Решение систем нелинейных уравнений

Рассмотрим систему из n нелинейных уравнений

$$F_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Запишем эту систему в векторной форме

$$\mathbf{F}\,\mathbf{x} = 0,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ — вектор неизвестных, $\mathbf{F} = (F_1(\mathbf{x}), \ldots, F_n(\mathbf{x}))$ — вектор-функция.

Прежде, чем пытаться решить систему из нелинейных уравнений, следует попытаться выяснить, имеет ли система решение и, если имеет, то сколько их.

Например, рассмотрим систему из двух уравнений с параметром $|\alpha| \leqslant 1$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 + \alpha = 0 \\ -x_1 + x_2^2 + \alpha = 0. \end{cases}$$

В зависимости от параметра α могут быть следующие случаи

- $\alpha = 1$ — решений нет;
- $\alpha = 1/4$ — одно решение: $x_1 = x_2 = 1/2$;
- $\alpha = 0$ — два решения: $x_1 = x_2 = 0$; $x_1 = x_2 = 1$;
- $\alpha = -1$ — четыре решения (найдите их).

Рассмотрим другой пример — система уравнений

$$\begin{cases} x_1\,\sin(\frac{\pi\,x_1}{2}) - 2\,x_2 = 0 \\ x_2^2 - x_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет счетное множество решений. В этом можно убедиться, построив графики нелинейных функций $y = \frac{1}{2}x\,\sin(\frac{\pi\,x}{2})$, $x = y^2 + 1$.

Эти примеры показывают необходимость исследования вопросов существования и единственности решений системы уравнений   Для этого нужно использовать все известные аналитические, графические, а иногда и асимптотические методы.

Далее мы будем предполагать, что решение существует и единственно. Наша задача состоит в описании различных методов, позволяющих уточнить решение с требуемой точностью.

Будем рассматривать итерационные численные методы. Центральное место среди итерационных методов решения занимает метод Ньютона.

Метод Ньютона

Если $\mathbf{x}^k$ — приближение к решению, то следующее приближение определяется по итерационной формуле метода Ньютона

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - [\mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)]^{-1}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}^k), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Здесь $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)$ обозначает матрицу производных, или **матрицу Якоби** отображения $\mathbf{F}$, а $[\mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)]^{-1}$ — обратную к ней матрицу.

Матрица Якоби имеет вид

$$W = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Хотя метод Ньютона привлекателен с теоретической точки зрения, его практическое применение затруднено тем, что на каждом шаге нужно вычислять матрицу $[\mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)]^{-1}$. Если число n уравнений велико и функции $F_1, F_2, \ldots F_n$ достаточно сложны, то вычисление элементов матрицы Якоби $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$ уже достаточно громоздко. Здесь, конечно, нужно использовать символьное дифференцирование (пакеты Maple, Matlab). Для нахождения обратной матрицы к матрице Якоби W можно воспользоваться формулой, известной из линейной алгебры

$$W^{-1} = \frac{W^*}{\det W} = \frac{1}{\det W}\begin{pmatrix} W_{11} & W_{21} & \ldots & W_{n1} \\ W_{12} & W_{22} & \ldots & W_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ W_{1n} & W_{2n} & \ldots & W_{nn} \end{pmatrix}$$

где W^* — присоединенная матрица. Получается она транспонированием матрицы, состоящей из алгебраических дополнений матрицы W

$$W_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij},$$

где M_{ij} — минор элемента $w_{ij} = \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$.

Для матрицы второго порядка обратная матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};\ A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Алгоритм метода Ньютона можно представить следующим образом:

1. Задать начальное приближение $\mathbf{x}^0$.
2. Вычислить $\mathbf{F}(\mathbf{x}^0)$ и найти $[\mathbf{F}'(\mathbf{x}^0)]^{-1}$.
3. Вычислить итерации $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - [\mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)]^{-1}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}^k), \quad k = 0, 1, \ldots m-1$
4. Вычислить $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|$ — норму разности двух соседних итераций.
5. Если $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| < eps$, то решение найдено.

[1]Норма может быть вычислена как $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{k+1} - x_i^k)^2}$.

Чтобы не обращать матрицу Якоби, можно на каждой итерации метода решать систему линейных уравнений относительно поправок $\boldsymbol{y}^k$ к решению:

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)\mathbf{y}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^k), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

$$\mathbf{y}^k = \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{y}^k + \mathbf{x}^k$$

с матрицей коэффициентов — $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^k)$.

Третьей и наиболее серьезной трудностью при использовании метода Ньютона является возможная расходимость метода при взятом начальном приближении. Локальная теорема о сходимости метода Ньютона гарантирует сходимость, если $\mathbf{x}^0$ «достаточно близко» находится от точного решения $\mathbf{x}_*$. Одно из средств преодоления этой трудности заключается в том, чтобы при поиске начального приближения использовать любую дополнительную (графическую, физическую и др.) информацию о задаче.

