ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Проблема приближенного вычисления функции возникает во многих прикладных задачах. Часто оказывается, что аналитического (при помощи формул) выражения для функции $f(x)$ не имеется по объективным причинам. Например, в случае, когда значения функции определяются при помощи каких-либо сложных вычислительных алгоритмов и могут быть рассчитаны только для какого-либо конечного набора аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то есть можно определить лишь набор значений функции $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$. Аналогичная ситуация возникает также при проведении измерений — дискретному набору моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ставится в соответствие значения функции $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n)$, например, зависимость температуры от времени. Даже в случае, когда функция задана аналитическими выражениями может оказаться, что эти выражения настолько сложны, например, бесконечные ряды или ряды с большим количеством членов, что их вычисление требует больших затрат времени и может быть произведено, только лишь для некоторого набора значений аргумента. Актуальной является также и задача определения функций по таблицам — например, по таблицам значений тригонометрических функций. Заметим, что многие функции, такие как sin, cos, ln и другие, стали считаться элементарными только благодаря тому, что имелись подробные таблицы значений функций, что дало возможность быстро вычислять их значения даже при отсутствии ЭВМ.

Для всех перечисленных примеров, список которых может быть продолжен, актуальной является задача о восстановлении значений функции по дискретному набору ее значений, например, в промежутках между аргументами x_k, x_k, в которых значения функции известны.

Постановка задачи. Рассмотрим функцию, заданную таблично

x_0	x_1	$\ldots$	x_n	x_*	?
f_0	f_1	$\ldots$	f_n	?	f_*

здесь $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ — узлы интерполяции. Требуется для этой функции построить интерполяционный многочлен и решить прямую задачу для x_* и обратную задачу для f_*.

Будем разыскивать алгебраический многочлен вида

$$M_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n$$

Потребуем, чтобы в узлах интерполирования этот многочлен совпадал со значениями функции

$$M_n(x_k) = f_k, k = 0,1,2, \dots n$$

Получаем систему из (n+1) уравнения относительно неизвестных коэффициентов многочлена $M_n(x)$

$$M_n(x_k) = f_k, k = 0,1,2, \dots n$$

Определитель этой системы отличен от нуля, так как среди узлов нет повторяющихся и называется определителем Вандермонда.

При больших значениях n такой способ построения интерполяционного многочлена затруднителен и поэтому используют интерполяционный многочлен в форме Лагранжа или в форме Ньютона.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа определяется как линейная комбинация многочленов n-ых степеней:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k c_k(x), \quad c_k(x) - \text{многочлен степени}\, n$$

При подстановке узла интерполяции x_0 получаем

$$L_n(x_0) = f_0 = \sum_{k=0}^{n} f_k c_k(x_0) \to c_0(x_0) = 1, \quad c_k(x_0) = 0, k \neq 0$$

При подстановке узла интерполяции x_1 получаем

$$L_n(x_1) = f_1 = \sum_{k=0}^{n} f_k c_k(x_1) \to c_1(x_1) = 1,\ c_k\,(x_1) = 0, k \neq 1$$

…..

Таким образом, многочлены $c_k(x)$ строятся следующим образом

$$c_k(x_m) = 0, k \neq m, c_k(x_k) = 1$$

Таким образом, строим многочлен по его нулям:

$$c_k(x) = A(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)$$

Найдем множитель А из условия $c_k(x_k) = 1$, получаем

$$1 = A(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x - x_n)$$

$$A = \frac{1}{\prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)}$$

Теперь окончательно получим многочлен $c_k(x)$

$$c_k(x) = \frac{\prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x - x_i)}{\prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)} = \prod_{i=0\ i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \prod_{i=0\ i\neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \quad (1), L_n(x_j) = f_j$$

Запишем интерполяционный многочлен в форме Лагранжа в случае $n = 2$, этот многочлен строится по таблице значений из трех узлов

x_0	x_1	x_2
f_0	f_1	f_2

и имеет вид (квадратичная интерполяция)

$$L_2(x) = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} +$$
$$+ f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Пример *По заданной таблице значений постройте интерполяционный многочлен в форме Лагранжа и определите недостающее значение*

−1	0	1	2	0.1
−9	−4	11	78	?

