Методы приближенного вычисления определенного интеграла

Пусть требуется вычислить определенный интеграл вида

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx, b > a \qquad (1)$$

Если известна первообразная подынтегральной функции F(x), то интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Котеса

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (2)$$

Если нет первообразной функции, то приходится использовать методы приближенного вычисления определенного интеграла с помощью **квадратурных формул:**

$$I(f) \approx \sum c_k f(x_k)$$

Простейшие квадратурные формулы могут быть получены из геометрических соображений. Геометрическая интерпретация $I(f)$ – это площадь криволинейной трапеции, расположенной под графиком $y = f(x)$ между $x = a$ и $x = b$.

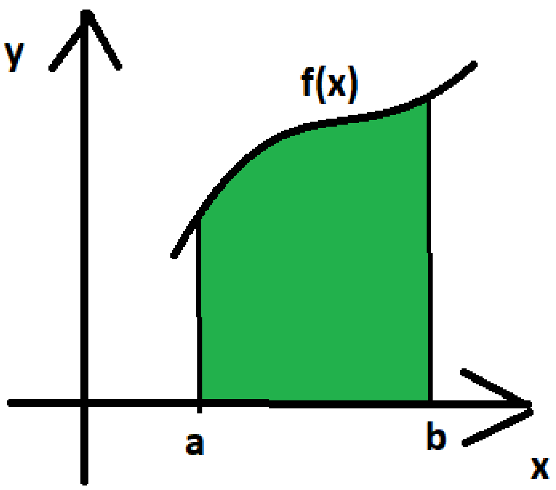


Рис.1

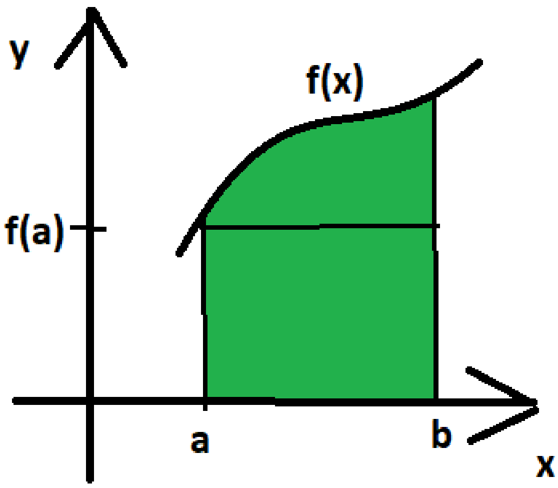


Рис.2

Заменим площадь криволинейной трапеции площадью прямоугольника высотой $f(a)$, получим

$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx f(a)(b-a)$ (3) – простая квадратурная формула левых прямоугольников (ПКФЛП)

Если заменить площадью прямоугольника высотой $f(b)$, то получим

$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx f(b)(b-a)$ (4) - простая квадратурная формула правых прямоугольников (ПКФПП)