Метод Ньютона для системы из 2 нелинейных уравнений

Рассмотрим систему двух нелинейных уравнений относительно двух неизвестных x_1 и x_2

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2) = 0 \\ F_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Матрица Якоби в этом случае примет вид

$$W = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Обратная к матрице Якоби матрица определяется легко и имеет вид

$$W^{-1} = \frac{W^*}{\det W} = \frac{1}{\det W} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

$$\det W = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$$

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k - \frac{1}{\det W} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k - \frac{1}{\det W} \begin{pmatrix} F_1 \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} - F_2 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ F_2 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} - F_1 \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

$$x_1^{k+1} = x_1^k - \frac{\begin{vmatrix} F_1 & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ F_2 & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}}$$

$$x_2^{k+1} = x_2^k - \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & F_1 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & F_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}}$$

$$a * b - c * d = \begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_2} F_1 - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} F_2 = \begin{vmatrix} F_1 & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ F_2 & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

$$-\frac{\partial F_2}{\partial x_1} F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} F_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & F_1 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & F_2 \end{vmatrix}$$

Расчетные итерационные формулы метода Ньютона в этом случае записываются в виде

$$x_1^{k+1} = x_1^k - \frac{1}{\det W}\left(F_1\frac{\partial F_2}{\partial x_2} - F_2\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)\bigg|_{x_1=x_1^k, x_2=x_2^k}$$

$$x_2^{k+1} = x_2^k - \frac{1}{\det W}\left(F_2\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - F_1\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right)\bigg|_{x_1=x_1^k, x_2=x_2^k}$$

Здесь все функции и частные производные, а также значение определителя матрицы Якоби D вычисляются для x_1^k, x_2^k.

Заметим, что расчетные формулы более легко запоминаются в виде, напоминающем расчетные формулы метода Крамера

$$x_1^{k+1} = x_1^k - \frac{1}{\det W}\begin{vmatrix} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}_{x_1=x_1^k, x_2=x_2^k}$$

$$x_2^{k+1} = x_2^k - \frac{1}{\det W}\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & F_1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & F_2 \end{vmatrix}_{x_1=x_1^k, x_2=x_2^k}$$

Взяв некоторое начальное приближение (x_1^0, x_2^0), по расчетным формулам находим (x_1^1, x_2^1), затем (x_1^2, x_2^2) и т.д. На практике итерационный процесс продолжается до тех пор, пока норма разности $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| < \varepsilon$, где ε — требуемая точность корня[1].

---

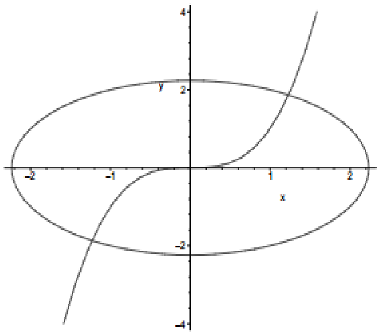
[1]Норма может быть вычислена как $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{k+1} - x_i^k)^2}$.

Приведем пример уточнения корня системы из двух нелинейных уравнений.

Пример *Отделите корни системы нелинейных уравнений и уточните один из них методом Ньютона с точностью* 0.01.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = x^3 \end{cases}$$

Решение. *Построим графики функций.* $x^2 + y^2 = 5$ — *уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом* $\sqrt{5}$. $y = x^3$ — *уравнение кубической параболы с точкой перегиба в* $(0, 0)$.



.. Поиск точек пересечения графиков двух функций

По графику видно,что эта система нелинейных уравнений имеет два корня, локализованных в прямоугольниках $[1,2]\times[1,2]$, $[-2,-1]\times[-2,-1]$.

Уточним корень в первой координатной четверти. Перепишем систему, перейдя к обозначениям $x \to x_1$, $y \to x_2$. *Получаем*

$$F_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 5$$

$$F_2(x_1, x_2) = x_2 - x_1^3$$

Выберем начальное приближение из области локализации корня $x_1^{(0)} = 1$, $x_2^{(0)} = 1$. *Найдем производные на матрицы Якоби — матрицу производных.*

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 2x_1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 2x_2; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = -3x_1^2; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 1$$

Построим матрицу Якоби

$$W(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ -3x_1^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Применим метод Ньютона для расчета следующих приближений к корням системы нелинейных уравнений:

$$x_1^1 = x_1^0 - \frac{\begin{vmatrix} (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 - 5 & 2\,x_2^0 \\ x_2^0 - (x_1^0)^3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x_1^0 & 2x_2^0 \\ -3\,(x_1^0)^2 & 1 \end{vmatrix}} = 1 - \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= 1 - \frac{-3}{8} = \frac{11}{8} = 1{,}375$$

$$x_2^1 = x_2^0 - \frac{\begin{vmatrix} 2x_1^0 & (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 - 5 \\ -3\,(x_1^0)^2 & x_2^0 - (x_1^0)^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x_1^0 & 2x_2^0 \\ -3\,(x_1^0)^2 & 1 \end{vmatrix}} = 1 - \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{8}$$

$$= 1 - \frac{-9}{8} = \frac{17}{8} = 2.125$$

Найдем норму разности

$$\|\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^0\| = \sqrt{(x_1^1 - x_1^0)^2 + (x_2^1 - x_2^0)^2} = \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{81}{64}} = \sqrt{\frac{45}{32}}$$

$$\approx 1.186$$