $s_i \in \mathcal{S}$.
- Требуется защищенным образом вычислить функцию $f(x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_n)$, $y_i \in \mathbb{F}_q$.

Формулировка задачи

- Пусть $\mathcal{P} = \{1, ..., n\}$ — множество участников.
- $\mathcal{S} = \mathbb{F}_q$ — множество возможных значений секретов.
- Каждый участник i из $\mathcal{P}$ обладает некоторым секретом $s_i \in \mathcal{S}$.
- Требуется защищенным образом вычислить функцию $f(x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_n)$, $y_i \in \mathbb{F}_q$.
- Функция не $f(x_1, ..., x_n)$ не является секретной.

Формулировка задачи

Формулировка задачи

Будем предполагать, что $f(x_1, ..., x_n)$ реализуется *арифметической схемой*, которая представляет собой направленный граф без циклов.

Формулировка задачи

Будем предполагать, что $f(x_1, ..., x_n)$ реализуется *арифметической схемой*, которая представляет собой направленный граф без циклов.

1. В таком графе каждая вершина (шлюз) имеет не более двух входящих ребер (соединительных линий).

Формулировка задачи

Будем предполагать, что $f(x_1, ..., x_n)$ реализуется *арифметической схемой*, которая представляет собой направленный граф без циклов.

1. В таком графе каждая вершина (шлюз) имеет не более двух входящих ребер (соединительных линий).
2. Среди вершин имеется n *входных* вершин без входящих ребер и с одним исходящим ребром. Входные вершины помечаются номерами участников.

Формулировка задачи

Будем предполагать, что $f(x_1, ..., x_n)$ реализуется *арифметической схемой*, которая представляет собой направленный граф без циклов.

1. В таком графе каждая вершина (шлюз) имеет не более двух входящих ребер (соединительных линий).
2. Среди вершин имеется n *входных* вершин без входящих ребер и с одним исходящим ребром. Входные вершины помечаются номерами участников.
3. Каждому участнику также соответствует одна *выходная* вершина.

Формулировка задачи

Формулировка задачи

4 Кроме входных и выходных вершин имеются вершины, которые соответствуют операциям сложения и умножения (эти шлюзы имеют соответственно метки «+» и «·»). Такие вершины имеют по два входящих ребра и по несколько исходящих ребер.

Формулировка задачи

4. Кроме входных и выходных вершин имеются вершины, которые соответствуют операциям сложения и умножения (эти шлюзы имеют соответственно метки «+» и «·»). Такие вершины имеют по два входящих ребра и по несколько исходящих ребер.
5. В графе также могут быть шлюзы, в которых выполняется умножение входного значения на некоторую константу α; такие вершины имеют метку $\alpha\cdot$, содержат одно входящее ребро и несколько исходящих.

Формулировка задачи

Вычисление на арифметической схеме выполняется следующим образом:

Формулировка задачи

Вычисление на арифметической схеме выполняется следующим образом:

- для каждого $i \in [n]$ ребро, исходящее из входной вершин с меткой i, помечается значением секрета участника i;

Формулировка задачи

Вычисление на арифметической схеме выполняется следующим образом:

- для каждого $i \in [n]$ ребро, исходящее из входной вершин с меткой i, помечается значением секрета участника i;
- остальным ребрам присваиваются метки в соответствии с порядком вычисления арифметических выражений.

