МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича

В. М. Шутько, П. А. Лапина

Кинематика точки

Учебное пособие

по дисциплине
«Теоретическая механика»
для студентов, обучающихся по направлениям
«Механика и математическое моделирование»
и «Математика»

Ростов-на-Дону – Таганрог
Издательство Южного федерального университета
2017

УДК 531.12(075.8)

ББК 22.21я73

Ш978

Печатается по решению кафедры теории упругости, ученого совета Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета

Рецензенты:

зав. кафедрой теоретической и компьютерной гидроаэродинамики ЮФУ, доктор физико-математических наук, профессор *М. А. Сумбатян*;

зав. кафедрой теоретической и прикладной механики ДГТУ, доктор физико-математических наук, профессор *А. Н. Соловьев*

Шутько, В. М.

Ш978 Кинематика точки : учебное пособие / В. М. Шутько, П. А. Лапина ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2017. – 106 с.

ISBN 978-5-9275-2575-1

Учебное пособие содержит решения наиболее показательных задач раздела «Кинематика точки» дисциплины «Теоретическая механика».

В каждом модуле изложены основные теоретические положения, затем следуют условия задач и анализ их решений.

Является учебным материалом для студентов бакалавриата Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета.

УДК 531.12(075.8)
ББК 22.21я73

ISBN 978-5-9275-2575-1

Оглавление

Введение

Учебное пособие по дисциплине «теоретическая механика» к разделу «кинематика точки» предназначено для студентов направлений «механика и математическое моделирование» и «математика» Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета, а также может быть рекомендовано для студентов технических специальностей вузов. Пособие разработано с целью облегчить студентам усвоение теоретического и практического материала на наиболее показательных примерах. Важность раздела «кинематика точки» в курсе теоретической механики обусловлена тем, что знания, полученные студентами при изучении этого раздела, являются базовыми при освоении следующих разделов дисциплины: динамики материальной точки, динамики системы материальных точек, динамики твердого тела. Проанализированные в пособии задачи помогут студентам подготовиться к самостоятельной работе, в том числе к выполнению индивидуальных заданий.

Настоящее издание состоит из нескольких модулей, освещающих следующие темы: траектория и уравнения движения точки, скорость точки, ускорение точки, сложное движение точки. В начале каждого модуля кратко излагаются основные теоретические положения и приводятся основные соотношения, затем подробно разбираются решения типичных задач. По каждой теме студентам предложены задачи для самостоятельного решения с целью закрепления пройденного материала.

Тексты условий и номера задач в основном соответствуют сорок восьмому изданию (2008) сборника задач по теоретической механике И. В. Мещерского [1]. При решении задач из этого сборника указывается только номер задачи. В остальных случаях приводится ссылка на источник.

В ***теоретической механике*** изучается одна из форм движения материи – механическое движение, состоящее в том, что тела изменяют с течением времени свое положение в пространстве по отношению к другим телам. Принято разделять курс теоретической механики на две части: кинематику и кинетику.

Кинематика – это раздел теоретической механики, посвященный изучению движения с геометрической точки зрения, без учета причин (сил), вызывающих изменение движения. Таким образом, в кинематике рассматривается изменение положения тел относительно некоторой системы отсчета с учетом времени, за которое это изменение происходит.

Кинетика посвящена изучению движения тел в зависимости от факторов, обуславливающих закон рассматриваемого движения.

Кинематика точки

1. Траектория и уравнения движения точки

Задать движение точки означает определить ее положение в любой момент времени t относительно некоторой системы отсчета.

Непрерывная кривая, представляющая собой геометрическое место положений точки при ее движении, называется ***траекторией точки***.

Способы задания движения точки:

1. Положение точки можно задать радиус-вектором точки (рис. 1.1)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1.1}$$

или тремя скалярными параметрами (координатами точки)

$$x_i = x_i(t), \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.2}$$

Уравнения (1.1) и (1.2) являются *уравнениями движения точки* в векторной и координатной формах соответственно. Одновременно эти соотношения являются *уравнениями траектории точки* в параметрической форме. Уравнения траектории в координатной форме можно получить, исключив из соотношений (1.2) параметр времени t.

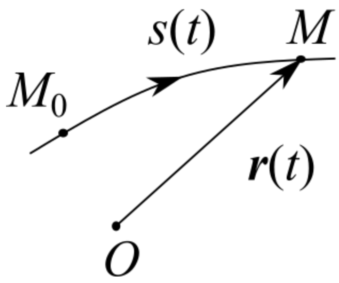

Рис. 1.1

2. Положение точки можно также определить, задав траекторию точки и закон движения по ней, например, в виде зависимости от времени длины дуги $s(t)$, отсчитываемой от некоторого выбранного начала M_0 в заданном направлении вдоль траектории (рис. 1.1).

Путь l, пройденный точкой при перемещении из положения M_1 в положение M_2 за промежуток времени $t_2 - t_1$, совпадает с расстоянием $|s(t_2) - s(t_1)|$ между положениями M_2 и M_1 на траектории, если движение точки происходит только в одном направлении. Тогда

$$l = \left| \int_{t_1}^{t_2} ds \right|. \tag{1.3}$$

Закон движения точки $s(t)$ может быть получен из уравнений движения (1.2) в случае ортогональной криволинейной системы координат с помощью соотношения

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} H_i^2 dx_i^2 , \tag{1.4}$$

(здесь H_i – параметры Ляме) и последующего интегрирования.

Рассмотрим различные системы координат [2].

1. ***Декартова*** система координат:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z,$$
$$H_1 = H_2 = H_3 = 1, \tag{1.5}$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

2. ***Цилиндрическая*** система координат:

$$x_1 = \rho, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = z,$$
$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1, \tag{1.6}$$
$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Связь с декартовой системой (рис. 1.2):

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \tag{1.7}$$

Отметим, что ***полярная*** система координат есть частный случай цилиндрической при $z = 0$.

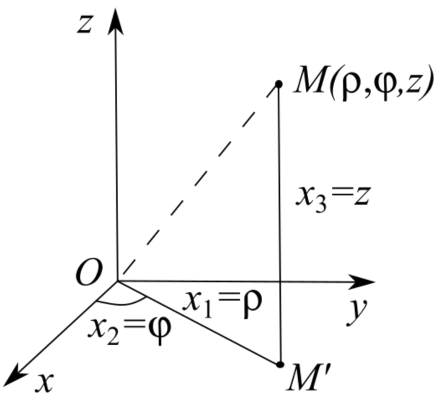

Рис. 1.2

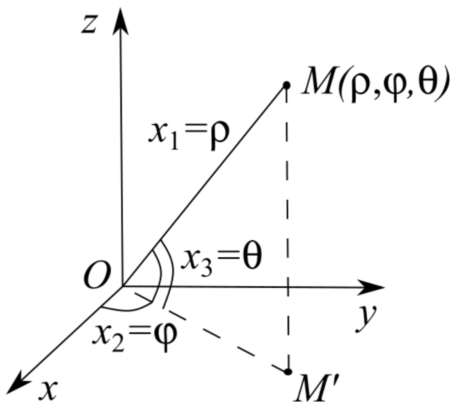

Рис. 1.3

3. ***Сферическая*** система координат:

$$x_1 = \rho, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = \theta,$$
$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho\cos\theta, \quad H_3 = \rho, \tag{1.8}$$
$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\cos^2\theta d\varphi^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

Связь с декартовой системой (рис. 1.3)

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\sin\theta. \tag{1.9}$$

Ниже приведены решения задач из § 10 задачника [1].

Задача 1.1 (10.4 (2))

По заданным уравнениям движения точки $x = 3\sin t, \quad y = 3\cos t$ найти уравнение ее траектории, а также указать закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.

