Модели последовательных и параллельных вычислений

В.А. Захаров

Лекция 2.

1. Проблемы ограниченности и безопасности для сетей Петри
2. Деревья покрытия разметок сетей Петри
3. Варианты проблемы достижимости
4. Проблемы живости и достижимости для сетей Петри

Проблема ограниченности для сетей Петри

Позиция p в сети Петри $\pi = (P, T, F, W, M)$ называется ограниченной , если существует такое число n , что для любой разметки $M', M' \in R(\pi)$, верно равенство $M'(p) \leq n$.

Сеть Петри называется ограниченной , если любая ее позиция ограничена.

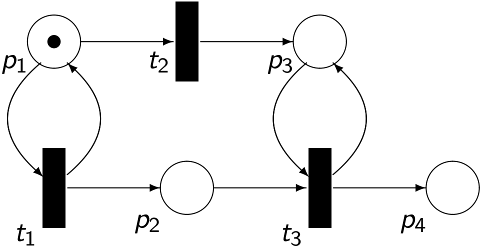
Проблема ограниченности состоит в том, чтобы для произвольной заданной сети Петри проверить, является ли она ограниченной.

Очевидно, что сеть Петри ограничена тогда и только тогда, когда множество ее достижимых разметок $R(\pi)$ конечно.

Чтобы убедиться в этом, достаточно построить граф достижимых разметок $G(\pi)$ и убедиться, что в этом графе конечное число вершин. Однако непросто убедиться в том, что граф $G(\pi)$ имеет бесконечно много вершин.

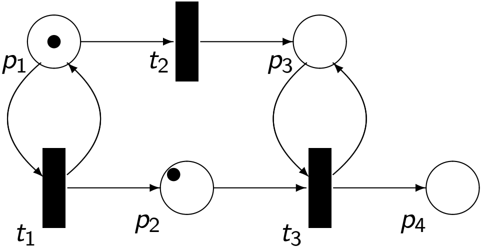
Проблема ограниченности для сетей Петри

Пример неограниченной сети Петри



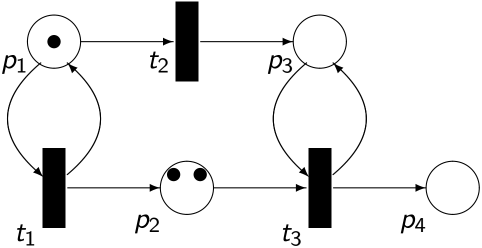
Проблема ограниченности для сетей Петри

Пример неограниченной сети Петри



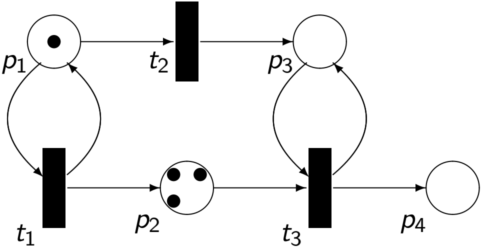
Проблема ограниченности для сетей Петри

Пример неограниченной сети Петри



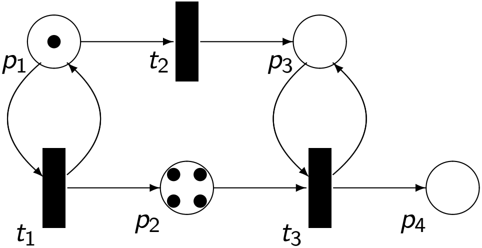
Проблема ограниченности для сетей Петри

Пример неограниченной сети Петри



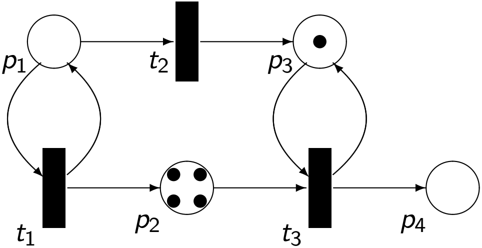
Проблема ограниченности для сетей Петри

Пример неограниченной сети Петри



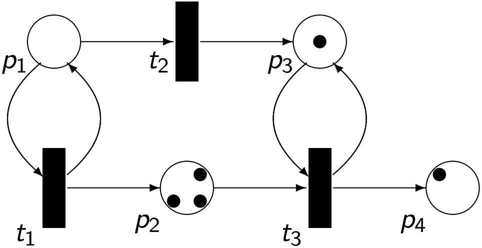
Проблема ограниченности для сетей Петри

Пример неограниченной сети Петри



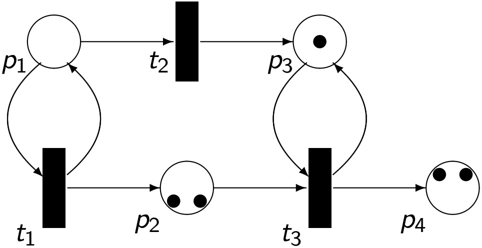
Проблема ограниченности для сетей Петри

Пример неограниченной сети Петри



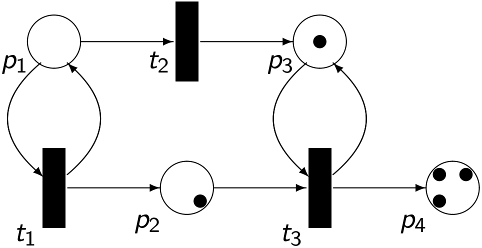
Проблема ограниченности для сетей Петри

Пример неограниченной сети Петри



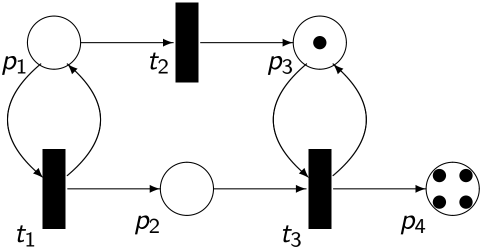
Проблема ограниченности для сетей Петри

Пример неограниченной сети Петри



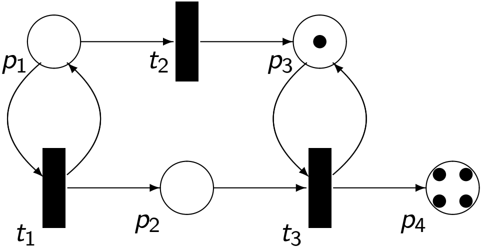
Проблема ограниченности для сетей Петри

Пример неограниченной сети Петри



Проблема ограниченности для сетей Петри

Пример неограниченной сети Петри



Как видно из проведенного вычисления, позиции p_2 и p_4 являются неограниченными.

Но как можно строго обосновать обнаруженный эффект «неограниченных» вычислений?