Пример арифметической схемы

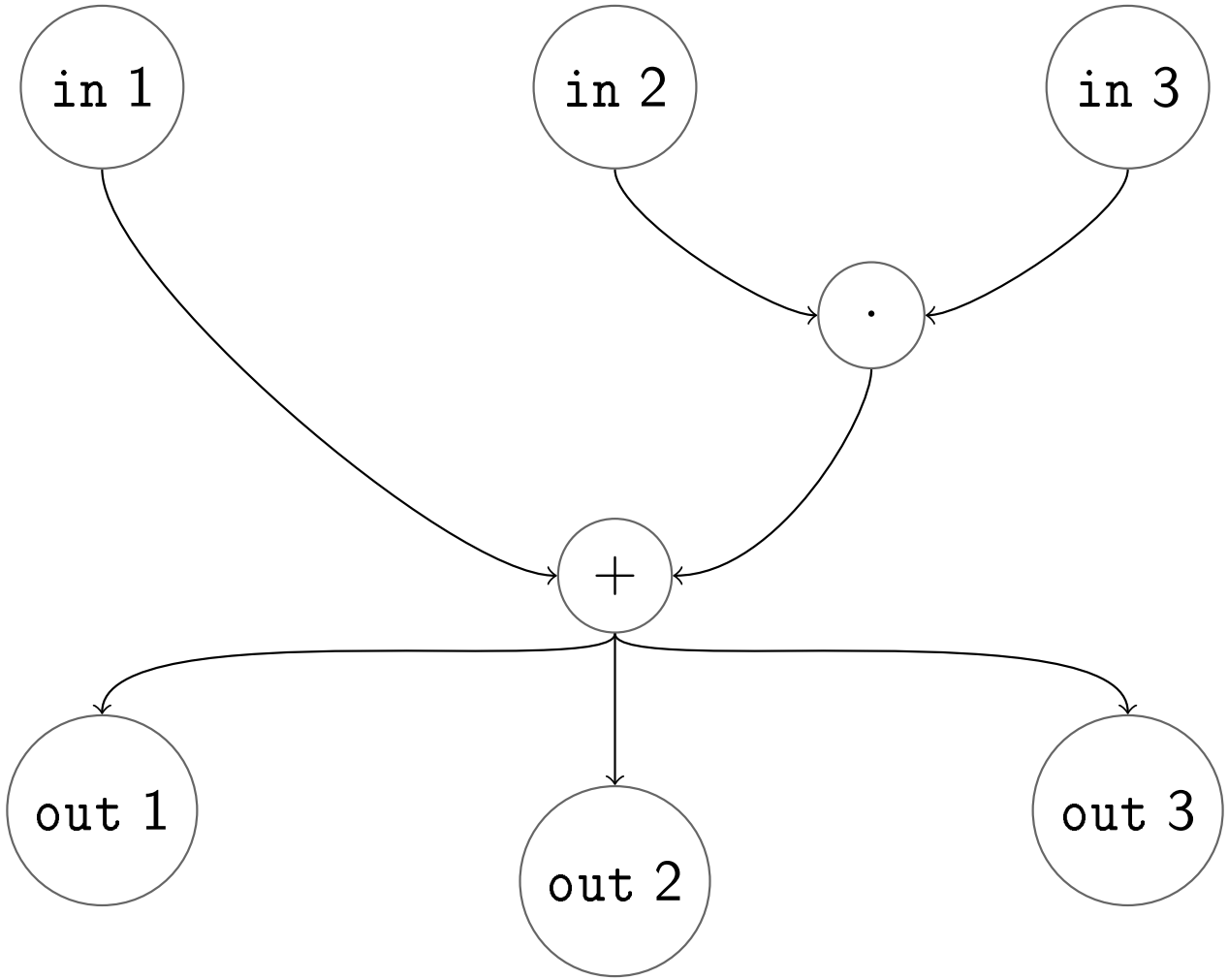


Рис.: Арифметическая схема, соответствующая отображению $f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$, $y_i = x_1 + x_2 \cdot x_3$ для $i = 1, 2, 3$.

Пример арифметической схемы

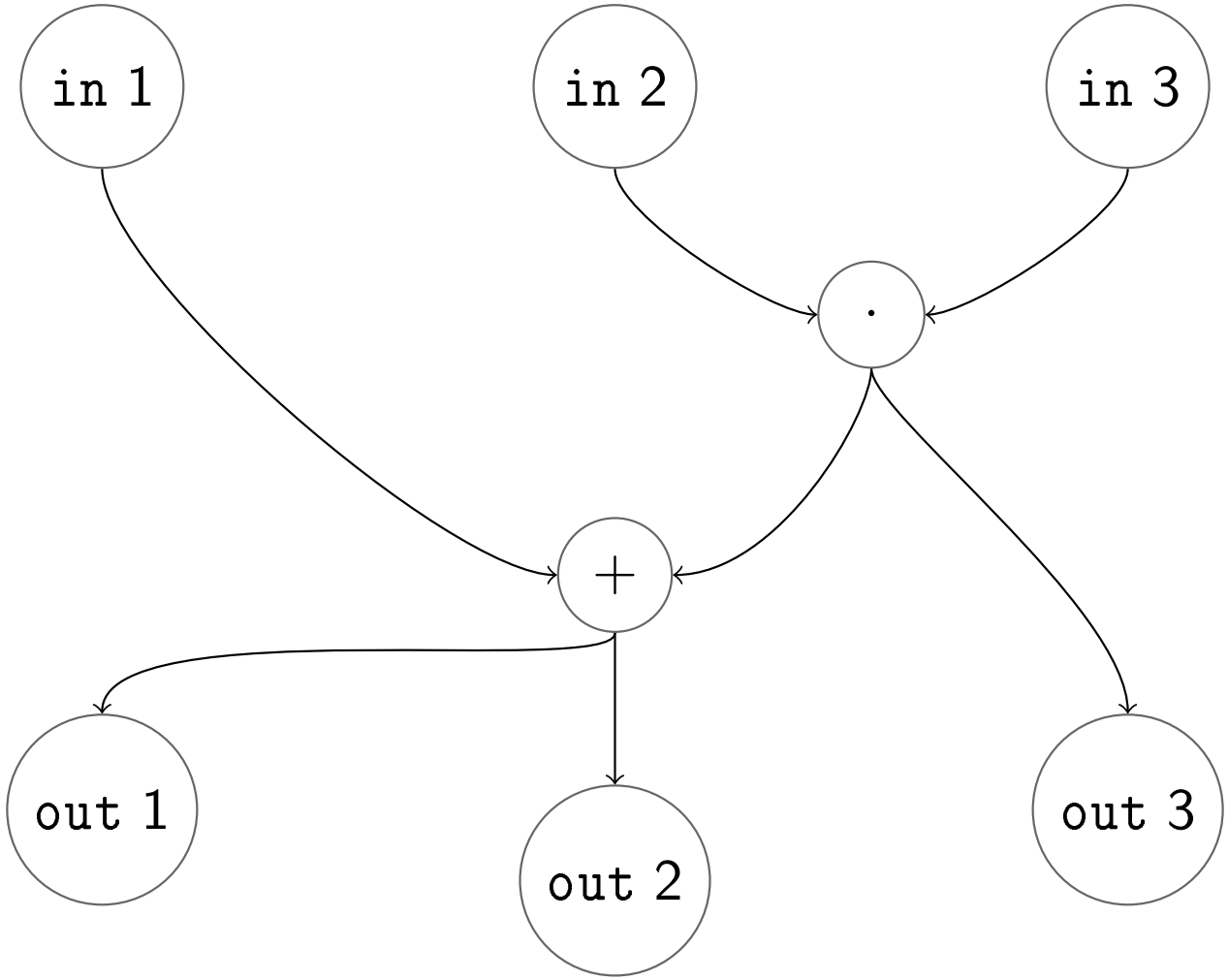


Рис.: Арифметическая схема, соответствующая отображению $f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$, $y_1 = y_2 = x_1 + x_2 \cdot x_3$, $y_3 = x_2 \cdot x_3$.