Решение

Уравнение траектории точки получим, исключив параметр времени t из уравнений движения:

$$x^2 + y^2 = 9(\sin^2 t + \cos^2 t),$$

т. е. траектория есть окружность с центром в начале координат и радиусом $R = 3$ (рис. 1.4):

$$x^2 + y^2 = 9. \tag{1.10}$$

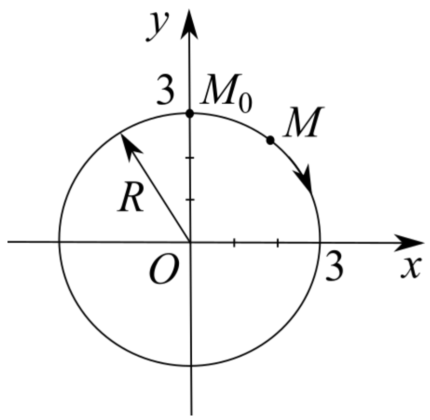

Рис. 1.4

В начальный момент времени при $t = 0$ точка находилась в положении M_0 $(x_0 = 0, y_0 = 3)$. Функции $x(t)$ и $y(t)$ периодические с периодом $T = 2\pi$. Рассмотрим первую четверть периода $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, здесь функция $x(t)$ возрастает, а $y(t)$ убывает, таким образом, движение точки по окружности происходит по направлению часовой стрелки.

Определим закон движения точки, отсчитывая длину дуги от положения M_0. Для этого воспользуемся соотношением (1.4)

$$ds^2 = (3\cos t dt)^2 + (-3\sin t dt)^2 = 9dt^2$$

или после упрощения

$$ds = 3dt.$$

Проинтегрируем:

$$s = 3t + C.$$

Константу интегрирования найдем из условия, что при $t = 0$ точка M находилась в положении $M_0(s = 0)$: $s\big|_{t=0} = 0 = 3 \cdot 0 + C$, отсюда получаем $C = 0$. Таким образом, закон движения точки

$$s = 3t. \tag{1.11}$$

Поскольку точка перемещается только в одном направлении, путь точки l также пропорционален времени: $l = 3t$.

Задача 1.2 (10.6)

Движение точки, описывающей фигуру Лиссажу, задается уравнениями $x = 3\sin t$, $y = 2\cos 2t$ (t – в секундах). Найти уравнение траектории, вычертить ее и указать направление движения точки в различные моменты времени. Указать также ближайший после начала движения момент времени t_1, когда траектория пересечет ось Ox.

Решение

Решение этой задачи произведем аналогично решению задачи 1.1. Предварительно преобразуем уравнения движения:

$$\frac{x}{3} = \sin t,$$

$$\frac{y}{2} = (1 - 2\sin^2 t).$$

Тогда уравнение траектории примет вид

$$y = 2\left(1 - 2\left(\frac{x}{3}\right)^2\right).$$

Преобразуем его к более удобному виду:

$$y - 2 = -\frac{4}{9}x^2. \qquad (1.12)$$

Это парабола с осью симметрии Oy, с вершиной в точке $M_0(x_0 = 0,\ y_0 = 2)$ и ветвями, направленными вниз. Из уравнения движения точки (ввиду ограниченности области изменения тригонометрических функций $|\sin t| \le 1,\ \ |\cos 2t| \le 1$) следует, что точка может перемещаться только по части параболы, ограниченной прямоугольником $|x| \le 3,\ \ |y| \le 2$ (рис. 1.5).

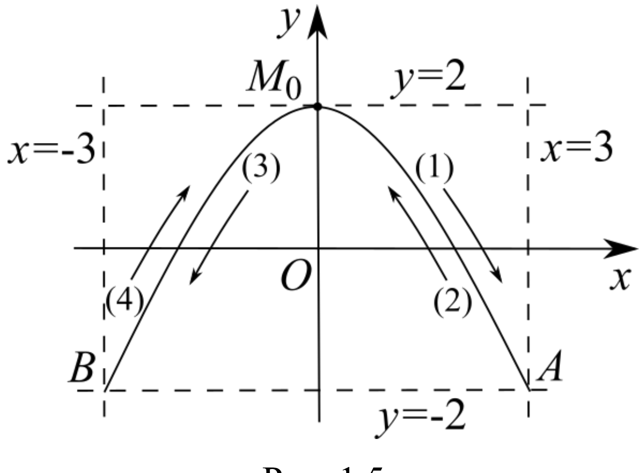

Рис. 1.5

Движение точки периодическое, период движения $T = 2\pi$ секунд (общий период для функций $x(t)$, $y(t)$). Изучим направление движения, для чего рассмотрим последовательно четыре промежутка времени, равные каждый четверти периода:

1) $0 < t < \frac{\pi}{2}$, функция $x(t)$ возрастает, функция $y(t)$ убывает, следовательно, точка движется по правой ветви параболы от положения M_0 к положению A;

2) $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, $x(t)$ убывает, $y(t)$ возрастает, точка движется по правой ветви параболы от A к M_0;

3) $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$, $x(t)$ убывает, $y(t)$ убывает, точка движется по левой ветви параболы от M_0 к B;

4) $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$, $x(t)$ возрастает, $y(t)$ возрастает, точка движется по левой ветви параболы от B к M_0.

В каждый последующий отрезок времени, равный 2π секунд, точка совершает описанное выше периодическое движение по дуге параболы.

На оси Ox точка окажется в каждый момент времени, удовлетворяющий условию $y = 0$, т. е. $\cos 2t = 0$, отсюда $t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Ближайший после начала движения такой момент времени:

$$t_1 = \frac{\pi}{4} \text{ с.} \qquad (1.13)$$

Задача 1.3 (10.12)

Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Длина $OA = OB = 80$ см. Найти уравнения движения и траекторию средней точки M шатуна, а также уравнение движения ползуна B, если в начальный момент времени ползун находился в крайнем правом положении; оси координат указаны на рис. 1.6.

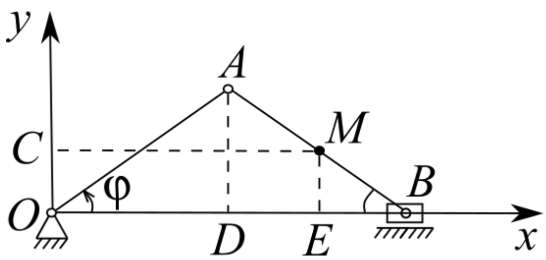

Рис. 1.6

Решение

Плоский механизм состоит из двух стержней. Кривошип OA закреплен с помощью неподвижного шарнира в точке O и вращается в плоскости Oxy с постоянной угловой скоростью ω рад/с, следовательно, через t секунд угол между кривошипом OA и осью Ox будет равен $\varphi = \omega t$ рад (здесь учтено, что $\varphi(0) = 0$).

Шатун AB движется в плоскости Oxy так, что его конец B все время остается на оси Ox. Поскольку $|OA| = |AB|$, то острый угол между AB и осью Ox тоже равен $\varphi = \omega t$ рад.

По условию задачи траекторией ползуна B является прямая $y = 0$; уравнение движения ползуна получим, выразив координату x_B как функцию времени. Из ΔOAB имеем

$$x_B = |OB| = |OD| + |DB| = |OA|\cos\varphi + |AB|\cos\varphi = \left(|OA| + |AB|\right)\cos\varphi, \qquad (1.14)$$

тогда, используя данные задачи, вычисляем

$$x_B = 160\cos 10t \text{ см.} \tag{1.15}$$

С целью составления уравнений движения точки M рассмотрим ее координаты

$$\begin{gathered} x_M = |OE| = |OD| + |DE| = |OA|\cos\varphi + |AM|\cos\varphi = \left(|OA| + |AM|\right)\cos\varphi, \\ y_M = |OC| = |MB|\sin\varphi, \end{gathered} \tag{1.16}$$

или, подставляя численные значения, получаем

$$\begin{gathered} x_M = 120\cos 10t \text{ см,} \\ y_M = 40\sin 10t \text{ см.} \end{gathered} \tag{1.17}$$

Траектория точки M есть эллипс с полуосями 120 см (по оси Ox) и 40 см (по оси Oy), так как

$$\left(\frac{x_M}{120}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{40}\right)^2 = 1. \tag{1.18}$$

Начальное положение точки при $t = 0$ – $M_0(x_0 = 120, y_0 = 0)$.