Проблема ограниченности для сетей Петри

Критерий неограниченности сети Петри

Сеть Петри $\pi = (P, T, F, W, M_0)$ является неограниченной тогда и только тогда, когда существует хотя бы одно такое вычисление

$$M_0 \xrightarrow{\tau'}_* M' \xrightarrow{\tau''}_* M'',$$

в котором для пары конфигураций M', M'' выполняется соотношение $M' \preceq M''$, причем хотя бы для одной позиции p справедливо строгое неравенство $M'(p) < M''(p)$.

Доказательство.

$(\Leftarrow)$ Из условия $M' \preceq M''$ следует, что $M'' = M' + K$ для некоторой разметки K .
Из условия $M'(p) < M''(p)$ следует, что разметка K — непустое мультимножество позиций.
Из основной теоремы о монотонности вычислений сетей Петри следует, что $M' + nK \in R(\pi)$ для любого целого $n, n \geq 0$.

Проблема ограниченности для сетей Петри

Доказательство.

($\Rightarrow$) Если сеть Петри π неограничена, то ее граф достижимых разметок $G(\pi)$ имеет бесконечно много вершин, достижимых из начальной разметки M .
Тогда, по **лемме Кенига**, в таком графе существует бесконечная цепь (маршрут без повторяющихся вершин)

$$\alpha = M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} M_2 \xrightarrow{t_3} \cdots$$

Лемма о бесконечных множествах разметок.
Из любой бесконечной последовательности разметок $M_0, M_1, M_2, M_3, \ldots$ можно выделить бесконечную монотонно возрастающую подпоследовательность разметок $M_{r_1} \preceq M_{r_2} \preceq M_{r_3} \preceq \ldots$.

Доказательство основной леммы

Каждая разметка может быть представлена набором натуральных чисел $M_i = \langle n_{1i}, n_{2i}, \ldots, n_{mi} \rangle$.
Заметим, что никакая последовательность натуральных чисел не может быть бесконечно убывающей.

Поэтому в бесконечной последовательности разметок α можно выделить бесконечную подпоследовательность разметок

$$\alpha^{(1)} = M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots, M_{i_k}, \ldots,$$

в которой первые компоненты наборов, задающих эти разметки, образуют неубывающую последовательность $n_{1i_1} \leq n_{1i_2} \leq n_{1i_3} \leq \ldots$.
Точно так же в бесконечной последовательности разметок $\alpha^{(1)}$ можно выделить бесконечную подпоследовательность разметок

$$\alpha^{(2)} = M_{j_1}, M_{j_2}, \ldots, M_{j_\ell}, \ldots,$$

в которой вторые компоненты наборов, задающих эти разметки, образуют неубывающую последовательность $n_{2j_1} \leq n_{2j_2} \leq n_{2j_3} \leq \ldots$.

Проблема ограниченности для сетей Петри

Проведя такое выделение подпоследовательностей m раз (по числу позиций в сети π), получим бесконечную неубывающую последовательность попарно различных разметок

$$\alpha^{(m)} = M_{r_1} \preceq M_{r_2} \preceq M_{r_3} \preceq \ldots .$$

Лемма о бесконечных множествах разметок доказана.

Поскольку разметки этой последовательности располагаются друг за другом на одном и том же маршруте в графе достижимых разметок $G(\pi)$, приходим к заключению о том, что пара различных разметок M_{r_1}, M_{r_2} удовлетворяет соотношению

$$M_0 \xrightarrow{\tau'}_* M_{r_1} \xrightarrow{\tau''}_* M_{r_2}$$

для некоторых конечных последовательностей переходов τ', τ'' и при этом справедливо неравенство $M_{r_1} \preceq M_{r_2}$.

$\square$

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Критерий неограниченности сети Петри позволяет построить алгоритм решения проблемы ограниченности сети.

Этот алгоритм осуществляет проверку ограниченности сети Петри путем построения т.н. **дерева покрытия разметок** .

Вершинами этого дерева служат наборы, состоящие из натуральных чисел, а также специального символа ∞ . Наборы, в которых содержится символ ∞ , будем называть *предельными* .

Предельные наборы можно рассматривать как разметки особого рода: равенство $M(p) = \infty$ для некоторой позиции p означает, что в этой позиции может быть накоплено бесконечно много фишек.

Предельные наборы можно сравнивать друг с другом и с наборами натуральных чисел (разметками) покомпонентно, полагая, что $n < \infty$ для любого натурального числа n .

Деревья покрытия разметок сетей Петри

При построении дерева покрытия разметок предельные наборы будут возникать всякий раз, когда обнаруживаются пары сравнимых разметок.

Пусть заданы две разметки M', M'' сети Петри π и при этом $M' \prec M''$. Тогда запись $[M', M'']$ будет обозначать предельный набор, который удовлетворяет следующим равенствам для любой позиции p :

$$[M', M''](p) = \begin{cases} M''(p), & \text{если} \quad M'(p) = M''(p), \\ \infty, & \text{если} \quad M'(p) < M''(p). \end{cases}$$

Дерево покрытия разметок $\Gamma(\pi)$ сети Петри $\pi = (P, T, F, W, M_0)$ устроено следующим образом.

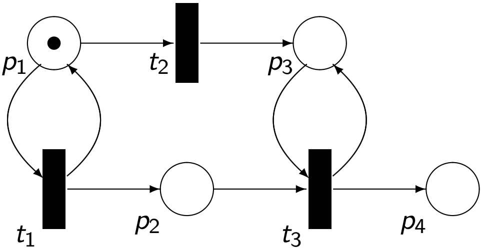
1) В качестве внутренних (нелистовых) вершин используются только наборы натуральных чисел, соответствующие разметкам сети π .
2) Предельные наборы служат только листовыми вершинами.

Деревья покрытия разметок сетей Петри

3) корнем дерева является начальная разметка M_0 ;
4) разметка M сети π , входящая в состав дерева $\Gamma(\pi)$, служит листовой вершиной тогда и только тогда, когда
   - либо M является тупиковой разметкой сети π ,
   - либо M встречалась ранее в дереве $\Gamma(\pi)$ на пути из корня M_0 в вершину M ;
5) если вершина M не является листовой, и $M \xrightarrow{t} M''$ для некоторого перехода t , то в дереве $\Gamma(\pi)$ имеется дуга, ведущая из вершины M в такую вершину $\widehat{M}$, что
   - $\widehat{M} = M''$, если на пути из из корня M_0 в вершину M нет вершин M' , удовлетворяющих отношению $M' \prec M''$;
   - $\widehat{M} = [M', M'']$, если на пути из из корня M_0 в вершину M встречается такая вершина M' , для которой справедливо сравнение $M' \prec M''$.

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Пример дерева покрытия разметок $\Gamma(\pi)$ для сети Петри π .