Обозначения

Обозначения

- Пусть SS — $(n, t+1)$-схема Шамира над полем $\mathbb{F}_q$, $n/2 > t$;

Обозначения

- Пусть SS — $(n, t+1)$-схема Шамира над полем $\mathbb{F}_q$, $n/2 > t$;
- Через $[a, f_a]_t$ обозначим набор долей, вычисленных по секрету $a \in \mathbb{F}_q$ с помощью полинома $f_a(x)$ степени не выше t:

$$[a; f_a]_t = (f_a(1), ..., f_a(n)),\ f_a(0) = a, \deg(f_a(x)) \leqslant t.$$

Обозначения

- Пусть SS — $(n, t+1)$-схема Шамира над полем $\mathbb{F}_q$, $n/2 > t$;
- Через $[a, f_a]_t$ обозначим набор долей, вычисленных по секрету $a \in \mathbb{F}_q$ с помощью полинома $f_a(x)$ степени не выше t:

$$[a; f_a]_t = (f_a(1), ..., f_a(n)),\ \ f_a(0) = a, \deg(f_a(x)) \leqslant t.$$

- Введем обозначения:

$$[a; f_a]_t + [b; f_b]_t = (f_a(1) + f_b(1), ..., f_a(n) + f_b(n)) = [a + b, f_a + f_b]_t,$$

$$\alpha[a; f_a]_t = (\alpha f_a(1), ..., \alpha f_a(n)) = [\alpha a, \alpha f_a]_t,$$

$$[a; f_a]_t \star [b; f_b]_t = (f_a(1) \cdot f_b(1), ..., f_a(n) \cdot f_b(n)) = [a \cdot b, f_a \cdot f_b]_{2t}.$$

Обозначения

Обозначения

- Вычисление отображения f производится с помощью арифметической схемы.

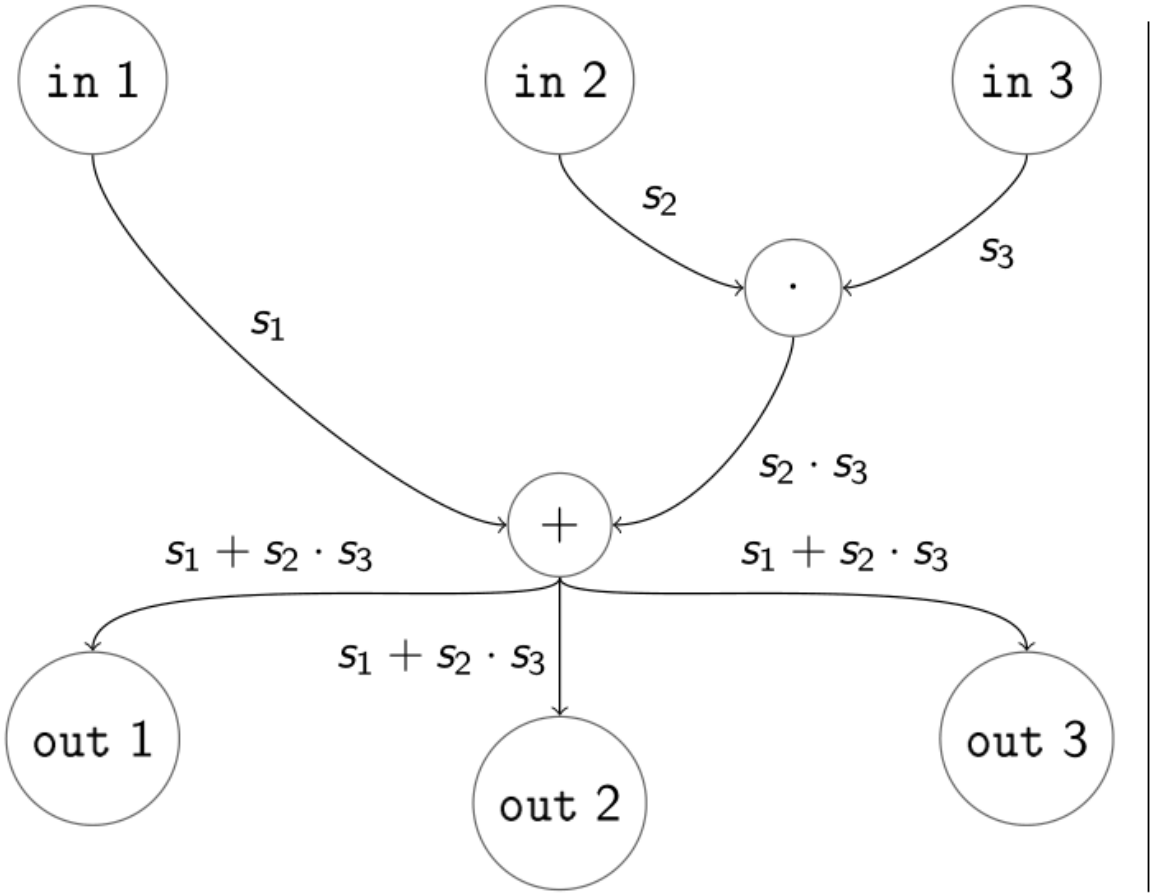
Обозначения

- Вычисление отображения f производится с помощью арифметической схемы.
- В арифметической схеме, представленной графом, каждому ребру присваивается вычисленное значение.