Задача 1.4 (10.14)

Даны уравнения движения снаряда

$$\begin{gathered} x = (v_0\cos\alpha)\cdot t, \\ y = (v_0\sin\alpha)\cdot t - \frac{gt^2}{2}, \end{gathered} \tag{1.19}$$

где v_0 – начальная скорость снаряда, α – угол между $\boldsymbol{v}_0$ и горизонтальной осью x, g – ускорение силы тяжести. Определить траекторию движения снаряда, высоту H, дальность L и время T полета снаряда.

Решение

По условию, траектория полета снаряда – плоская кривая.

В задаче предполагается, что цель A находится на одном горизонтальном уровне с орудием, расположенным в точке O (рис. 1.7).

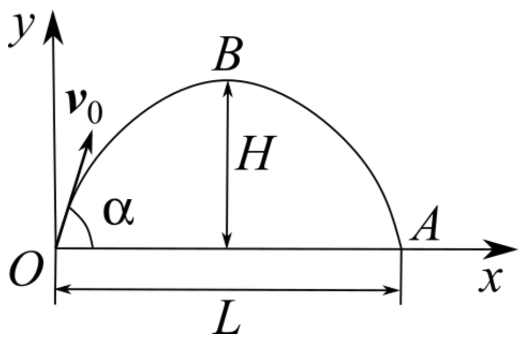

Рис. 1.7

Исключим из уравнений движения (1.19) параметр времени t. Из первого уравнения имеем

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}.$$

Подставим это выражение для времени t во второе уравнение:

$$y = (v_0 \sin\alpha) \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2,$$

после преобразований получим

$$y = x \cdot \mathrm{tg}\alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}. \tag{1.20}$$

Это есть парабола с осью симметрии, параллельной оси Oy, и ветвями направленными вниз.

В начальный момент времени $t = 0$ снаряд находится в начале координат $O\ (x_0 = 0, y_0 = 0)$. Перемещается снаряд по части параболы, ограниченной уровнем горизонтальной поверхности, т. е. $y \geq 0$ (рис. 1.7).

Наибольшая высота подъема снаряда H определится из условия, что в точке B $(y_B = H)$ функция $y(x)$ имеет максимум, т. е. $\frac{dy(x_B)}{dx} = 0$.

Обратимся к уравнению траектории (1.20), построим производную, получим уравнение для нахождения координаты x_B

$$tg\alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x_B = 0,$$

из него определяем x_B и подставляем в $y(x)$ для вычисления высоты H:

$$x_B = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g},$$

$$H = y(x_B) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \qquad (1.21)$$

Этот же результат для высоты подъема снаряда H получим, обратившись к уравнениям движения (1.19):

$$\frac{dy(t_B)}{dt} = 0,$$

$$v_0 \sin \alpha - g t_B = 0,$$

отсюда определяем время движения к точке B и высоту H полета

$$t_B = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \quad H = y(t_B) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Время полета снаряда T найдем из условия, что T – тот момент времени, когда снаряд попал в цель A, т. е. $y(T) = 0$. Второе уравнение движения (1.19) дает для T уравнение второй степени

$$\frac{gT^2}{2} - v_0 \sin \alpha \cdot T = 0.$$

Корень $T_1 = 0$ соответствует моменту вылета снаряда из точки O, второй корень

$$T_2 = T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \tag{1.22}$$

дает время полета снаряда T.

Подставим найденное значение T в первое уравнение движения (1.19) и определим дальность полета $L = |OA|$ (рис. 1.7):

$$L = x(T) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \tag{1.23}$$

Дальность полета снаряда L также можно найти, используя уравнение траектории (1.20). Точка A с координатами $x_A = L,\ \ y_A = 0$ должна удовлетворять уравнению (1.20):

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot L - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} L^2 = 0,$$

и так как $L \neq 0$, то получаем

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Теперь для определения T придется привлечь первое уравнение движения (1.19)

$$L = (v_0 \cos\alpha) \cdot T,$$

тогда находим

$$T = \frac{L}{v_0 \cos\alpha} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Значения H и L можно определить другим способом (из геометрических соображений), воспользовавшись тем, что вершина параболы есть точка B с координатами $x_B = \frac{L}{2}$, $y_B = H$. Уравнение параболы может быть представлено в виде

$$y - H = -k\left(x - \frac{L}{2}\right)^2, \quad k > 0.$$

Полученное выше уравнение траектории (1.20) преобразуем следующим образом:

$$y - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\left(x - \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2.$$

Следовательно, для H и L имеем

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}, \quad L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

что и было получено ранее (1.21), (1.23).

Задача 1.5 (10.15)

В условиях предыдущей задачи определить, при каком угле бросания α дальность полета L будет максимальной. Найти соответствующие высоту и время полета.

Решение

Воспользуемся результатами решения предыдущей задачи. Соотношения (1.21), (1.22), (1.23) дают H, T и L как функции угла α:

$$H(\alpha) = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g},\ T(\alpha) = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g},\ L(\alpha) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Найдем максимум $L(\alpha)$: $\frac{dL(\alpha^*)}{d\alpha} = 0$, т. е. $\frac{2v_0^2 \cos 2\alpha^*}{g} = 0$.

По смыслу задачи угол α – острый, так как α – угол наклона ствола орудия к горизонту, поэтому $\alpha^* = \dfrac{\pi}{4}$. При этом значении угла α для второй производной имеем

$$\frac{d^2L\left(\alpha^*\right)}{d\alpha^2} = -\frac{4v_0^2}{g} < 0,$$

следовательно, найден максимум функции $L(\alpha)$, т. е. дальность полета

$$L_{\max} = L\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0^2}{g}. \qquad (1.24)$$

Определяем соответствующие значения высоты и времени полета:

$$H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{v_0^2}{4g}, \qquad (1.25)$$

$$T\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\,v_0}{g}. \qquad (1.26)$$

Задача 1.6 (10.16)

В условиях задачи 1.4 определить угол бросания α, при котором снаряд попадает в точку A с координатами x и y. Рассмотреть отдельно случай расположения точки A на одном горизонтальном уровне с точкой вылета снаряда.

Решение

Воспользуемся результатами решения задачи 1.4, обратимся к уравнению (1.20):

$$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2,$$

в уравнении траектории заменим $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$, получим

$$y = \mathrm{tg}\alpha \cdot x - \frac{g(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{2v_0^2}x^2 .$$

Перепишем это соотношение как квадратное уравнение относительно $\mathrm{tg}\alpha$:

$$g\,x \cdot \mathrm{tg}^2\alpha - 2v_0^2 \cdot \mathrm{tg}\alpha + 2v_0^2\frac{y}{x} + g\,x = 0 ,$$

из него находим

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 2v_0^2 g\,y - g^2x^2}}{g\,x} . \tag{1.27}$$

Равенство (1.27) дает два значения острого угла α, при котором снаряд попадает в цель A с координатами $x,\ y$ (рис. 1.8).