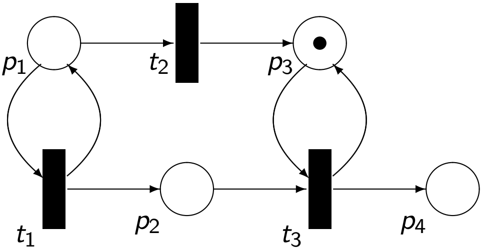


$M_0 = (1, 0, 0, 0)$

Начальная разметка $M_0 = (1, 0, 0, 0)$

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Пример дерева покрытия разметок $\Gamma(\pi)$ для сети Петри π .



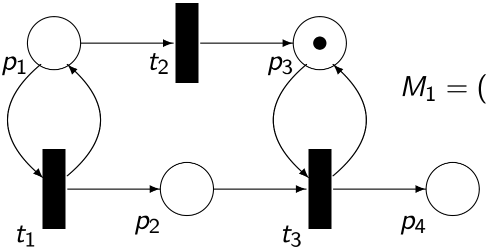
$M_0 = (1,0,0,0)$

$M_0 \xrightarrow{t_2} M_1 = (0,0,1,0)$;

M_1 — тупиковая разметка

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Пример дерева покрытия разметок $\Gamma(\pi)$ для сети Петри π .



$$M_0 = (1, 0, 0, 0)$$

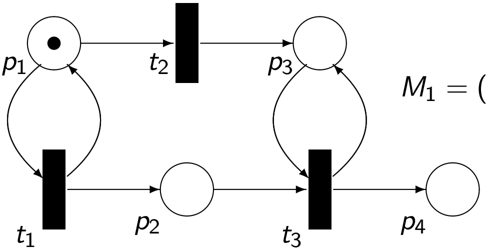
$$M_1 = (0, 0, 1, 0)$$

$M_0 \xrightarrow{t_2} M_1 = (0, 0, 1, 0)$;

M_1 — тупиковая разметка

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Пример дерева покрытия разметок $\Gamma(\pi)$ для сети Петри π .



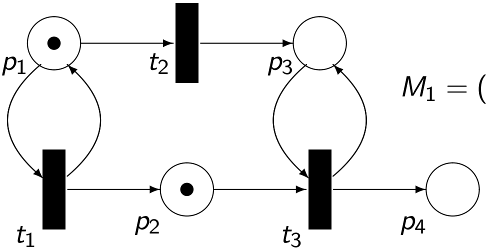
$$M_0 = (1, 0, 0, 0)$$

$$M_1 = (0, 0, 1, 0)$$

Начальная разметка $M_0 = (1, 0, 0, 0)$

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Пример дерева покрытия разметок $\Gamma(\pi)$ для сети Петри π .



$M_0 = (1, 0, 0, 0)$

$M_1 = (0, 0, 1, 0)$

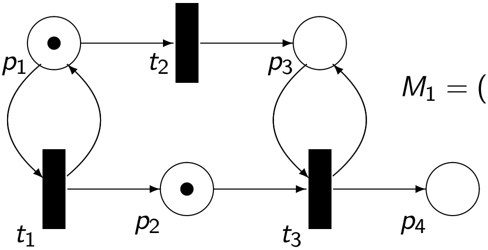
$M_0 \xrightarrow{t_1} M_2 = (1, 1, 0, 0)$

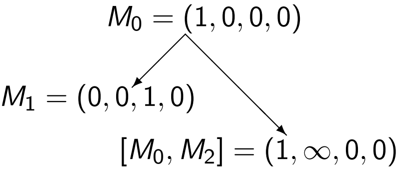
$M_0 \prec M_2$

$[M_0, M_2] = (1, \infty, 0, 0)$

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Пример дерева покрытия разметок $\Gamma(\pi)$ для сети Петри π .





$M_0 \xrightarrow{t_1} M_2 = (1, 1, 0, 0)$

$M_0 \prec M_2$

$[M_0, M_2] = (1, \infty, 0, 0)$

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Теорема о дереве покрытия разметок

1. Для любой сети Петри π дерево покрытия разметок $\Gamma(\pi)$ является конечным.

2. Сеть Петри π является ограниченной тогда и только тогда, когда в дереве покрытия разметок $\Gamma(\pi)$ отсутствуют предельные вершины.

Доказательство.

Следует из критерия неограниченности сетей Петри и определения дерева покрытия разметок.

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Следствия из теоремы о дереве покрытия разметок

1. Проблема ограниченности обыкновенных сетей Петри алгоритмически разрешима.

2. Проблема безопасности ординарных сетей Петри алгоритмически разрешима.

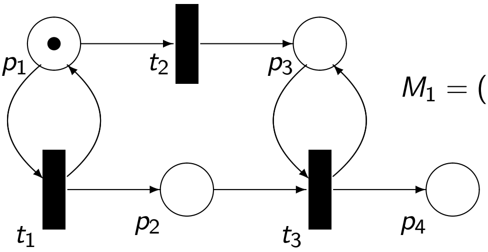
Задача 1 [трудная]

А какова сложность предложенного алгоритма проверки ограниченности сетей Петри путем построения деревьев покрытия разметок?

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Иногда важно не только установить, что сеть Петри является неограниченной, но также и определить, в каких позициях может накапливаться бесконечно много фишек.

Для этого дерева покрытия разметок $\Gamma(\pi)$ уже недостаточно, поскольку анализ вычислений на его ветвях обрывается при обнаружении первого же покрытия разметок $M' \prec M''$.



$$M_0 = (1, 0, 0, 0)$$

$$M_1 = (0, 1, 0, 0)$$

$$[M_0, M_2] = (1, \infty, 0, 0)$$

В этой сети неограничены позиции p_2 и p_4 , но граф $\Gamma(\pi)$ обнаруживает только неограниченность p_2 .

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Но построение дерева покрытия можно продожить, если обращаться с предельными наборами так же, как с обычными разметками.

Условимся, что для любого натурального числа m верны равенства $\infty + m = \infty - m = \infty$.

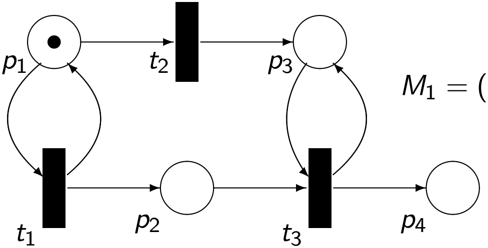
Тогда для всякого предельного набора M и перехода t в произвольной сети Петри π можно определить

- условие срабатывания перехода: $F_W(\bullet, t) \preceq M$,
- результат срабатывания перехода: $M' = (M \ominus F_W(\bullet, t)) + F_W(t, \bullet)$.

Таким образом, построение дерева покрытия разметок $\Gamma(\pi)$ может быть продожено из предельных вершин.

Полученное в результате такого построения дерево называется полным деревом покрытия разметок сети Петри π .