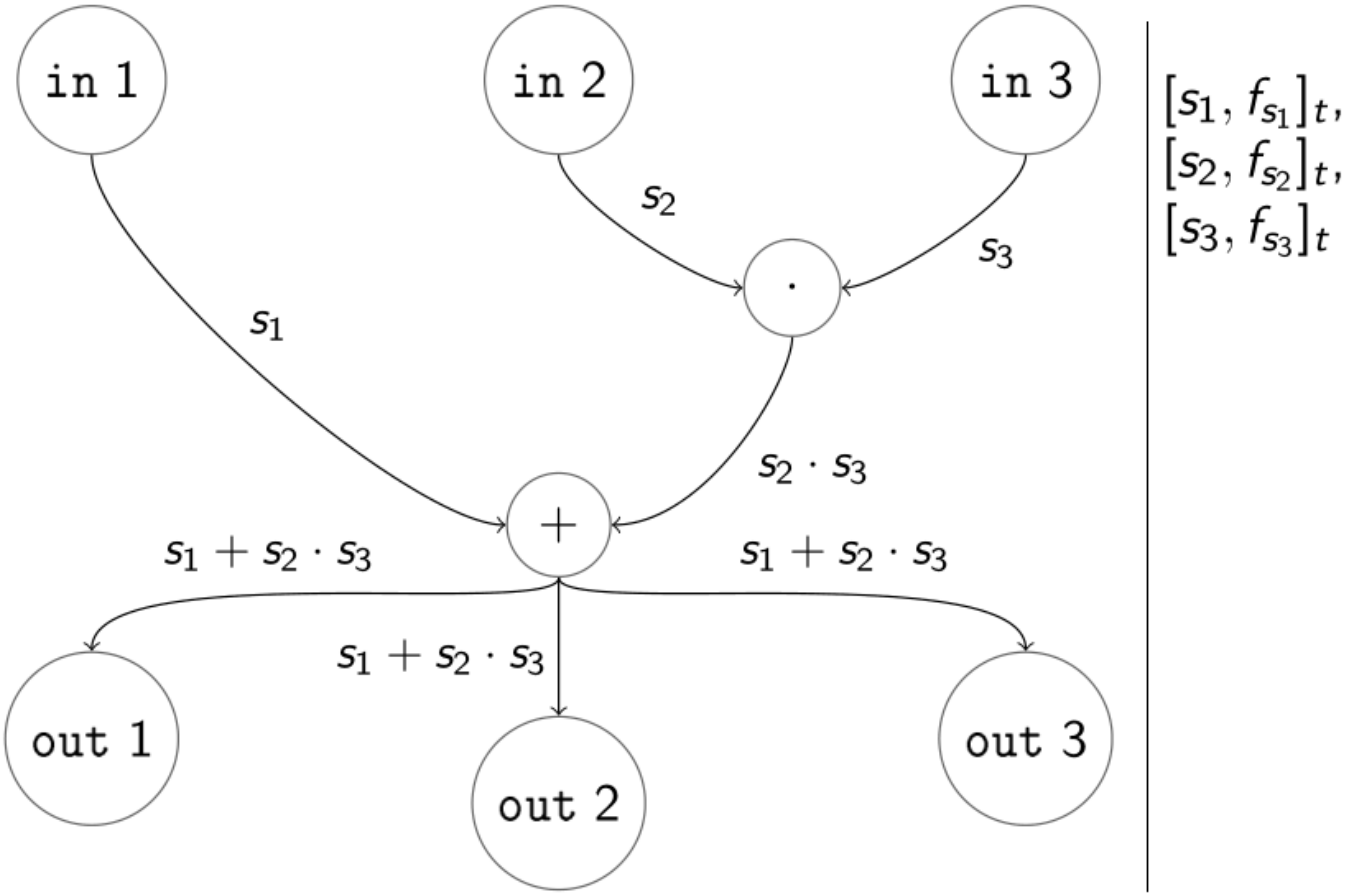
Обозначения

- Вычисление отображения f производится с помощью арифметической схемы.
- В арифметической схеме, представленной графом, каждому ребру присваивается вычисленное значение.
- В рамках протокола, если a – присвоенное некоторому ребру значение, то считается, что все участники владеют набором $[a, f_a]_t$, где $f_a(0) = a$.