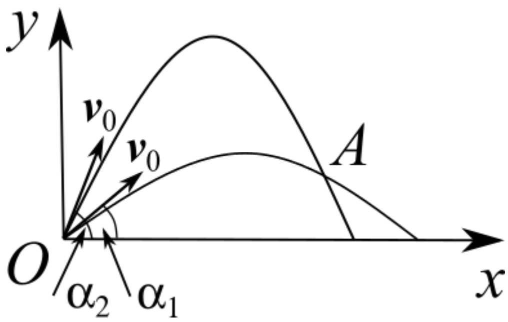

Рис. 1.8

Если цель A находится на одном горизонтальном уровне с орудием O, то $x_A = L$, $y_A = 0$, и для угла α получаем

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g^2L^2}}{g\,L} . \tag{1.28}$$

Легко проверить, что в этом случае $\text{tg}\alpha_1 \cdot \text{tg}\alpha_2 = 1$, т. е. $\text{tg}\alpha_2 = \text{ctg}\alpha_1$, $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{2} - \alpha_1$. Таким образом, для того, чтобы попасть в цель, находящуюся на одном горизонтальном уровне с орудием, можно расположить ствол орудия под углом α к горизонту или можно – под углом α к вертикали (рис. 1.9).

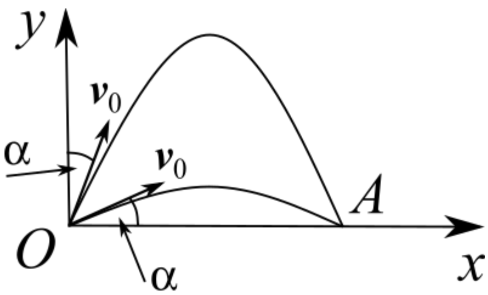

Рис. 1.9

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.7 (10.2)

По данным уравнениям движения точки найти уравнения ее траектории в координатной форме и указать на рисунке направление движения.

1. $x = 3t - 5,\ y = 4 - 2t$.

Ответ. Полупрямая $2x + 3t - 2 = 0$ с началом в точке $x = -5,\ y = 4$.

2. $x = 2t,\ y = 8t^2$.

Ответ. Правая ветвь параболы $y = 2x^2$ с началом в точке $x = 0,\ y = 0$.

3. $x = 5\sin 10t,\ y = 3\cos 10t$.

Ответ. Эллипс $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ с начальной точкой $x = 0,\ y = 3$.

4. $x = 2 - 3\cos 5t,\ y = 4\sin 5t - 1$.

Ответ. Эллипс $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$ с начальной точкой $x = -1,\ y = -1$.

5. $x = \operatorname{ch} t = \dfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}),\ y = \operatorname{sh} t = \dfrac{1}{2}(e^t - e^{-t})$.

Ответ. Верхняя часть правой ветви гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ с начальной точкой $x = 1,\ y = 0$.

Задача 1.8 (10.3)

Построить траекторию точки, радиус-вектор которой изменяется согласно уравнению ($\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{e}$ – постоянные заданные векторы, $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ – координатные орты).

1. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t \cdot \boldsymbol{e}$.

Ответ. Полупрямая, проходящая через начальную точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{e}$.

2. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \cos t \cdot \boldsymbol{e}$.

Ответ. Отрезок M_0M_1 прямой линии, проходящей через точку $M(\boldsymbol{r}_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{e}$. Начальная точка $M_0(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{e})$; вторая крайняя точка $M_1(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{e})$. При $t \to \infty$ конец радиус-вектора пройдет бесконечное число раз через каждую точку траектории.

3. $\boldsymbol{r} = a\cos\dfrac{\pi}{1+t^2}\boldsymbol{i} + b\sin\dfrac{\pi}{1+t^2}\boldsymbol{j}$.

Ответ. Отрезок верхней части эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Точка начинает движение от левой вершины эллипса, монотонно приближаясь к его правой вершине.

Задача 1.9 (10.4)

По заданным уравнениям движения точки найти уравнение ее траектории, а также указать закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.

1. $x = 3t^2$, $y = 4t^2$.

Ответ. Полупрямая $4x - 3y = 0$; $s = 5t^2$.

3. $x = a\cos^2 t$, $y = a\sin^2 t$.

Ответ. Отрезок прямой $x + y - a = 0$, причем $0 \le x \le a$; $s = a\sqrt{2}\sin^2 t$.

4. $x = 5\cos 5t^2$, $y = 5\sin 5t^2$.

Ответ. Окружность $x^2 + y^2 = 25$; $s = 25t^2$.

Задача 1.10 (10.5)

Мостовой кран движется вдоль мастерской согласно уравнению $x = t$; по крану катится в поперечном направлении тележка согласно уравнению $y = 1{,}5t$ (x и y – в метрах, t – в секундах). Цепь укорачивается со скоростью $v = 0{,}5$ м/с. Определить траекторию центра тяжести груза; в начальном положении центр тяжести груза находился в горизонтальной плоскости Oxy; ось Oz направлена вертикально вверх.

Ответ. Траектория – прямая; $y = 1{,}5x$; $z = 0{,}5x$.

Задача 1.11 (10.10)

Определить траекторию точки, совершающей одновременно два гармонических колебания равной частоты, но разных амплитуд и фаз, если колебания происходят по двум взаимно перпендикулярным осям: $x = a\sin(kt + \alpha)$, $y = b\sin(kt + \beta)$.

Ответ. Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{2xy}{ab}\cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta)$.

Задача 1.12 (10.11)

Найти уравнение траектории движения точки, получающегося при сложении взаимно перпендикулярных колебаний разной частоты:

1. $x = a\sin 2\omega t$, $y = a\sin \omega t$.

Ответ. $x^2 a^2 = 4y^2\left(a^2 - y^2\right)$;

2. $x = a\cos 2\omega t$, $y = a\cos \omega t$.

Ответ. $2y^2 - ax - a^2 = 0$, причем $|x| \le a$, $|y| \le a$.

Задача 1.13 (10.13)

Определить уравнения движения и траекторию точки обода колеса радиуса $R = 1$ м автомобиля, если автомобиль движется по прямолинейному пути с постоянной скоростью 20 м/с. Принять, что колесо катится без скольжения; за начало координат взять начальное положение точки на пути, принятом за ось Ox.

Ответ. Циклоида $x = 20t - \sin 20t$, $y = 1 - \cos 20t$.

Задача 1.14 (10.18)

Точка движется по винтовой линии

$$x = a\cos kt,\ y = a\sin kt,\ z = vt.$$

Определить уравнения движения точки в цилиндрических координатах.

Ответ. $r = a$, $\varphi = kt$, $z = vt$.

Задача 1.15 (10.19)

Даны уравнения движения точки:

$$x = 2a\cos^2\left(\frac{kt}{2}\right),\ y = a\sin kt,$$

где a и k – положительные постоянные. Определить траекторию и закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.

Ответ. Окружность $(x-a)^2 + y^2 = a^2$; $s = akt$.

Задача 1.16 (10.20)

В условиях задачи 1.15 (10.19) определить уравнения движения точки в полярных координатах.

Ответ. $r = 2a\cos\left(\frac{kt}{2}\right)$; $\varphi = \frac{kt}{2}$.

Задача 1.17 (10.21)

По заданным уравнениям движения точки в декартовых координатах

$$x = R\cos^2\frac{kt}{2},\quad y = \frac{R}{2}\sin kt,\quad z = R\sin\frac{kt}{2}$$

найти ее траекторию и уравнения движения в сферических координатах.

Ответ. Линия пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$. Уравнения движения в сферических координатах: $r = R$, $\varphi = \frac{kt}{2}$, $\theta = \frac{kt}{2}$.

