Лабораторная работа по теме "Решение системы нелинейных уравнений методом Ньютона"

Постановка задачи. Рассмотрим систему из двух нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} F_1\,(x_1, x_2) = 0 \\ F_2\,(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Отделим графическим способом корни этой системы и будем уточнять один из них методом Ньютона.

Описание метода. Обозначим $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{F} = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$. Тогда итерационная формула метода Ньютона имеет вид

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - [\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Чтобы не обращать матрицу производных (матрицу Якоби), будем использовать расчетную формулу в виде

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})\,(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), k = 0, 1, 2, \ldots$$

Корень найден с точностью ε, если

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)})\| < \varepsilon$$

Методические указания.

- 1. Рассмотрим систему из двух нелинейных уравнений с известным решением $(1, 2)$, например

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 5 \\ x_2 = 2\,x_1^3 \end{cases}$$

  Задайте функции для двух нелинейных уравнений:

```
> n:=2;
> F[1]:=(x)->x[1]^2+x[2]^2-5;
> F[2]:=(x)->x[2]-2*x[1]^3;
```

- 2. Используйте следующие команды для графического отделения корней:

```
> with(plots):
> gr1:=implicitplot(F[1](x), x[1]=a..b, x[2]=c..d, color=red):
> gr2:=implicitplot(F[2](x), x[1]=a..b, x[2]=c..d, color=green):
> display(gr1, gr2);
```

- 3. Задайте матрицу производных:

```
> Jac:=array(1..n, 1..n);
> for ... do Jac[i,j]:=diff(F[i](x),x[j]); od;
```

- 4. Используйте цикл для организации итерационного процесса:

```
> norma:=1; A:= array(1..n, 1..n); B:=array(1..n);
> x0:=array(1..n,[1,1]);
> for k from 1 to 5 while norma>0.001 do
> for ... A[i,j]:=...; B[i]:=...; od;
> res:=linsolve(A, B);
> for i from 1 to n do x0[i]:=x0[i]+res[i]; od;
> norma:=...;
> od;
```

- 5. Создайте процедуру для решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона. Параметрами процедуры являются начальное приближение, точность, максимальное число итераций. Предусмотрите выход из процедуры в случае, когда метод может не сходится, и когда матрица Якоби необратима.
- 6. Вычислите значения функций $F[1]$, $F[2]$ для найденного решения.
- 7. Сохраните результаты в файле РЕШЕНИЕ СИСТ НЕЛ УР(ТЕСТ-2).MWS, затем решите тестовую систему 3-го порядка, сохраните РЕШЕНИЕ СИСТ НЕЛ УР(ТЕСТ-3).MWS. Для решения системы из индивидуального задания создайте файл
РЕШЕНИЕ СИСТ НЕЛ УР(ИНД).MWS.