Решение. *В таблице значений приведены значения функции для четырех узлов $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, значит, будем строить многочлен третьего порядка. Интерполяционный многочлен третьего порядка в форме Лагранжа*

$$L_3(x) = f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + $$
$$+ f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + $$
$$+ f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + $$
$$+ f_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Подставим значения узлов интерполирования и значения функции в узлах, получим

$$L_3(x) = -9\,\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} - 4\,\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} + 11\,\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} + 78\,\frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} =$$

$$= +\frac{3}{2}(x^3-3x^2+2x) - 2(x^3-2x^2-x+2) - \frac{11}{2}(x^3-x^2-2x) + 13(x^3-x)$$
$$= 7x^3 + x^2\left(-\frac{9}{2}+4+\frac{11}{2}\right) + x(3+2+11-13) + x^0(-4)$$
$$= 7x^3+5x^2+3x-4$$

Выполним проверку, подставив значения узлов в интерполяционный многочлен

$$L_3(-1) = -7+5-3-4 = -9$$

$$L_3(0) = -4$$

$$L_3(1) = 7+5+3-4 = 11$$

$$L_3(2) = 56+20+6-4 = 78$$

Для указанного в таблице значения $x = 0.1$ найдем значение функции с помощью интерполяционного многочлена

$$L_3(\frac{1}{10}) = 7\frac{1}{1000} + 5\frac{1}{100} + 3\frac{1}{10} - 4 = \frac{-3643}{1000} = -3.643 \qquad (4.5)$$

Ответ. *Интерполяционный многочлен Лагранжа по заданной таблице значений имеет вид*

$$L_3(x) = 7\,x^3 + 5\,x^2 + 3\,x - 4$$

Недостающее значение функции $L_3(0.1) = -3.643$

Оценка погрешности интерполяционного многочлена

Оценим погрешность замены функции f(x) ее интерполяционным многочленом. Определим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - L_n(x) - K\,\omega_n(x), \;\; \omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

Здесь К- некоторая константа.

Пусть функция f(x) непрерывно дифференцируема на отрезке [a,b] (n+1) раз, тогда $\varphi(x)$ также непрерывно дифференцируема.

Заметим, что во всех узлах интерполяции функция

$$\varphi(x_k) = 0, \qquad k = 0,1,2,\ldots n$$

Возьмем некоторое значение $\tilde{x} \neq x_k$ и потребуем, чтобы

$$\varphi(\tilde{x}) = 0$$

Или $f(\tilde{x}) - L_n(\tilde{x}) - K\,\omega_n(\tilde{x}) = 0 \rightarrow \quad K = \frac{f(\tilde{x}) - L_n(\tilde{x})}{\omega_n(\tilde{x})}$

Таким образом, функция $\varphi(x)$ имеет (n+2) нуля, значит, $\varphi'(x) = 0$ в (n+1) точке, продолжая таким образом, $\varphi^{(n+1)}(x) = 0$ при одном значении $x = \beta$

Напомню, что $L_n(x) -$ многочлен степени $n \rightarrow L_n^{(n+1)}(x) = 0$

$\omega_n(x) -$ многочлен степени $n + 1 \rightarrow \; \omega_{n+1}^{(n+1)} = (n + 1)!$

Продифференцируем $\varphi(x)$ (n+1) раз и получим

$$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 - K\,(n + 1)!,$$

подставим $x = \beta$ и получим $K = \dfrac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n + 1)!}$

Приравняем два выражения для константы K

$$K = \frac{f(\tilde{x}) - L_n(\tilde{x})}{\omega_n(\tilde{x})} = \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}$$

Выразим погрешность интерполирования в точке $\tilde{x}$:

$$f(\tilde{x}) - L_n(\tilde{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}\ \omega_n(\tilde{x})$$

Оценим сверху

$$|f(\tilde{x}) - L_n(\tilde{x})| \le \frac{\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}\ |\omega_n(\tilde{x})|$$

Пример

Для функции $\boldsymbol{f(x) = sin(\pi x)}$ построить ИМ Лагранжа по узлам $\boldsymbol{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{1}{2}}$ и оценить погрешность интерполяции для $\boldsymbol{\tilde{x} = \frac{1}{3}}$

$$f_0 = 0, f_1 = \frac{1}{2}, f_2 = 1$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}\frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{6}-0)(\frac{1}{6}-\frac{3}{6})} + 1\ \frac{(x-0)(x-\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{3}{6}-\frac{1}{6})} = -9\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) + 6\left(x^2 - \frac{1}{6}x\right) = -3x^2 + \frac{7}{2}x$$

Выполним проверку $L_2(0) = 0$ $L_2\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{3}{36} + \frac{7}{12} = \frac{1}{2}$ $\quad L_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = 1$

Подставим $L_2\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{9} + \frac{7}{6} = \frac{5}{6} = \mathbf{0,8}(3)$ сравним с $f\left(\frac{1}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ≈0,866

$$\left|f\left(\frac{1}{3}\right) - L_2\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \mathbf{0,0}33$$

Теперь воспользуемся оценкой, полученной ранее

$$\left|f\left(\frac{1}{3}\right) - L_2\left(\frac{1}{3}\right)\right| \le \frac{\max\limits_{[0,1]}\left|sin^{(3)}(\pi x)\right|}{(3)!}\ \left|\left(\frac{1}{3}-0\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right| \le$$

$$\le \frac{\pi^3}{6}\frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\frac{1}{6} \approx \mathbf{0.0}478$$

Домашнее задание:

1) *Построить ИМ Лагранжа для таблицы значений из инд варианта*
2) *Составить тест для программы построения ИМ Ньютона*