2. Скорость точки

Скоростью точки называется векторная величина

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}(t). \tag{2.1}$$

Вектор скорости точки $\boldsymbol{v}$ направлен по касательной к траектории, поэтому если известна траектория движения точки и закон движения по ней $s(t)$, то

$$\boldsymbol{v} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}, \tag{2.2}$$

здесь $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор, направленный по касательной к траектории. Следовательно, величина скорости как скаляр есть

$$v = \dot{s}. \tag{2.3}$$

Проекции вектора скорости на оси ортогональной криволинейной системы координат [2]

$$v_i = H_i \frac{dx_i}{dt} = H_i \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.4}$$

В декартовой системе координат имеем

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}. \tag{2.5}$$

В цилиндрической системе координат получаем

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}. \tag{2.6}$$

В сферической системе координат определяем

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\cos\theta\dot{\varphi}, \quad v_\theta = \rho\dot{\theta}. \tag{2.7}$$

Абсолютная величина скорости (2.3) может быть выражена через проекции вектора

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} H_i^2 \dot{x}_i^2}\ , \tag{2.8}$$

а косинусы углов между проекциями $\boldsymbol{v}$ на оси координат и самим вектором скорости $\boldsymbol{v}$ (направляющие косинусы) выражаются следующим образом:

$$\cos\gamma_i = \frac{v_i}{|\boldsymbol{v}|}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.9}$$

Изменение площади σ, описываемой радиус-вектором точки $\boldsymbol{r}$, характеризуется **секторной скоростью** $\boldsymbol{v}_\sigma$ (рис. 2.1):

$$2\boldsymbol{v}_\sigma = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\,. \tag{2.10}$$

Годографом скорости называют кривую, которую будет описывать конец вектора $\boldsymbol{v}(t)$, если его все время откладывать от общего начала (рис. 2.2). Заметим, что годографом радиус-вектора точки $\boldsymbol{r}(t)$ является траектория точки (рис. 2.1).

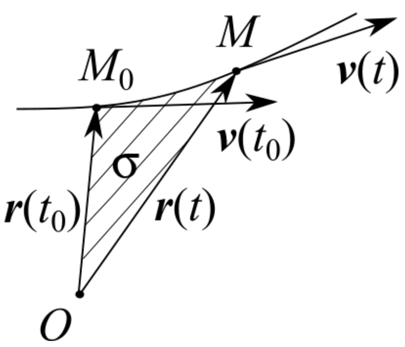

Рис. 2.1

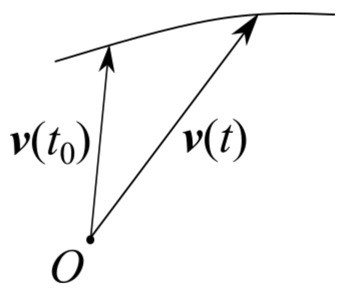

Рис. 2.2

Рассмотрим частный случай движения точки – прямолинейное движение точки вдоль оси Ox. Уравнение движения $x = x(t)$, вектор скорости направлен по этой же прямой, $v = v_x = \dot{x}(t)$. Если точка движется с постоянной скоростью (равномерно) $v = v_0 = \mathrm{const}$, то $\dot{x}(t) = v_0$, тогда имеем дифференциальное уравнение

$$dx = v_0 dt.$$

Интегрируя, получаем линейный закон движения точки

$$x(t) = v_0 t + x_0, \tag{2.11}$$

где x_0 – координата начального положения точки при $t = 0$.

Рассмотрим решения задач из § 11 задачника [1].

Задача 2.1 (11.4)

Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти скорость середины M шатуна кривошипно-ползунного механизма и скорость ползуна B в зависимости от времени, если $|OA| = |AB| = a$ (задача 1.3).

Решение

Воспользуемся результатами (1.14), (1.16) решения задачи 1.3:

$$x_M = \frac{3a}{2}\cos\omega t, \quad y_M = \frac{a}{2}\sin\omega t,$$

$$x_B = 2a\cos\omega t.$$

Найдем проекции скорости $\boldsymbol{v}_M$ точки M на оси координат:

$$v_{Mx} = \dot{x}_M = -\frac{3a\omega}{2}\sin\omega t,$$

$$v_{My} = \dot{y}_M = \frac{a\omega}{2}\cos\omega t.$$

Вектор $\boldsymbol{v}_M$ направлен по касательной к эллипсу (рис. 2.3)

$$\frac{x^2}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 1$$

и равен по величине

$$v_M = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2} = \frac{a\omega}{2}\sqrt{9\sin^2\omega t + \cos^2\omega t} = \frac{a\omega}{2}\sqrt{1+8\sin^2\omega t}\,. \qquad (2.12)$$

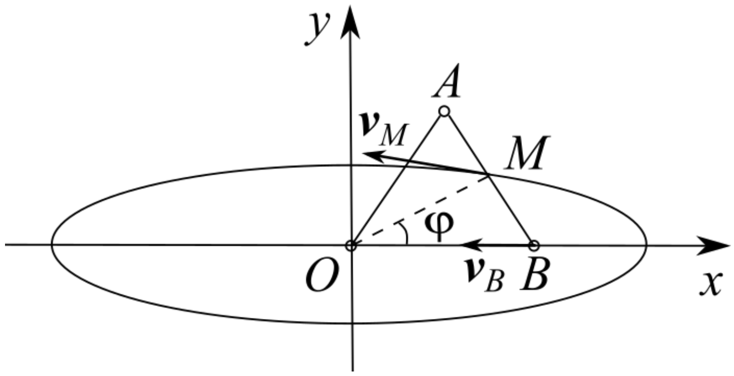

Рис. 2.3

Для точки B вектор скорости $\boldsymbol{v}_B$ направлен всегда вдоль оси Ox:

$$v_{Bx} = \dot{x}_B = -2a\omega\sin\omega t\,. \qquad (2.13)$$

Задача 2.2 (11.5)

Движение точки задано уравнениями $x = v_0 t\cos\alpha_0$, $y = v_0 t\sin\alpha_0 - \dfrac{gt^2}{2}$, причем ось Ox горизонтальна, ось Oy направлена по вертикали вверх, v_0, g и $\alpha_0 < \dfrac{\pi}{2}$ – величины постоянные. Найти: 1) траекторию точки, 2) координаты наивысшего ее положения, 3) проекции скорости на координатные оси в тот момент, когда точка находится на оси Ox.

Решение

Ответы на первый и второй вопросы получены при решении задачи 1.4. Воспользуемся уравнением (1.20) для траектории

$$y = x\cdot \mathrm{tg}\alpha_0 - x^2\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0} \qquad (2.14)$$

и соотношениями (1.21) для координат точки B (рис. 2.4)

$$x_B = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha_0, \quad y_B = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha_0. \tag{2.15}$$

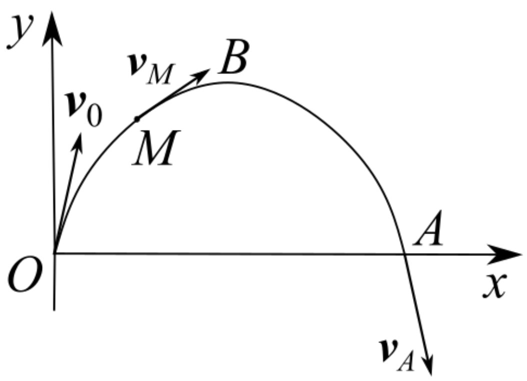

Рис. 2.4

Скорость точки в каждый момент времени t (точка M на рис. 2.4) направлена по касательной к параболе, проекции скорости на оси координат:

$$v_x = \dot{x} = v_0\cos\alpha_0,$$

$$v_y = \dot{y} = v_0\sin\alpha_0 - gt.$$

На оси Ox точка находится в моменты времени, удовлетворяющие условию $y = 0$:

$$v_0 t\sin\alpha_0 - \frac{gt^2}{2} = 0,$$

т. е. при $t_1 = 0$ (точка O на рис. 2.4) и при $t_2 = \dfrac{2v_0\sin\alpha_0}{g}$ (точка *A).*

В положении O для проекций скорости получаем

$$v_{0x} = v_0\cos\alpha_0, \quad v_{0y} = v_0\sin\alpha_0, \tag{2.16}$$

затем вычисляем их в положении A

$$v_{Ax} = v_0 \cos\alpha_0, \; v_{Ay} = v_0 \sin\alpha_0 - g\frac{2v_0 \sin\alpha_0}{g} = -v_0 \sin\alpha_0, \tag{2.17}$$

таким образом, $v_{0x} = v_{Ax}$, $v_{0y} = -v_{Ay}$, следовательно, величины скорости точки в двух положениях на оси Ox равны между собой: $|\boldsymbol{v}_0| = |\boldsymbol{v}_A| = v_0$.