Деревья покрытия разметок сетей Петри



$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & M_0=(1,0,0,0) \arrow[dl, "t_2"'] \arrow[dr, "t_1"] & & \\
M_1=(0,1,0,0) & & M_2'=(1,\infty,0,0) \arrow[dl, "t_1"'] \arrow[d, "t_2"] & \\
 & M_3'=(1,\infty,0,0) & M_4'=(0,\infty,1,0) \arrow[d, "t_3"] & \\
 & & M_5'=(0,\infty,1,\infty) \arrow[d, "t_3"] & \\
 & & M_6'=(0,\infty,1,\infty) &
\end{tikzcd}
$$

Полное дерево покрытия разметок сети Петри

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Теорема о полном дереве покрытия разметок

1. Для любой сети Петри π полное дерево покрытия разметок является конечным.

2. В сети Петри π позиция p является ограниченной тогда и только тогда, когда для любой вершины M в полном дереве покрытия разметок верно $M(p) \neq \infty$.

Доказательство.

Самостоятельно.

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Полные деревья разметок можно использовать также и для проверки существенности переходов в сети Петри.

Переход t в сети Петри π называется мертвым , если он не является активным ни в одной разметке M из множества $R(\pi)$, т.е. не срабатывает ни в одном вычислении сети π .

Теорема о мертвых переходах

Переход t в сети Петри π является мертвым тогда и только тогда, когда ни одна дуга (M', M'') в полном дереве покрытия разметок не помечена переходом t .

Доказательство.

Самостоятельно.

Деревья покрытия разметок сетей Петри

Задача 2.

Построить алгоритм, который позволяет проверять, может ли заданная позиция p получить в ходе какого-либо вычисления заданной сети Петри π хотя бы одну фишку:
$\exists\, M \;:\; M \in R(\pi) \;\wedge\; M(p) \neq 0$.

Задача 3.

Построить алгоритм, который позволяет проверять, может ли заданный переход t сработать сколь угодно много раз в ходе какого-либо вычисления заданной сети Петри π .

Проблемы живости и достижимости для сетей Петри

Разметка M достижима в сети Петри π , если $M \in R(\pi)$.

Проблема достижимости состоит в том, чтобы для заданной сети Петри π и разметки M проверить включение $M \in R(\pi)$.

Переход t в сети Петри π называется живым , если для любой разметки $M', M' \in R(\pi)$, существует такая разметка $M'', M'' \in R(\pi, M')$, в которой переход t активен.

Сеть называется живой , если все ее переходы живые.

Проблема живости состоит в том, чтобы для заданной сети Петри π проверить, является ли она живой.

Покажем, что проблемы живости и достижимости для обыкновенных сетей Петри взаимно сводимы друг к другу.

Варианты проблемы достижимости

Вначале покажем, что проблему достижимости достаточно научиться решать лишь для одного вида разметок.

Проблема $\mathbf{0}$ -достижимости состоит в том, чтобы для заданной сети Петри π проверить, принадлежит ли множеству $M \in R(\pi)$ разметка $\mathbf{0} = \langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$, в которой ни одна позиция сети не имеет ни одной фишки.

Теорема о 0-достижимости

Проблемы достижимости и $\mathbf{0}$ -достижимости для обыкновенных сетей Петри взаимно сводимы друг к другу.

Доказательство.

Очевидно, что проблема $\mathbf{0}$ -достижимости — это частный случай проблемы достижимости.

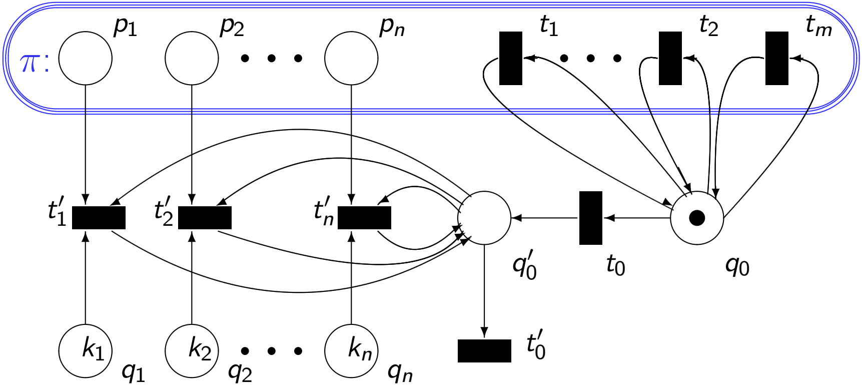
Покажем, что для любой сети Петри π и разметки M можно построить такую сеть Петри π_M , что $M \in R(\pi) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{0} \in R(\pi_M)$

.

Варианты проблемы достижимости

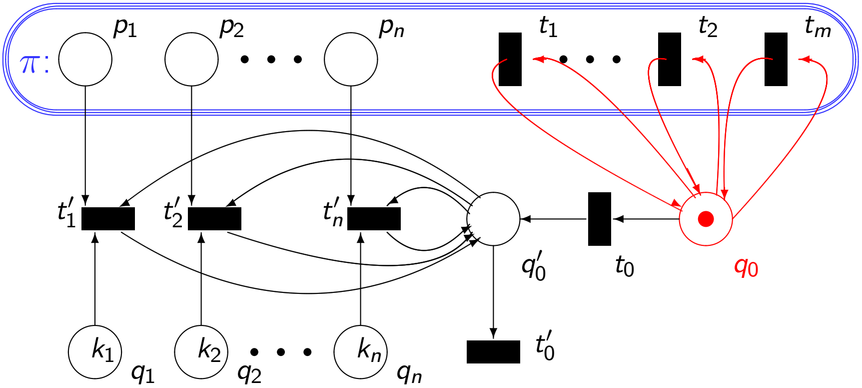
Предположим, что $\pi = (P, T, F, W, M_0)$, где
$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$, и
$M = \langle k_1, k_2, \ldots, k_n \rangle$.

Тогда сеть Петри π_M имеет следующий вид:



Варианты проблемы достижимости

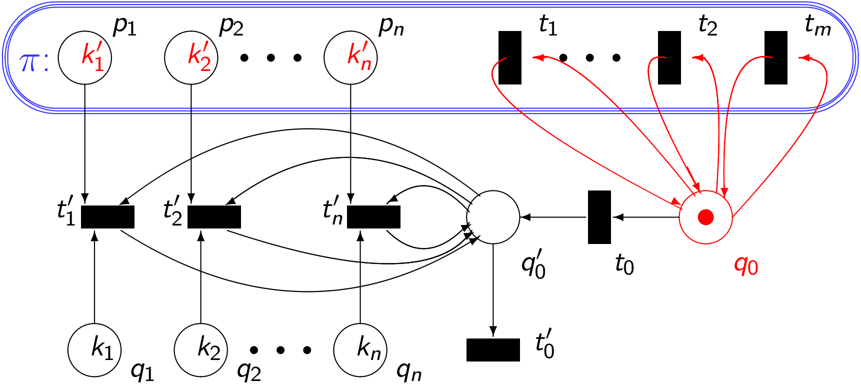
Сеть Петри π_M



Пока фишка остается в позиции q_0 , «голубая» подсеть работает точно так же, как сеть π , т.е. может достичь любой разметки $M' = \langle k'_1, k'_2, \ldots, k'_n \rangle$ из множества $R(\pi)$.