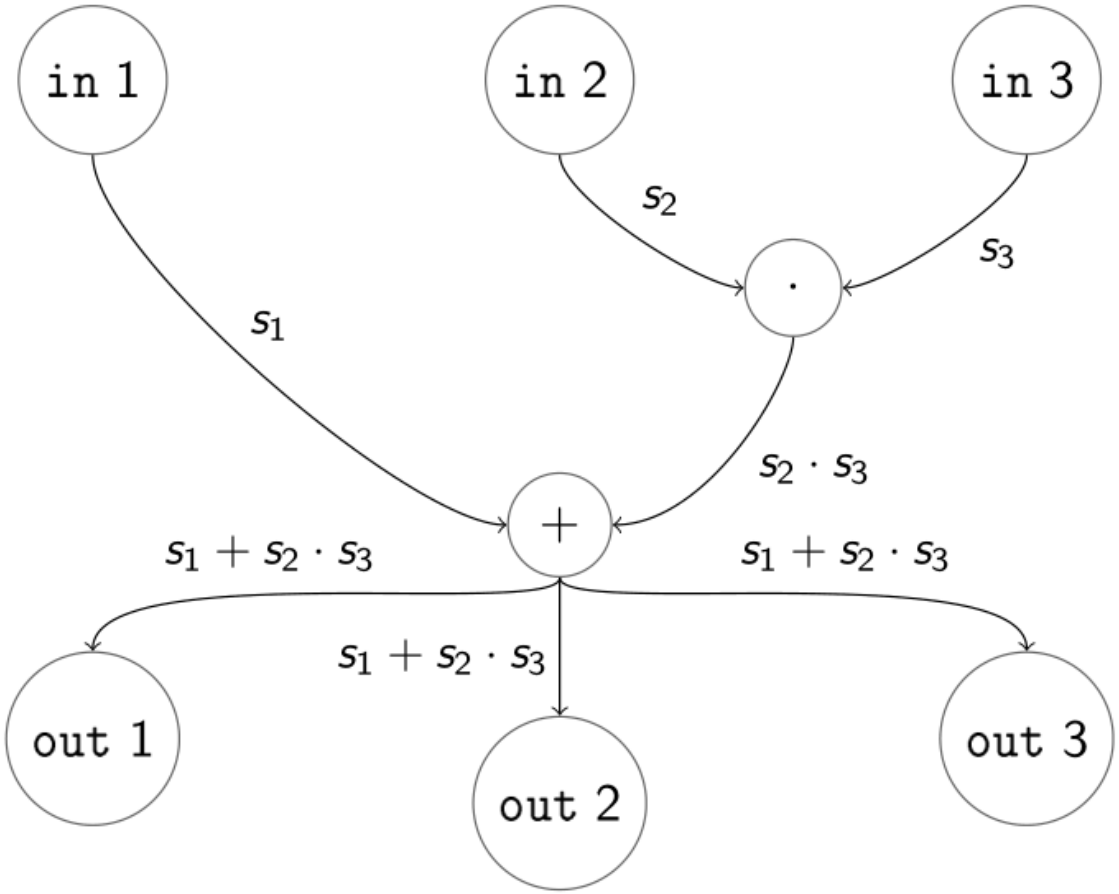
Пример арифметической схемы с метками



После инициализации



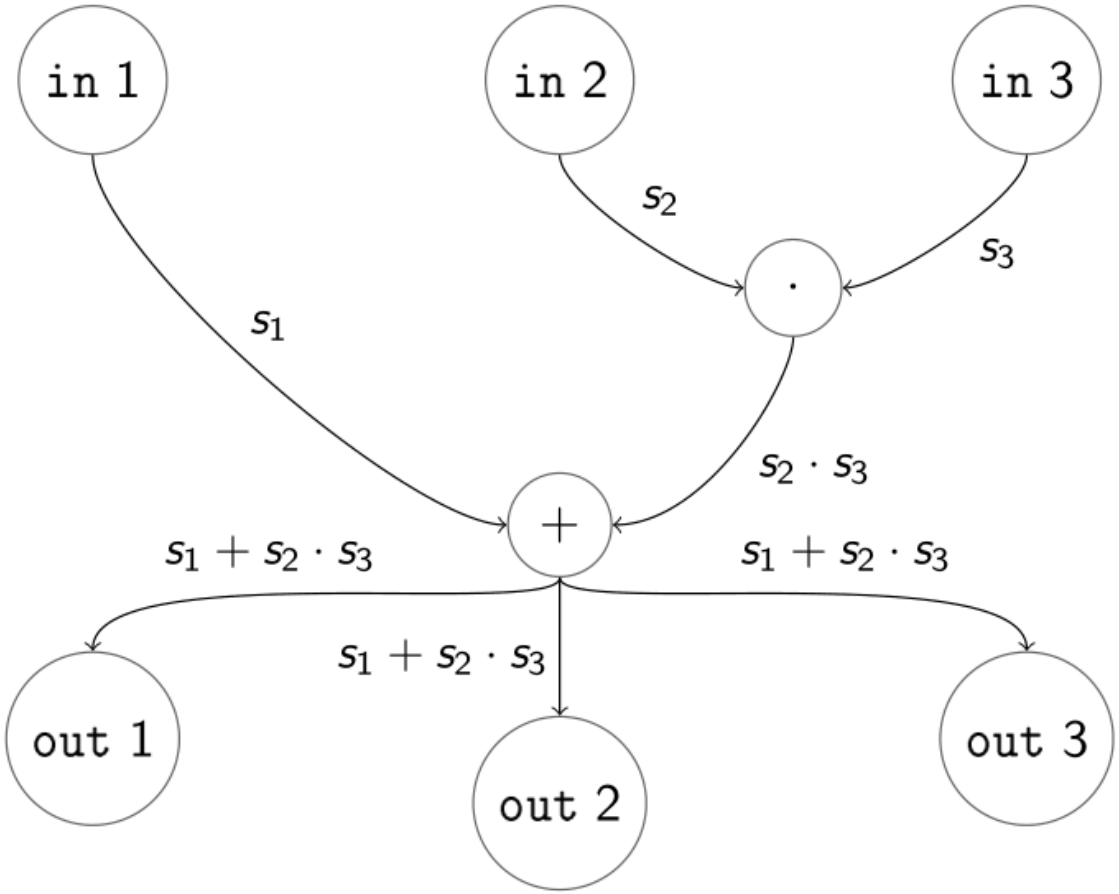
После умножения



$[s_1, f_{s_1}]_t,$
$[s_2, f_{s_2}]_t,$
$[s_3, f_{s_3}]_t$

$[s_1, f_{s_1}]_t,$
$[s_2, f_{s_2}]_t,$
$[s_3, f_{s_3}]_t$
$[s_2 \cdot s_3, f_{s_2 \cdot s_3}]_t$

После суммирования (в фазе завершения протокола)