Задача 2.3 (11.8)

Из орудия, ось которого образует угол 30° с горизонтом, выпущен снаряд со скоростью 500 м/с. Предполагая, что снаряд имеет только ускорение силы тяжести $g = 9{,}81$ м/с^2, найти годограф скорости снаряда и скорость точки, вычерчивающей годограф.

Решение

Снаряд M имеет только ускорение силы тяжести g, направленное по вертикали вниз, тогда проекции его скорости $\boldsymbol{v}_M$ (см. рис. 2.4) в любой момент времени t секунд определяются следующим образом: горизонтальная составляющая остается неизменной $v_{Mx} = v_0 \cos\frac{\pi}{6}$, вертикальная составляющая изменяется линейно по времени $v_{My} = v_0 \sin\frac{\pi}{6} - gt$, здесь (по условию задачи) $v_0 = 500$ м/с.

В каждый момент времени будем откладывать вектор $\boldsymbol{v}_M$ от начала координат, координаты конца вектора $\boldsymbol{v}_M$ обозначим (ξ, η), тогда получаем

$$\begin{aligned} \xi &= v_{Mx} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0, \\ \eta &= v_{My} = \frac{1}{2} v_0 - gt. \end{aligned} \tag{2.18}$$

На рис. 2.5 конец вектора $\boldsymbol{v}_M$ – это точка A

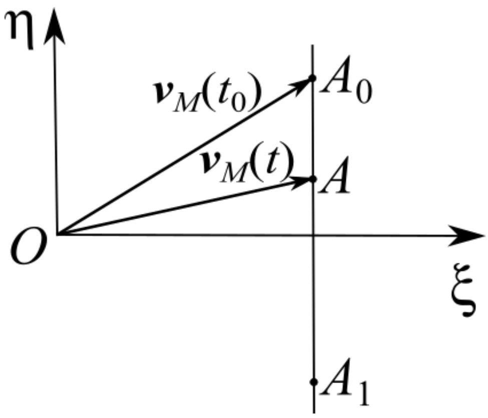

Рис. 2.5

Очевидно, уравнение годографа скорости снаряда имеет вид

$$\xi = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 . \tag{2.19}$$

Это вертикальная прямая, отстоящая от оси $O\eta$ на расстояние $\frac{\sqrt{3}}{2} v_0 = 433$ м. Точка A перемещается по отрезку этой прямой из положения A_0 с координатой $\eta(t=0) = \frac{v_0}{2} = 250$ м вниз, так как функция $\eta(t)$ – убывающая, до положения A_1, определяемого согласно решению (2.17) задачи 2.2, с координатой $\eta(t_1) = -\frac{v_0}{2} = -250$ м.

Определим скорость точки A, вычерчивающей годограф:

$$v_{A\xi} = \dot{\xi} = 0 ,\ v_{A\eta} = \dot{\eta} = -g ,\ v_A = g = 9{,}81 \text{ м/с}. \tag{2.20}$$

Задача 2.4 (11.11)

Определить уравнения движения и траекторию точки M колеса вагона радиуса $R = 0{,}5$ м, отстоящей от оси на расстоянии $a = 0{,}6$ м и лежащей в начальный момент на 0,1 м ниже рельса, если вагон движется по прямолинейному пути со скоростью $v = 10$ м/с (рис. 2.6). Найти также моменты времени, когда эта точка будет проходить свои нижнее и верхнее положения, и проекции ее скорости на оси Ox, Oy в эти моменты времени. Ось Ox совпадает с рельсом, ось Oy проходит через начальное нижнее положение точки.

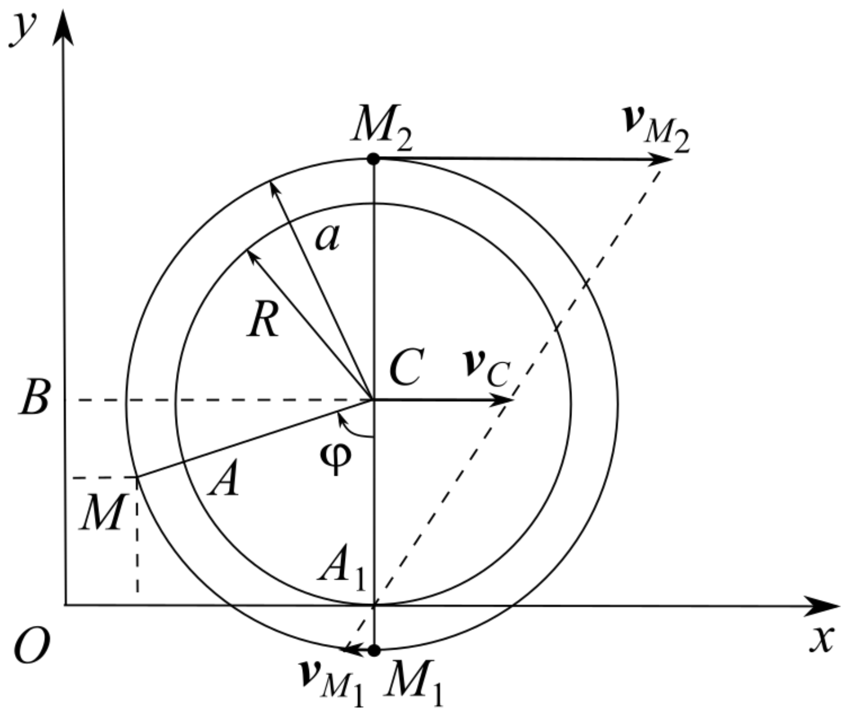

Рис. 2.6

Решение

Вагон движется с постоянной скоростью $v = 10$ м/с, следовательно, это есть скорость оси колеса, т. е. $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}$. За время t секунд ось колеса переместится на расстояние $|BC| = |OA_1| = vt$ м (рис. 2.6). Здесь A_1 – точка соприкосновения с рельсом в момент времени t.

Колесо катится по рельсу без проскальзывания, поэтому длина дуги AA_1 равна пути $|OA_1|$. Отсюда определим угол поворота колеса:

$$\varphi = \frac{\cup A_1A}{R} = \frac{|OA_1|}{R} = \frac{vt}{R}.$$

Уравнения движения точки M составим из геометрических соображений:

$$\begin{aligned} x_M &= |OA_1| - |CM|\sin\varphi = vt - a\sin\frac{vt}{R}, \\ y_M &= |OB| - |CM|\cos\varphi = R - a\cos\frac{vt}{R}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

После подстановки численных значений длин отрезков из условия задачи имеем параметрические уравнения движения

$$\begin{aligned} x_M &= (10t - 0,6\sin 20t) \text{ м}, \\ y_M &= (0,5 - 0,6\cos 20t) \text{ м}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Итак, траекторией точки M является циклоида.

Проекции скорости $\boldsymbol{v}_M$ на оси координат определяются дифференцированием по времени t уравнений (2.21)

$$v_{Mx} = \dot{x}_M = v\left(1 - \frac{a}{R}\cos\frac{vt}{R}\right) \text{ м/с}, \quad v_{My} = \dot{y}_M = \frac{va}{R}\sin\frac{vt}{R} \text{ м/с}. \tag{2.23}$$

Точка M находится в своем нижнем положении при значениях угла $\varphi_1 = 2\pi k, \quad (k = 0, 1, 2, ...)$, т. е. в моменты времени, определяемые соотношением $\frac{vt_1}{R} = 2\pi k$, что соответствует

$$t_1 = \frac{2\pi Rk}{v} = \frac{\pi k}{10} \text{ с}. \tag{2.24}$$

При этом согласно уравнениям (2.23) получаем

$$v_{Mx}(t_1) = v\left(1 - \frac{a}{R}\right) = -2 \text{ м/с}, \; v_{My}(t_1) = 0 \text{ м/с}, \tag{2.25}$$

т. е. $v_M(t_1) = 2$ м/с.