Варианты проблемы достижимости

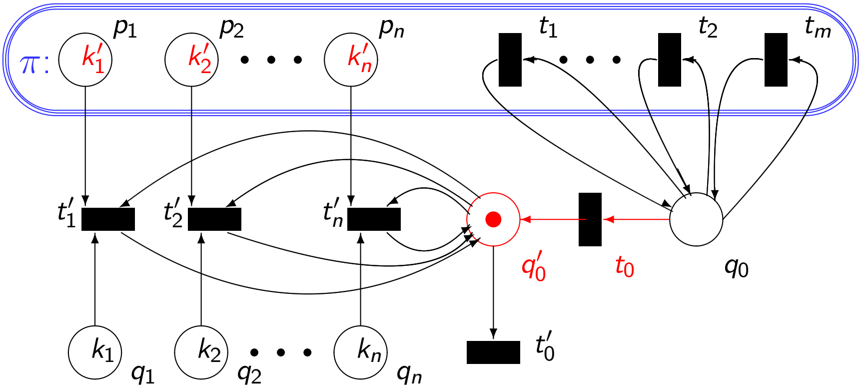
Сеть Петри π_M



Пока фишка остается в позиции q_0 , «голубая» подсеть работает точно так же, как сеть π , т.е. может достичь любой разметки $M' = \langle k'_1, k'_2, \ldots, k'_n \rangle$ из множества $R(\pi)$.

Варианты проблемы достижимости

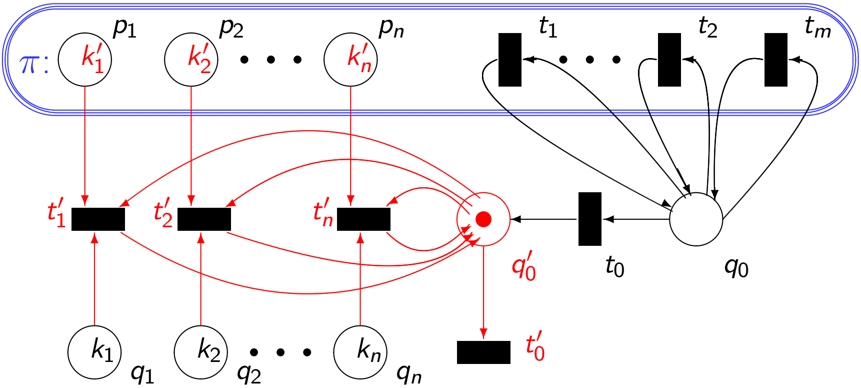
Сеть Петри π_M



Но как только фишка переходит из позиции q_0 в позицию q'_0 , все переходы подсети π перестают быть активными.

Варианты проблемы достижимости

Сеть Петри π_M

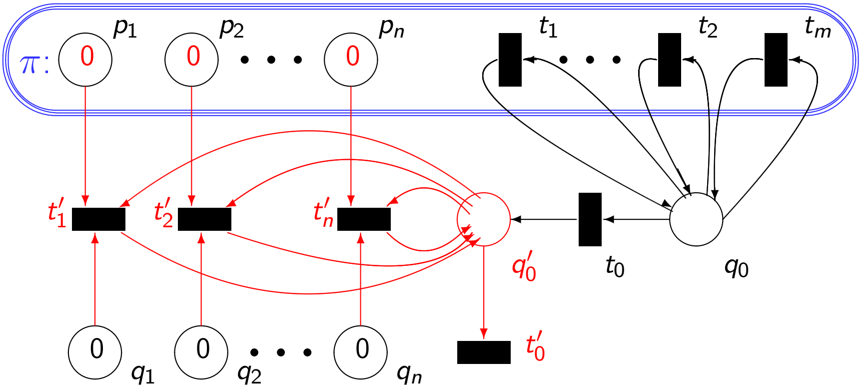


Зато активными становятся все переходы $t'_1, t'_2, \ldots, t'_n$.

И тогда позиции $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а также $q_1, q_2, \ldots, q_n$ могут опустошиться.

Варианты проблемы достижимости

Сеть Петри π_M



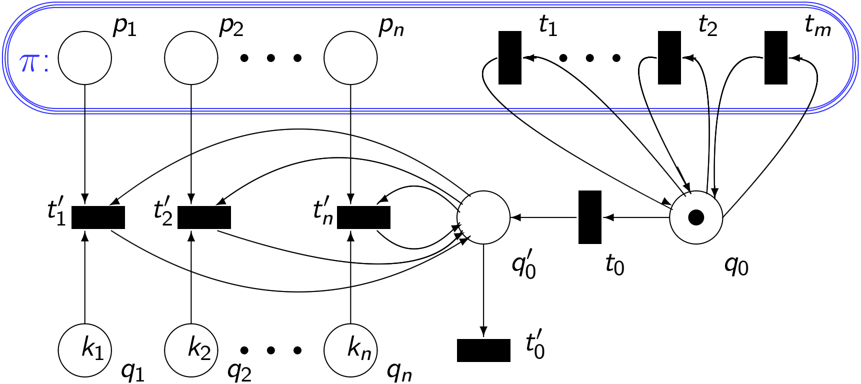
Но это опустошение может случиться тогда и только тогда, когда

$$k_1 = k'_1,\ k_2 = k'_2,\ \ldots\ k_n = k'_n.$$

Варианты проблемы достижимости

Таким образом, $M = \langle k_1, k_2, \dots, k_n \rangle \in R(\pi)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} \in R(\pi_M)$. □

Сеть Петри π_M



Варианты проблемы достижимости

Другим вариантом проблемы достижимости является проблема ограниченной достижимости разметок сети Петри.

Пусть задана некоторые произвольные сеть Петри π и ее конечная или предельная разметка M .

Проблема ограниченной достижимости состоит в том, чтобы проверить, существует ли такая конечная разметка $M', M' \in R(\pi)$, которая удовлетворяет неравенству $M' \preceq M$.

Теорема об ограниченной достижимости

Проблемы достижимости и ограниченной достижимости для обыкновенных сетей Петри взаимно сводимы друг к другу.

Задача [трудная] .

Доказать теорему об ограниченной достижимости.

Проблемы живости и достижимости

Проблемы $\mathbf{0}$-достижимости и живости сетей Петри взаимосвязаны.

Теорема о сводимости проблемы достижимости к проблеме живости

Проблемы $\mathbf{0}$-достижимости для обыкновенных сетей Петри алгоритмически сводима к проблеме живости.