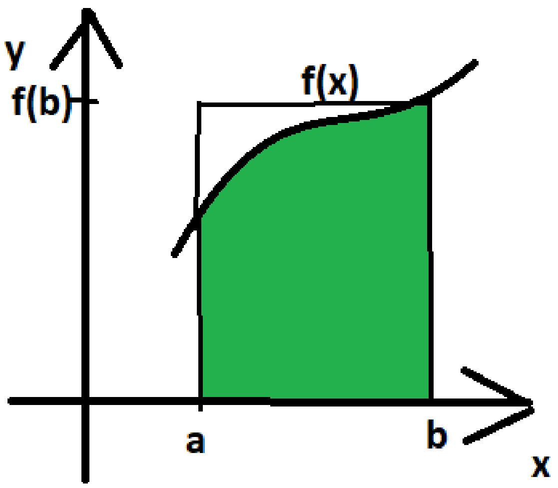


Рис.3

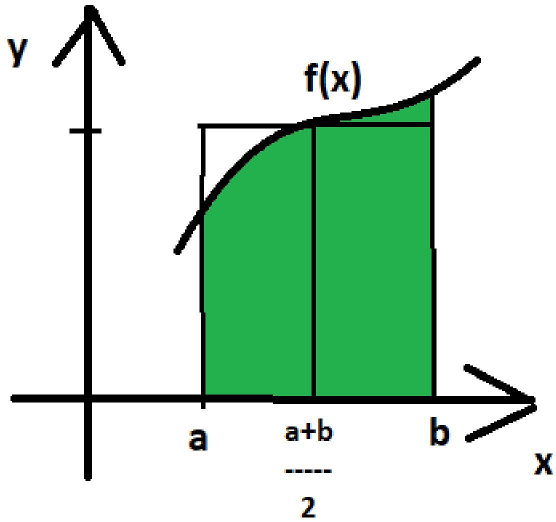
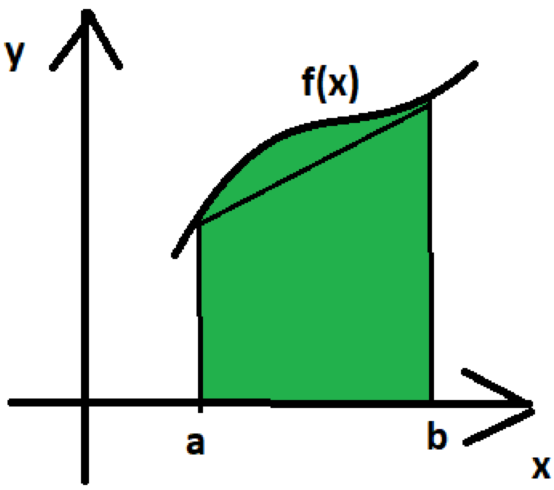


Рис.4

Если же построить прямоугольник по высоте, равной значению функции в середине отрезка $f(\frac{a+b}{2})$, то получим

$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$ (5) - простая квадратурная формула средних прямоугольников (ПКФСП)



Если же заменить площадь криволинейной трапеции площадью прямоугольной трапеции, то получим

$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$ (6) - простая квадратурная формула трапеций (ПКФТР)

Заметим, что ПКФЛП или ПКФПП получаются, если подынтегральную функцию заменить константой $f(a)$ или $f(b)$. ПКФТР получится, если заменить подынтегральную функцию ее линейной аппроксимацией-интерполяционным многочленом первой степени.

Таким образом, на приведенных примерах видно, что одним из способов вычисления приближенного значения интеграла является замена функции ее приближенными значениями, например, интерполяционным многочленом, построенным по узлам из отрезка $[a, b]$.

Действительно, построим интерполяционный многочлен Лагранжа по двум узлам $x = a, x = b$

$$f(x) \approx L_1(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

Приближенное значение интеграла будем находить

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_1(x)dx = \frac{f(a)}{a-b}\int_a^b (x-b)dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)dx =$$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\,\frac{(x-b)^2}{2}\,\Big|_a^b + \frac{f(b)}{b-a}\,\frac{(x-a)^2}{2}\,\Big|_a^b = \frac{f(a)(b-a)}{2} + \frac{f(b)(b-a)}{2}$$

Получена ПКФТР.

Таким образом, различные квадратурные формулы можно строить с помощью замены подынтегральной функции ее интерполяционным многочленом

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\int_a^b \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}\,dx$$

Рассмотрим случай $n = 2$, когда $f(x)$ заменяется интерполяционным многочленом, построенным по трем узлам

$x_0 = a$	$x_1 = \frac{a+b}{2}$	$x_2 = b$
$f(x_0) = f(a)$	$f(x_1) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	$f(x_2) = f(b)$

$$L_2(x) = f(a)\frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)} + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}$$

$$+ f(b)\frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{(b-a)(b-\frac{a+b}{2})} =$$

$$= \frac{2f(a)}{(a-b)^2}\ \frac{2f(a)}{(a-b)^2} - \frac{4f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^2}\ (x-a)(x-b)$$

$$+\ \frac{2f(b)}{(b-a)^2}\ (x-a)(x-\frac{a+b}{2})$$

Проинтегрируем интерполяционный многочлен и получим простую квадратурную формулу Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_2(x)dx = \frac{2f(a)}{(a-b)^2}\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)dx -$$

$$-\ \frac{4f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^2}\ \int_a^b (x-a)(x-b)dx +\ \frac{2f(b)}{(b-a)^2}\ \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-a)dx =$$

$$1{,}2 \text{ группы} \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)dx = \frac{1}{12}(b-a)^3$$