Отметим, что такую скорость в каждый момент времени t имеет точка, проходящая свое нижнее положение, на рис. 2.6 точка M_1.

Аналогично рассмотрим точку M в ее верхнем положении: $\varphi_2 = \pi(1+2k), \quad (k = 0, 1, 2, ...)$, т. е. $\dfrac{vt_2}{R} = \pi(1+2k)$.

Следовательно, для этого положения находим соответствующий момент времени

$$t_2 = \frac{\pi R(1+2k)}{v} \text{ с}, \tag{2.26}$$

а для скорости производим вычисления

$$\begin{gathered} v_{Mx}(t_2) = v\left(1 + \frac{a}{R}\right) = 22 \text{ м/с}, \quad v_{My}(t_2) = 0 \text{ м/с}, \\ v_M(t_2) = 22 \text{ м/с}. \end{gathered} \tag{2.27}$$

Такую скорость на рис. 2.6 имеет точка M_2.

Задача 2.5 (11.17)

Найти в полярных координатах (r, φ) уравнение кривой, которую опишет корабль, сохраняющий постоянный угол пеленга α на неподвижную точку (угол между направлением скорости и направлением на точку), если дано: α и $r|_{\varphi=0} = r_0$. Корабль принять за точку, движущуюся на плоскости, и за полюс взять произвольную неподвижную точку в этой плоскости. Исследовать частные случаи $\alpha = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi$.

Решение

Выберем за полюс полярной системы координат неподвижную точку O, угол пеленга α на которую корабль M сохраняет постоянным. Начало декартовой системы координат также совместим с точкой O, а ось Ox проведем через начальное положение корабля M_0, так как $r\big|_{\varphi=0} = r_0 = |OM_0|$ (рис. 2.7).

Пусть M – положение корабля, характеризующееся полярными координатами (r, φ) или декартовыми (x, y):

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{2.28}$$

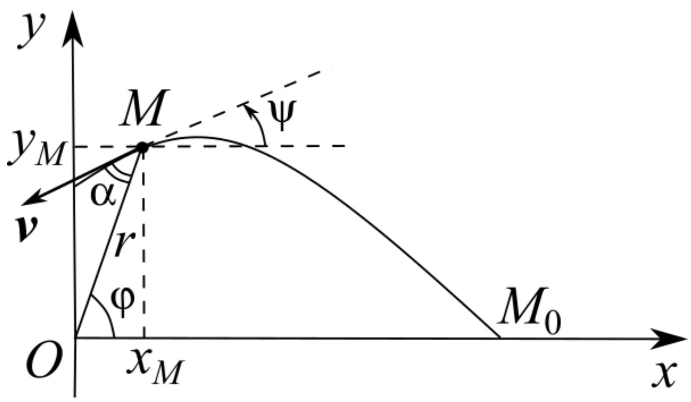

Рис. 2.7

Обозначим через ψ угол между касательной к траектории и осью Ox. Геометрически очевидно, что $\psi = \varphi - \alpha$, так как скорость направлена по касательной к траектории. Теперь используем, что $\mathrm{tg}\psi = \dfrac{dy}{dx}$, т. е.

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}(\varphi - \alpha),$$

или, используя (2.28), приходим к соотношению

$$\frac{dr\sin\varphi + r\cos\varphi d\varphi}{dr\cos\varphi - r\sin\varphi d\varphi} = \frac{\mathrm{tg}\varphi - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}\varphi \cdot \mathrm{tg}\alpha}.$$

После тождественных преобразований получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dr}{r} = -\mathrm{ctg}\alpha\, d\varphi. \qquad (2.29)$$

Интегрируя, имеем решение

$$\ln r = -\varphi \cdot \mathrm{ctg}\alpha + C.$$

Константа интегрирования C находится из начальных условий движения корабля $r\big|_{\varphi=0} = r_0$, получаем $C = \ln r_0$. Следовательно, уравнение движения корабля в полярной системе координат записывается в виде

$$\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = -\varphi \cdot \mathrm{ctg}\alpha,$$

после преобразований имеем

$$r = r_0 e^{-\varphi \cdot \mathrm{ctg}\alpha}. \qquad (2.30)$$

Таким образом, траекторией корабля является логарифмическая спираль (2.30). При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ траектория корабля – окружность:

$$r = r_0. \qquad (2.31)$$

Для углов $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ ($|\mathrm{ctg}\alpha| = \infty$, $\mathrm{tg}\alpha = 0$) дифференциальное уравнение для траектории (2.29) можно записать в виде $\mathrm{tg}\alpha \frac{dr}{r} = -d\varphi$. Тогда имеем $d\varphi = 0$, т. е. $\varphi = \mathrm{const}$. Из начальных условий получим, что константа равна нулю, т. е. уравнение траектории

$$\varphi = 0. \qquad (2.32)$$

Итак, при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ траектория – прямая, ось Ox. В случае $\alpha = 0$ корабль движется к полюсу O (в отрицательном направлении оси Ox), в случае $\alpha = \pi$ корабль перемещается от полюса O (в положительном направлении оси Ox).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.6 (11.2)

Длина линейки эллипсографа $AB = 40$ см, длина кривошипа $OC = 20$ см, $AC = CB$ (рис. 2.8). Кривошип равномерно вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω. Найти уравнения траектории и годографа скорости точки M линейки, лежащей на расстоянии $AM = 10$ см от конца A.

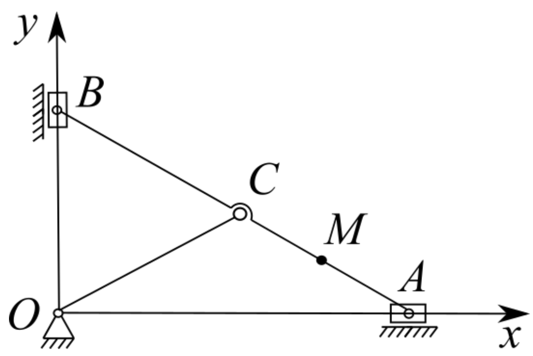

Рис. 2.8

Ответ. $\dfrac{x^2}{900} + \dfrac{y^2}{100} = 1$; $\dfrac{x_1^2}{900\omega^2} + \dfrac{y_1^2}{100\omega^2} = 1$.

Задача 2.7 (11.3)

Точка описывает фигуру Лиссажу согласно уравнениям

$$x = 2\cos t, \; y = 4\cos 2t$$

(x, y – в сантиметрах, t – в секундах).

Определить величину и направление скорости точки, когда она находится на оси Oy.

Ответ. 1) $v = 2$ см/с, $\cos(v, x) = -1$; 2) $v = 2$ см/с, $\cos(v, x) = 1$.

Задача 2.8 (11.6)

Движение точки задано теми же уравнениями, что и в задаче 2.2 (11.5), причем $v_0 = 20$ м/с, $\alpha_0 = 60°$, $g = 9{,}81$ м/с^2. Найти, с какой скоростью v_1 должна выйти из начала координат в момент $t = 0$ вторая точка для того, чтобы, двигаясь равномерно по оси Ox, она встретилась с первой точкой, и определить расстояние x_1 до места встречи.

Ответ. $v_1 = 10$ м/с, $x_1 = 35{,}3$ м.

Задача 2.9 (11.7)

Определить высоты h_1, h_2 и h_3 над поверхностью воды трех пунктов отвесного берега, если известно, что три пули, выпущенные одновременно в этих пунктах с горизонтальными скоростями 50, 75 и 100 м/с, одновременно упали в воду, причем расстояние точки падения первой пули от берега равно 100 м; принять во внимание только ускорение силы тяжести $g = 9{,}81$ м/с^2. Определить также продолжительность T полета пуль и их скорости v_1, v_2 и v_3 в момент падения в воду.