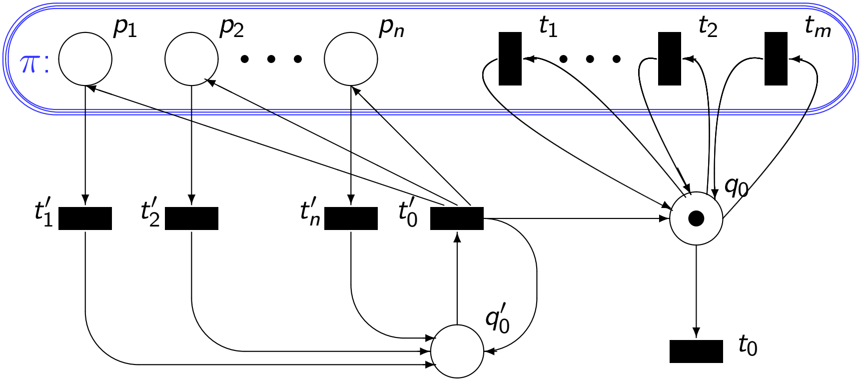
Доказательство.

Покажем, что для любой сети Петри π можно построить такую сеть Петри π_{live} , которая является живой в том и только том случае, если $\mathbf{0} \notin R(\pi)$.

Проблемы живости и достижимости

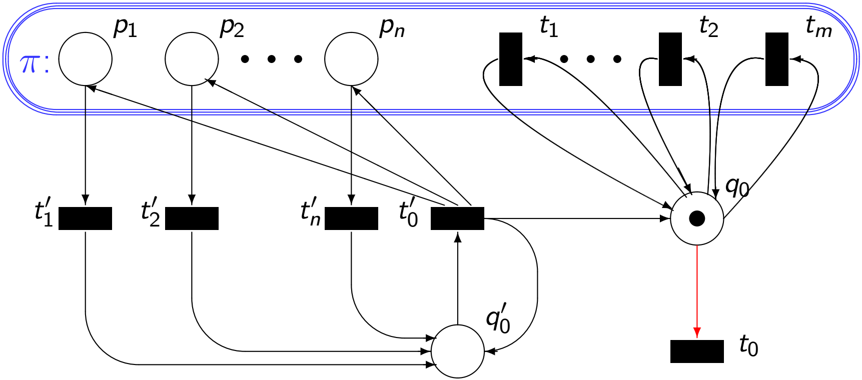
Предположим, что $\pi = (P, T, F, W, M_0)$, где $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$.

Тогда сеть Петри π_{live} имеет следующий вид:



Проблемы живости и достижимости

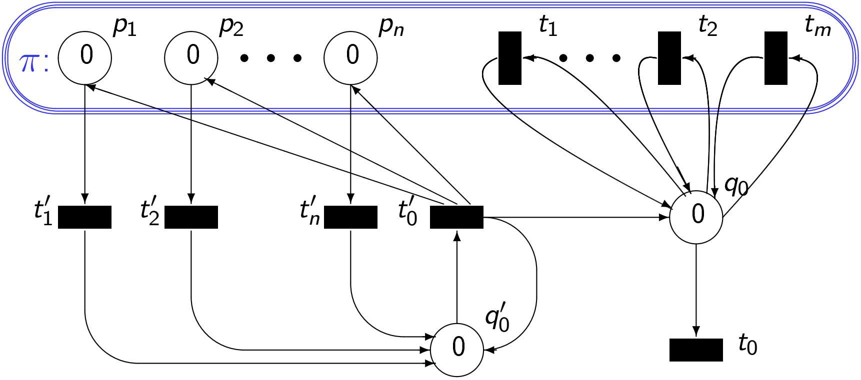
Сеть Петри π_{live}



Если в сети Петри π достижима разметка $\mathbf{0}$, то сеть Петри π_{live} имеет вычисление, в котором вначале в подсети π будут опустошены все позиции $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а затем рабочая фишка покинет позицию q_0 за счет срабатывания перехода t_0 .

Проблемы живости и достижимости

Сеть Петри π_{live}



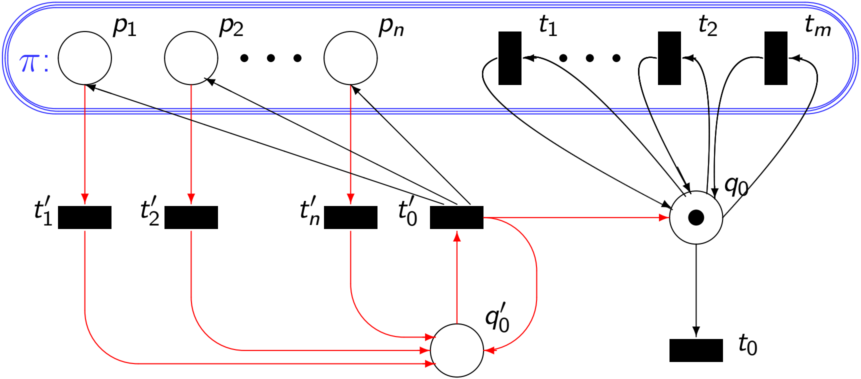
Таким образом, сеть Петри π_{live} также достигает разметки $\mathbf{0}$.

Т.к. для любого перехода t сети π_{live} верно ${}^{\bullet}t \neq \varnothing$, разметка $\mathbf{0}$ является тупиковой разметкой сети π_{live} .

Значит, сеть Петри π_{live} не является живой.

Проблемы живости и достижимости

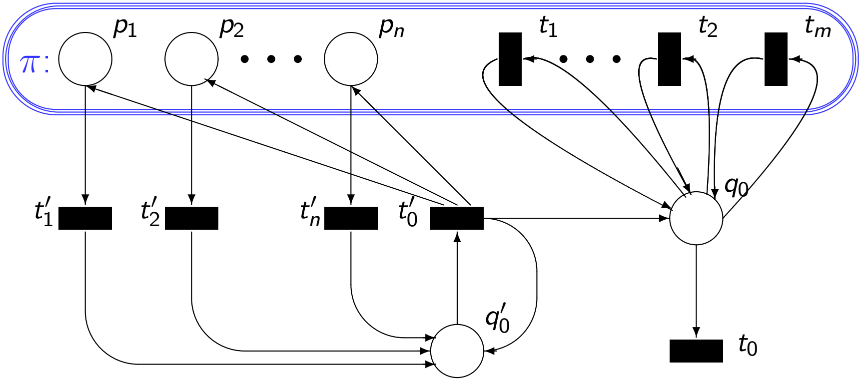
Сеть Петри π_{live}



А если в сети Петри π разметка $\mathbf{0}$ недостижима, то в любой достижимой разметке M сети π_{live} непустой будет либо одна из позиций $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (если до этого еще не сработал ни один из переходов $t'_1, t'_2, \ldots, t'_n$), либо позиция q'_0 (в случае срабатывания какого-либо из переходов $t'_1, t'_2, \ldots, t'_n$).