$$3,4 \text{ группы } \int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

$$= \ \int_a^b x^2dx - (a+b)\int_a^b xdx + ab\int_a^b 1dx =$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3} - (a+b)\frac{b^2-a^2}{2} + ab(b-a) = \frac{(a-b)^3}{6}$$

$$5,6 \text{ группы } \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-a)dx = \int_a^b x^2dx - (\frac{a+b}{2}+a)\int_a^b xdx +$$

$$+\ \frac{(a+b)a}{2}\int_a^b 1\ dx =$$

$$\frac{b^3-a^3}{3} - \frac{(3a+b)(b^2-a^2)}{4} + \frac{(a+b)a(b-a)}{2} =$$

$$= \frac{b-a}{12}\big(4(b^2+ab+a^2) - 3(3a+b)(b+a) + 6(a^2+ba)\big) =$$

$$= \frac{b-a}{12}(b^2 - 2ab + a^2) = \frac{(b-a)^3}{12}$$

$$= \frac{1}{6} f(a)(b-a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{6} f(b)(b-a)$$

Получена простая КФСимпсона.

Замечание: Сумма коэффициентов при значениях функции*(b-a) =1

Составные квадратурные формулы

Чтобы управлять точностью приближенного интегрирования, используют составные квадратурные формулы, результат применения которых зависит от n — числа разбиений исходного отрезка интегрирования.

$\boldsymbol{x_0}$ $\boldsymbol{x_1}$ $\boldsymbol{x_n}$

Разобьем отрезок интегрирования $[a, b]$ на n частей и обозначим концы отрезков x_i:

$$x_i = a + i\,h, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, \ldots n$$

Для каждого интеграла на отрезке длины h применяется простая квадратурная формула и результат сложения называется составной квадратурной формулой.

Составная квадратурная формула левых прямоугольников

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx$$

$$\approx f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_1 - x_0) + \cdots f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Составная квадратурная формула правых прямоугольников

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx$$

$$\approx f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \cdots f(x_n)(x_n - x_{n-1}) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Составная квадратурная формула средних прямоугольников

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx$$

$$\approx f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)(x_1 - x_0) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)(x_1 - x_0)$$

$$+ \cdots f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right)(x_n - x_{n-1}) = h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$

Составная квадратурная формула трапеций

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}(x_1 - x_0) + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}(x_2 - x_1)$$

$$+ \cdots \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}(x_n - x_{n-1})$$

$$= \frac{h}{2}\big(f(x_0) + f(x_n)\big) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

Составная квадратурная формула Симпсона (четное число разбиений)

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx$$

$$\approx \big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big)\frac{(x_2 - x_0)}{6} + \big(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\big)\frac{(x_4 - x_2)}{6}$$

$$+ \cdots (f\big(x_{2n-2} + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\big)\frac{(x_{2n} - x_{2n-2})}{6} =$$

$$= \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + f(x_{2n})\big);\ h = \frac{b - a}{2n}$$

Примеры применения КФ:

Найдем значение определенного интеграла по квадратурной формуле трапеций, Симпсона и средних прямоугольников для $n = 4$

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{2}{3} = 0,(6)$$

Возьмем $n = 4$ *, разобьем отрезок интегрирования на 4 части и обозначим*

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4}, \qquad x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}; x_2 = \frac{2}{4}; x_3 = \frac{3}{4}; x_4 = 1$$

По квадратурной формуле средних прямоугольников

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx \approx h\,(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) + f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right)\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{\frac{3}{8}} + \sqrt{\frac{5}{8}} + \sqrt{\frac{7}{8}}) \approx 0.6730$$

По квадратурной формуле трапеций

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx \approx \frac{h}{2}\big(f(x_0) + f(x_4)\big) + h\,\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big) =$$

$$= \frac{1}{8}\big(\sqrt{0} + \sqrt{1}\big) + \frac{1}{4}(\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{2}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}}) \approx 0.6432$$

По квадратурной формуле Симпсона

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))$$

$$\frac{1}{12}(\sqrt{0} + 4\sqrt{\frac{1}{4}} + 2\sqrt{\frac{2}{4}} + 4\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{1}) \approx 0.6565$$

Вопрос: При n=4 самой точной оказалась какая КФ ?