$[s_1, f_{s_1}]_t,$
$[s_2, f_{s_2}]_t,$
$[s_3, f_{s_3}]_t$

$[s_1, f_{s_1}]_t,$
$[s_2, f_{s_2}]_t,$
$[s_3, f_{s_3}]_t$
$[s_2 \cdot s_3, f_{s_2 \cdot s_3}]_t$

$[s_1, f_{s_1}]_t,$
$[s_2, f_{s_2}]_t,$
$[s_3, f_{s_3}]_t$
$[s_2 \cdot s_3, f_{s_2 \cdot s_3}]_t$
$[s_1 + s_2 \cdot s_3, f_{s_1 + s_1 \cdot s_2}]_t$

Инициализация протокола

Инициализация протокола

- Участник $i(\in \{1, ..., n\})$ вычисляет $[s_i; f_{s_i}]_t$ и передает по защищенным каналам доли своего секрета остальным участникам, а i-ую долю оставляет себе и никому не передает;

Инициализация протокола

- Участник $i(\in \{1, ..., n\})$ вычисляет $[s_i; f_{s_i}]_t$ и передает по защищенным каналам доли своего секрета остальным участникам, а i-ую долю оставляет себе и никому не передает;
- После этого участник i кроме долей своего секрета s_i знает i-ую долю секретов других участников:

$$f_{s_1}(i), f_{s_2}(i), ..., \underline{f_{s_i}(i)}, ..., f_{s_n}(i).$$

Инициализация протокола

- Участник $i(\in \{1, ..., n\})$ вычисляет $[s_i; f_{s_i}]_t$ и передает по защищенным каналам доли своего секрета остальным участникам, а i-ую долю оставляет себе и никому не передает;
- После этого участник i кроме долей своего секрета s_i знает i-ую долю секретов других участников:

$$f_{s_1}(i), f_{s_2}(i), ..., \underline{f_{s_i}(i)}, ..., f_{s_n}(i).$$

- Таким образом, после инициализации все участники **владеют** наборами $[s_1, f_{s_1}]_t$, ... ,$[s_n, f_{s_n}]_t$

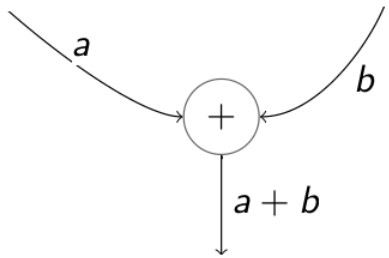
Суммирование

Суммирование

- Если входящие в вершину с меткой «+» ребра имеют метки a и b, то это означает, что *все* участники владеют наборами $[a; f_a]_t$ и $[b; f_b]_t$.

Суммирование

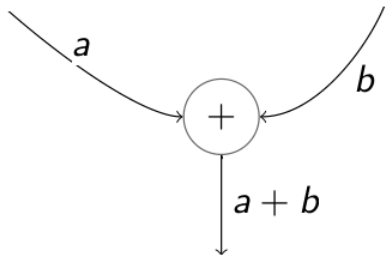
- Если входящие в вершину с меткой «+» ребра имеют метки a и b, то это означает, что *все* участники владеют наборами $[a; f_a]_t$ и $[b; f_b]_t$.



$[a; f_a]_t$
$[b; f_b]_t$

Суммирование

- Если входящие в вершину с меткой «+» ребра имеют метки a и b, то это означает, что *все* участники владеют наборами $[a; f_a]_t$ и $[b; f_b]_t$.

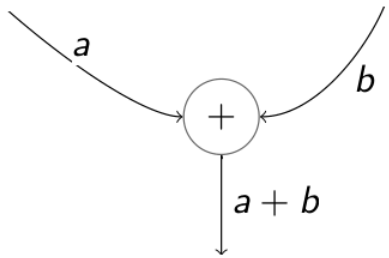


$[a; f_a]_t$
$[b; f_b]_t$

- Участник с номером $i (\in [n])$ вычисляет $f_a(i) + f_b(i))$.

Суммирование

- Если входящие в вершину с меткой «+» ребра имеют метки a и b, то это означает, что *все* участники владеют наборами $[a; f_a]_t$ и $[b; f_b]_t$.

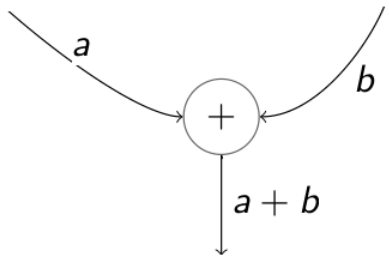


$[a; f_a]_t$
$[b; f_b]_t$

- Участник с номером $i (\in [n])$ вычисляет $f_a(i) + f_b(i))$.
- Таким образом, участники вычисляют $[a; f_a]_t + [b; f_b]_t = [a + b; f_{a+b}]_t$, $f_{a+b} = f_a + f_b$

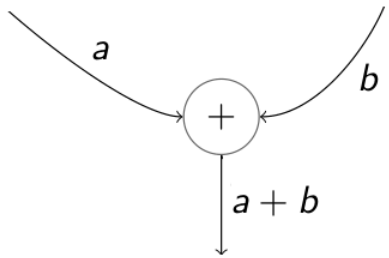
Суммирование

- Если входящие в вершину с меткой «+» ребра имеют метки a и b, то это означает, что *все* участники владеют наборами $[a; f_a]_t$ и $[b; f_b]_t$.