Проблемы живости и достижимости

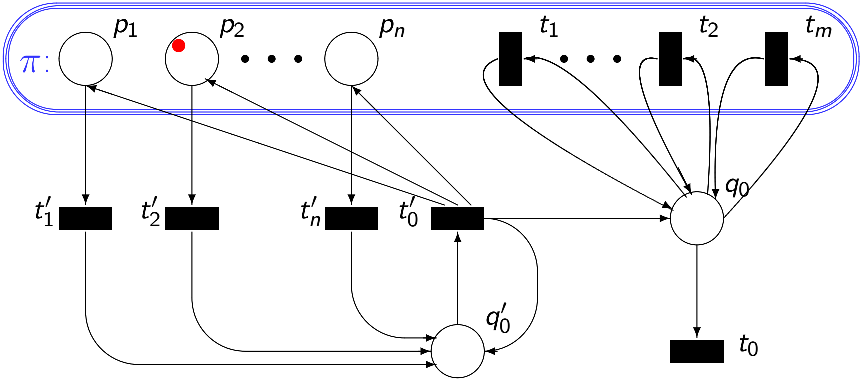
Сеть Петри π_{live}



Рассмотрим произвольную разметку M, $M \in R(\pi_{live})$, и покажем, как активизировать произвольный переход t .

Проблемы живости и достижимости

Сеть Петри π_{live}

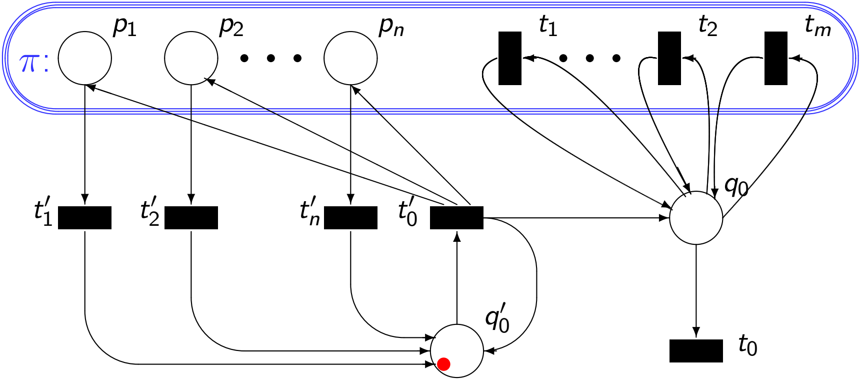


Рассмотрим произвольную разметку M, $M \in R(\pi_{live})$, и покажем, как активизировать произвольный переход t .

1) Если $M(q'_0) = 0$, то $M(p_i) \neq 0$ для некоторого $i, 1 \leq i \leq n$.

Проблемы живости и достижимости

Сеть Петри π_{live}

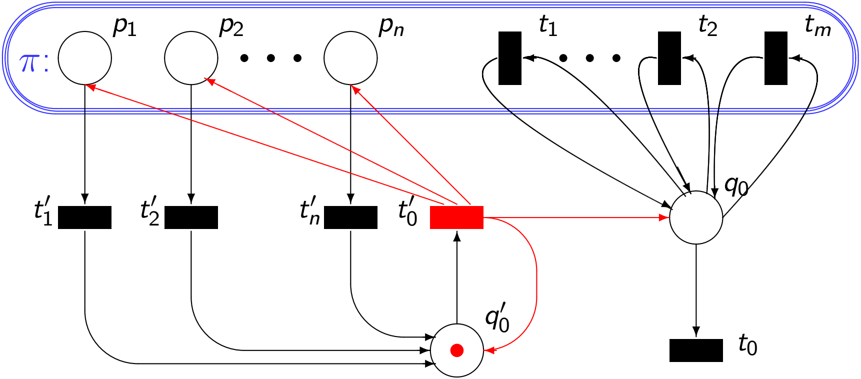


Рассмотрим произвольную разметку M, $M \in R(\pi_{live})$, и покажем, как активизировать произвольный переход t .

1) Если $M(q'_0) = 0$, то $M(p_i) \neq 0$ для некоторого $i, 1 \leq i \leq n$. Тогда после срабатывания перехода t'_i получаем конфигурацию M' , в которой $M'(q'_0) > 0$.

Проблемы живости и достижимости

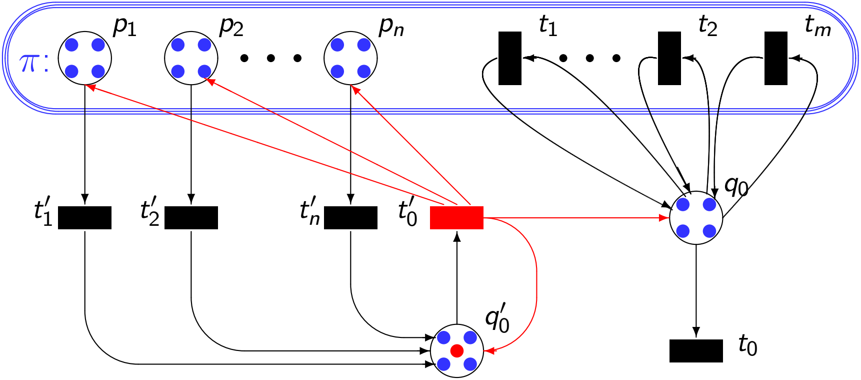
Сеть Петри π_{live}



Если $M(q'_0) > 0$, то переход t'_0 активен и будет оставаться активным всегда.

Проблемы живости и достижимости

Сеть Петри π_{live}



Если $M(q'_0) > 0$, то переход t'_0 активен и будет оставаться активным всегда.

При многократном срабатывании переход t'_0 способен доставить сколь угодно много фишек в любую позицию сети, сделав активным любой переход t . Значит, сеть π_{live} — живая.

Проблемы живости и достижимости

Доказательство (окончание).

Таким образом, для произвольной сети Петри π удалось построить такую сеть Петри π_{live} , что

$$\mathbf{0} \notin R(\pi) \iff \pi_{live} \text{ — живая сеть.}$$

$\square$

А теперь покажем, что проблема живости для обыкновенных сетей Петри, в свою очередь, алгоритмически сводима к проблеме достижимости.

Но для этого понадобится вспомогательные понятия.

Проблемы живости и достижимости

Для заданного перехода t конечная или предельная разметка M сети Петри π называется t -тупиковой , если переход t не является активным ни в одной разметке M' из множества $R(\pi, M)$, т.е. ни в каком вычислении сети π , начинающимся из разметки M , переход t никогда не срабатывает.

Очевидно, сеть Петри π является живой тогда и только тогда, когда из ее начальной разметки не достижима никакая t -тупиковая разметка ни для одного перехода t .

Обозначим записью $D_t(\pi)$ множество всех t -тупиковых разметок сети Петри π .

Проблемы живости и достижимости

Лемма 1 .