$[a; f_a]_t$
$[b; f_b]_t$

- Участник с номером $i (\in [n])$ вычисляет $f_a(i) + f_b(i))$.
- Таким образом, участники вычисляют $[a; f_a]_t + [b; f_b]_t = [a + b; f_{a+b}]_t$, $f_{a+b} = f_a + f_b$



$[a; f_a]_t$
$[b; f_b]_t$

$[a; f_a]_t$
$[b; f_b]_t$
$[a + b; f_{a+b}]_t$

Умножение на скаляр

Умножение на скаляр

- Если входящее в вершину с меткой «$\alpha\cdot$» ребро имеет метку a, то это означает, что *все* участники владеют набором $[a; f_a]_t$.

Умножение на скаляр

- Если входящее в вершину с меткой «$\alpha\cdot$» ребро имеет метку a, то это означает, что *все* участники владеют набором $[a; f_a]_t$.

Умножение на скаляр

- Если входящее в вершину с меткой «$\alpha\cdot$» ребро имеет метку a, то это означает, что *все* участники владеют набором $[a; f_a]_t$.

- Участник с номером $i(\in [n])$ вычисляет $\alpha f_a(i))$.

Умножение на скаляр

- Если входящее в вершину с меткой «$\alpha\cdot$» ребро имеет метку a, то это означает, что *все* участники владеют набором $[a; f_a]_t$.

- Участник с номером $i(\in [n])$ вычисляет $\alpha f_a(i))$.
- Таким образом, участники вычисляют $\alpha[a; f_a]_t = [\alpha \cdot a; f_{\alpha\cdot a}]_t$, $f_{\alpha\cdot a} = \alpha \cdot f_a$.

Умножение на скаляр

- Если входящее в вершину с меткой «$\alpha\cdot$» ребро имеет метку a, то это означает, что *все* участники владеют набором $[a; f_a]_t$.

- Участник с номером $i(\in [n])$ вычисляет $\alpha f_a(i))$.
- Таким образом, участники вычисляют $\alpha[a; f_a]_t = [\alpha \cdot a; f_{\alpha\cdot a}]_t$, $f_{\alpha\cdot a} = \alpha \cdot f_a$.

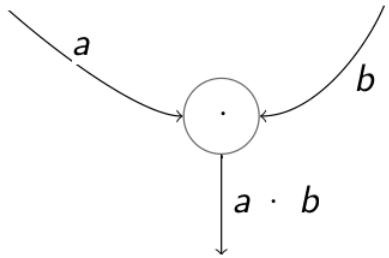
Умножение

Умножение

- Если входящие в вершину с меткой «$\cdot$» ребра имеют метки a и b, то это означает, что *все* участники владеют наборами $[a; f_a]_t$ и $[b; f_b]_t$.

Умножение

- Если входящие в вершину с меткой «$\cdot$» ребра имеют метки a и b, то это означает, что *все* участники владеют наборами $[a; f_a]_t$ и $[b; f_b]_t$.

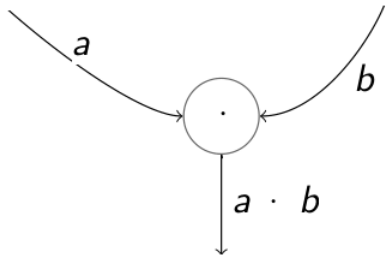


$[a; f_a]_t$
$[b; f_b]_t$

- Участник с номером $i (\in [n])$ вычисляет $f_a(i) \cdot f_b(i))$.

Умножение

- Если входящие в вершину с меткой «$\cdot$» ребра имеют метки a и b, то это означает, что *все* участники владеют наборами $[a; f_a]_t$ и $[b; f_b]_t$.

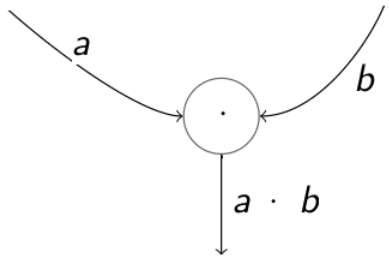


$[a; f_a]_t$
$[b; f_b]_t$

- Участник с номером $i (\in [n])$ вычисляет $f_a(i) \cdot f_b(i))$.
- Таким образом, участники вычисляют $[a; f_a]_t \star [b; f_b]_t = [a \cdot b; \hat{f}_{a \cdot b}]_{2t}$, $\hat{f}_{a \cdot b} = f_a \cdot f_b$

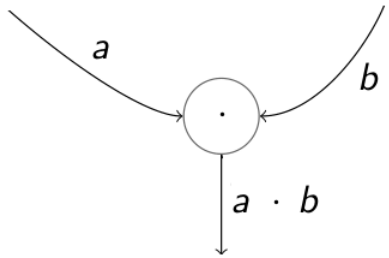
Умножение

- Если входящие в вершину с меткой «$\cdot$» ребра имеют метки a и b, то это означает, что *все* участники владеют наборами $[a; f_a]_t$ и $[b; f_b]_t$.