Для любой пары разметок M, M' (конечных или предельных) верно соотношение

$$M \in D_t(\pi) \;\wedge\; M' \preceq M \;\Rightarrow\; M' \in D_t(\pi).$$

Доказательство.

Непосредственно следует из определения t-тупиковости разметок и основной теоремы о монотонности вычислений обыкновенных сетей Петри. $\square$

Проблемы живости и достижимости

Лемма 2 .

Для любой монотонно возрастающей последовательности разметок $\alpha = M_1 \prec M_2 \prec M_3 \prec \ldots$ из множества $D_t(\pi)$ верно, что $sup(\alpha) \in D_t(\pi)$.

Доказательство.

Заметим, что $sup(\alpha)$ — это такая разметка M_∞ , которая для любой позиции p удовлетворяет соотношению

$$M_\infty(p) = \begin{cases} M_i(p), \text{ если } \ \forall\, j : \ j \geq i \ : M_j(p) = M_i(p), \\ \infty, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Из основной теоремы о монотонности вычислений обыкновенных сетей Петри следует, что $M_\infty \in D_t(\pi)$. $\square$

Проблемы живости и достижимости

Лемма 3 .

Для любой сети Петри π и перехода t множество $Dmax_t(\pi)$ всех максимальных (по отношению $\preceq$) разметок множества $D_t(\pi)$ конечно.

Доказательство.

Предположим противное: совокупность $Dmax_t(\pi)$ всех максимальных разметок множества $D_t(\pi)$ бесконечна.

Тогда по лемме о бесконечных множествах разметок в множестве $Dmax_t(\pi)$ есть бесконечная монотонно возрастающая последовательность разметок.

Однако существование такой последовательности противоречит тому, что любые два максимальных элемента частично упорядоченного множества несравнимы. $\square$

Проблемы живости и достижимости

Лемма 4 .

Для любой сети Петри π и перехода t можно эффективно построить такое конечное множество разметок $sup(D)$, что $D_t(\pi) = \{M \ : \ \exists \ M' : M' \in sup(D) \ \wedge \ M \preceq M'\}$.

Доказательство.

Покажем, что $sup(D) = Dmax_t(\pi)$.

1). Как было установлен в лемме 3, $Dmax_t(\pi)$ конечно.

2). Покажем, что $D_t(\pi) = \{M : \exists M' : M' \in Dmax_t(\pi) \wedge M \preceq M'\}$

Предположим противное: существует разметка M из множества $D_t(\pi)$, которая несравнима ни с одной разметкой из $Dmax_t(\pi)$ Рассмотрим одну из таких разметок M_0 , у которой $M_0(p) = \infty$ для наибольшего числа позиций p .

Доказательство леммы 4.

Так как $M_0 \in D_t(\pi) \setminus Dmax_t(\pi)$, должна также существовать бесконечная последовательность разметок $\alpha = M_0 \prec M_1 \prec M_2 \prec \dots$ из множества $D_t(\pi) \setminus Dmax_t(\pi)$.

Но тогда по лемме 2 существует разметка $M' = sup(\alpha)$, которая

- принадлежит множеству $D_t(\pi)$;
- не сравнима ни с одной разметкой из $Dmax_t(\pi)$;
- принимает значение ∞ в большем числе позиций, нежели разметка M_0 (вопреки условию выбора разметки M_0).

Полученное противоречие свидетельствует о том, что каждая разметка из множества $D_t(\pi)$ сравнима с одной из разметок множества $Dmax_t(\pi)$.

Доказательство леммы 4.

3). Множество разметок $Dmax_t(\pi)$ можно построить эффективно в два этапа путем последовательных приближений снизу.

Вначале задача вычисления максимальных t -тупиковых разметок решается только на конечном множестве разметок, представленных наборами из множества $\{0, \infty\}^n$.

Решение этой задачи проводится при помощи полных деревьев покрытий разметок и на основании теоремы о мертвых переходах:

1. для каждой разметки $M, M \in \{0, \infty\}^n$, нужно построить полное дерево покрытий разметок с корнем M и выделить только такие разметки, для которых в соответствующем дереве нет дуг с пометкой t ;
2. среди выделенных пометок нужно выбрать максимальные.

Доказательство леммы 4.

На втором этапе для каждой из выделенных t -тупиковых разметок $M, M \in \{0, \infty\}^n$ необходимо найти все такие максимальные конечные разметки K , чтобы $M + K \in D_{max}(\pi)$.

Этот поиск можно проводить так:

- проводится перебор всех наборов $K, K \in \mathbb{N}^n$,
- для каждого из них строится полное дерево покрытий разметок с корнем $M + K$,
- в построенном конечном дереве проводится поиск дуги с пометкой t .

По теореме о мертвых переходах отсутствие такой дуги — это признак t -тупиковости разметки $M + K$.

t -тупиковая разметка $M + K$ заносится в множество $D_{max}(\pi)$ тогда и только тогда, когда любая из непосредственно следующих за ней (по отношению $\preceq$) разметок $M + K'$ не является t -тупиковой.

Проблемы живости и достижимости

Теорема о сводимости проблемы живости к проблеме достижимости

Для обыкновенных сетей Петри проблема живости сети алгоритмически сводима к проблеме достижимости разметки.

Доказательство.

Как следует из леммы 4, существует алгоритм, который для каждой сети Петри π и для каждого перехода t в этой сети вычисляет такое конечное множество разметок $Dmax_t(\pi)$, что

$$M \in D_t(\pi) \;\Leftrightarrow\; \exists\, M' : (M' \in Dmax_t(\pi) \wedge M \preceq M')$$

Поэтому сеть π не является живой тогда и только тогда, когда в ней достижима хоть одна разметка M , покрываемая хотя бы одной разметкой из множества $\bigcup\limits_{t \in T} Dmax_t(\pi)$.

Проблемы живости и достижимости

Доказательство теоремы.

Таким образом, задача проверки живости сети Петри сводима к задаче проверки достижимости произвольной разметки M , покрываемой заданным набором M' , которая согласно теореме об ограниченной достижимости сводима к проблеме достижимости. □

Проблему достижимости разметок для обыкновенных сетей Петри исследовали почти 20 лет.

Вначале было установлено, что эта задача ExpSPACE-трудна, а затем после нескольких попыток в 1981 г. Э. Майр (E. Mayr) предложил для нее разрешающий алгоритм.

Любой из известных в настоящее время алгоритмов решения проблемы достижимости для сетей Петри не является примитивно рекурсивным.

Проблемы живости и достижимости

Мы изучили некоторые задачи анализа поведения обыкновенных сетей Петри, для которых существуют алгоритмы их решения.

Но в теории сетей Петри есть также и алгоритмические неразрешимые задачи.

К их числу относится проблема R-эквивалентности — проверки того, могут ли в двух разных сетях Петри быть достижимы одни и те же разметки.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 2