$[a; f_a]_t$
$[b; f_b]_t$

- Участник с номером $i (\in [n])$ вычисляет $f_a(i) \cdot f_b(i))$.
- Таким образом, участники вычисляют $[a; f_a]_t \star [b; f_b]_t = [a \cdot b; \hat{f}_{a \cdot b}]_{2t}$, $\hat{f}_{a \cdot b} = f_a \cdot f_b$

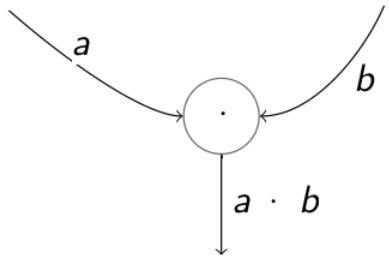


$[a; f_a]_t$
$[b; f_b]_t$

$[a; f_a]_t$
$[b; f_b]_t$
$[a \cdot b; \hat{f}_{a \cdot b}]_{2t}$

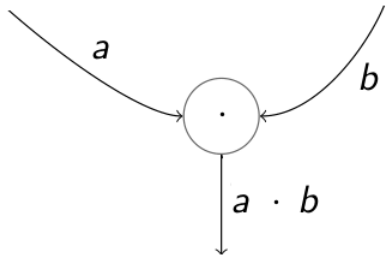
Умножение

- Если входящие в вершину с меткой «$\cdot$» ребра имеют метки a и b, то это означает, что *все* участники владеют наборами $[a; f_a]_t$ и $[b; f_b]_t$.



$[a; f_a]_t$
$[b; f_b]_t$

- Участник с номером $i (\in [n])$ вычисляет $f_a(i) \cdot f_b(i))$.
- Таким образом, участники вычисляют $[a; f_a]_t \star [b; f_b]_t = [a \cdot b; \hat{f}_{a \cdot b}]_{2t}$, $\hat{f}_{a \cdot b} = f_a \cdot f_b$



$[a; f_a]_t$
$[b; f_b]_t$

$[a; f_a]_t$
$[b; f_b]_t$
$[a \cdot b; \hat{f}_{a \cdot b}]_{2t}$

Проблема: полином степени не выше $2t$, а нужен не выше t.

Умножение. Понижение спение полинома

Умножение. Понижение спение полинома

- Пусть $h(x) = f_a(x) \cdot f_b(x)$. Тогда $h(0) = f_a(0) \cdot f_b(0) = ab$ и все участники владеют набором $[a \cdot b; h]_{2t}$.

Умножение. Понижение спение полинома

- Пусть $h(x) = f_a(x) \cdot f_b(x)$. Тогда $h(0) = f_a(0) \cdot f_b(0) = ab$ и все участники владеют набором $[a \cdot b; h]_{2t}$.
- Таким образом, участник с номером i владеет значением $h(i)$, $i \in [n]$.

Умножение. Понижение спение полинома

- Пусть $h(x) = f_a(x) \cdot f_b(x)$. Тогда $h(0) = f_a(0) \cdot f_b(0) = ab$ и все участники владеют набором $[a \cdot b; h]_{2t}$.
- Таким образом, участник с номером i владеет значением $h(i)$, $i \in [n]$.
- Каждый участник $i(\in [n])$, используя $(n, t+1)$-схему Шамира, распределяет набор $[h(i), f_i]_t$ (полином $f_i(z)$ выбирается i-ым участником случайно так, чтобы $f_i(0) = h(i)$).

Умножение. Понижение спение полинома

- Пусть $h(x) = f_a(x) \cdot f_b(x)$. Тогда $h(0) = f_a(0) \cdot f_b(0) = ab$ и все участники владеют набором $[a \cdot b; h]_{2t}$.
- Таким образом, участник с номером i владеет значением $h(i)$, $i \in [n]$.
- Каждый участник $i(\in [n])$, используя $(n, t+1)$-схему Шамира, распределяет набор $[h(i), f_i]_t$ (полином $f_i(z)$ выбирается i-ым участником случайно так, чтобы $f_i(0) = h(i)$).
- Пусть $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_n)$ – вектор рекомбинации для коалиции $\mathcal{P} = [n]$. Тогда равенство

$$h(0) = \sum_{i=1}^{n} h(i) r_i$$

выполняется для любого полинома степени не выше $n-1$. А по условию $t < n/2$, поэтому $\deg(h(z)) \leq n-1$.

Умножение. Понижение спение полинома

- Пусть $h(x) = f_a(x) \cdot f_b(x)$. Тогда $h(0) = f_a(0) \cdot f_b(0) = ab$ и все участники владеют набором $[a \cdot b; h]_{2t}$.
- Таким образом, участник с номером i владеет значением $h(i)$, $i \in [n]$.
- Каждый участник $i(\in [n])$, используя $(n, t+1)$-схему Шамира, распределяет набор $[h(i), f_i]_t$ (полином $f_i(z)$ выбирается i-ым участником случайно так, чтобы $f_i(0) = h(i)$).
- Пусть $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_n)$ – вектор рекомбинации для коалиции $\mathcal{P} = [n]$. Тогда равенство

$$h(0) = \sum_{i=1}^{n} h(i) r_i$$

выполняется для любого полинома степени не выше $n-1$. А по условию $t < n/2$, поэтому $\deg(h(z)) \leq n-1$.

- Так как $\mathbf{r}$ известен всем, а также к этому моменту все участники владеют наборами $[h(i), f_i]_t$, то все участники могут вычислить $\sum_{i=1}^{n} r_i [h(i); f_i]_t$:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i [h(i); f_i]_t = [\sum_{i=1}^{n} r_i h(i); \sum_{i=1}^{n} r_i f_i]_t = [h(0); \sum_{i=1}^{n} r_i f_i]_t = [a \cdot b; \sum_{i=1}^{n} r_i f_i]_t.$$

Умножение. Понижение спение полинома

Умножение. Понижение спение полинома

- Таким образом, участник i вычисляет

$$\sum_{l=1}^{n} r_l \cdot f_l(i).$$

Умножение. Понижение спение полинома

- Таким образом, участник i вычисляет

$$\sum_{l=1}^{n} r_l \cdot f_l(i).$$

- В итоге все участники владеют значением

$$[a \cdot b; \sum_{i=1}^{n} r_i f_i]_t.$$