Ответ. $h_1 = h_2 = h_3 = 19{,}62$ м, $T = 2$ с, $v_1 = 53{,}71$ м/с, $v_2 = 77{,}52$ м/с, $v_3 = 101{,}95$ м/с.

Задача 2.10 (11.9)

Определить уравнения движения и траекторию точки колеса электровоза радиуса $R = 1$ м, лежащей на расстоянии $a = 0{,}5$ м от оси, если колесо катится без скольжения по горизонтальному прямолинейному участку пути; скорость оси колеса $v = 10$ м/с. Ось Ox совпадает с рельсом, ось Oy – с радиусом точки при ее начальном низшем положении. Определить также скорость этой точки в те моменты времени, когда диаметр колеса, на котором она расположена, займет 1) горизонтальное и 2) вертикальное положения.

Ответ. Укороченная циклоида $x = 10t - 0{,}5\sin 10t,\quad y = 1 - 0{,}5\cos 10t.$ Скорость: 1) 11,18 м/с; 2) 5 м/с; 15 м/с.

Задача 2.11 (11.14)

Уравнения движения точки M в цилиндрической системе координат имеют вид (см. задачу 1.14 (10.8))

$r = a$, $\varphi = kt$, $z = vt$.

Найти 1) проекции скорости точки M на оси цилиндрической системы координат, 2) уравнения движения точки M_1, описывающей годограф скорости, и 3) проекции скорости точки M_1.

Ответ. 1) $v_r = 0$, $v_\varphi = ak$, $v_z = v$; 2) $r_1 = ak$, $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2} + kt$, $z_1 = v$;

3) $v_{r1} = 0$, $v_{\varphi 1} = ak^2$, $v_{z1} = 0$.

Задача 2.12 (11.15)

Точка M движется по окружности согласно уравнениям

$$r = 2a\cos\left(\frac{kt}{2}\right),\ \varphi = \frac{kt}{2}$$

(r, φ –полярные координаты). Найти 1) проекции скорости точки M на оси полярной системы координат, 2) уравнения движения точки M_1, описывающей годограф скорости, и 3) проекции скорости точки M_1.

Ответ. 1) $v_r = -ak\sin\left(\dfrac{kt}{2}\right)$, $v_\varphi = ak\cos\left(\dfrac{kt}{2}\right)$; 2) $r_1 = ak$, $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2} + kt$;

3) $v_{r1} = 0$, $v_{\varphi 1} = ak^2$.

Задача 2.13 (11.16)

Точка движется по линии пересечения сферы и цилиндра согласно уравнениям

$$r = R,\ \varphi = \frac{kt}{2},\ \theta = \frac{kt}{2}$$

(r, φ, θ – сферические координаты; см. задачу 1.13 (10.21)). Найти модуль и проекции скорости точки на оси сферической системы координат.

Ответ. $v_r = 0$, $v_\varphi = \frac{Rk}{2}\cos\frac{kt}{2}, v_\theta = \frac{Rk}{2}$, $v = \frac{Rk}{2}\sqrt{1+\cos^2\frac{kt}{2}}$.

Задача 2.14 (Задание К-1, № 13 [3])

По заданным уравнениям движения точки M установить 1) вид ее траектории и для момента времени $t = 1$ с найти 2) положение точки на траектории и 3) ее скорость. Уравнения движения: $x(t) = 5\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)$ см, $y(t) = -5\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)$ см.

Ответ. 1) траектория – окружность с центром в начале координат и радиусом 5 см,

2) $x(1) = 2{,}5$ см, $y(1) = -4{,}33$ см;

3) $v_x = -9{,}07$ см/с, $v_x = -5{,}24$ см/с, $v = 10{,}47$ см/с.

Задача 2.15 (Задача 3.10 [4])

Первый искусственный спутник, запущенный 4 октября 1957 года в СССР, имел скорость v, равную 8 км/с, и период обращения T, равный 1 ч 36 мин, или 5760 с.

Определить высоту полета спутника над поверхностью Земли, полагая его орбиту круговой, а движения равномерным. Радиус Земли принять равным $R = 6370$ км.

Ответ. 970 км.

Задача 2.16 (Задача 3.11 [4])

Две точки движутся равномерно одна за другой по одной прямой линии со скоростями v_1 и v_2, причем расстояние между их начальными положениями было равно s_0. Обе точки начали двигаться одновременно.

Определить время T, по истечении которого одна точка догонит другую.

Ответ. $T = \dfrac{s_0}{v_1 - v_2}$.

Задача 2.17 (Задача 3.12 [4])

Решить предыдущую задачу 2.16 при условии, что вторая точка начинает движение через промежуток времени τ после начала движения первой точки.

Ответ. $T = \dfrac{s_0 - v_2\tau}{v_1 - v_2}$.

Задача 2.18 (Задача 3.16 [4])

Частица, несущая электрический заряд e, движется в однородном электрическом поле с переменной напряженностью $E = A\sin kt$, где A и k – постоянные коэффициенты. Уравнение движения частицы имеет вид $x = \dfrac{eA}{mk}\left(t - \dfrac{\sin kt}{k}\right)$, где m – постоянная величина.

Определить величину скорости точки, ее начальное значение, а также наибольшее и наименьшее значения скорости.

Ответ. $v = \dfrac{eA}{mk}(1 - \cos kt)$, $v_0 = 0$, $v_{\min} = 0$, $v_{\max} = \dfrac{2eA}{mk}$.

3. Ускорение точки

Ускорением точки называется векторная величина

$$\boldsymbol{w}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{r}}(t). \tag{3.1}$$

Вектор ускорения точки располагается в соприкасающейся плоскости, проходящей через соответствующую точку траектории [2]:

$$\boldsymbol{w} = \frac{d^2 s}{dt^2}\boldsymbol{\tau} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \boldsymbol{n} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \kappa\dot{s}^2\boldsymbol{n}, \tag{3.2}$$

здесь $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{n}$ – единичные вектора, направленные по касательной и главной нормали к траектории соответственно. Таким образом, ускорение точки может быть разложено по двум взаимно ортогональным направлениям (рис. 3.1): $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_\tau + \boldsymbol{w}_n$.

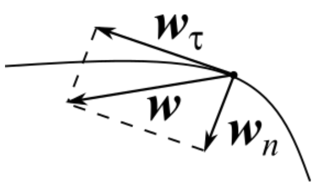

Рис. 3.1

Составляющие вектора ускорения называются: $\boldsymbol{w}_\tau$ – ***касательное ускорение***, $\boldsymbol{w}_n$ – ***нормальное ускорение***. При этом величины соответствующих векторов определяются соотношениями

$$\begin{gathered} w_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} = \dot{v}, \\ w_n = \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \kappa\dot{s}^2 = \kappa v^2 = \frac{v^2}{R}, \end{gathered} \tag{3.3}$$

где $\kappa = \dfrac{1}{R}$ – кривизна траектории, R – радиус кривизны траектории.

Величина вектора ускорения вычисляется как диагональ прямоугольника в соответствии с теоремой Пифагора

$$|\boldsymbol{w}| = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}\,, \tag{3.4}$$

Рассмотрим условие $w_\tau = 0$. Это условие может выполняться в конкретный момент времени, когда величина скорости v достигает экстремума. Если $w_\tau = 0$ в течение некоторого промежутка времени, то на соответствующем участке траектории значение скорости не изменяется, движение точки является равномерным. Тогда в случае криволинейного движения ускорение направлено вдоль главной нормали к траектории.

Случай $w_n = 0$ в конкретный момент времени означает, что либо точка меняет направление движения (скорость $v = 0$), либо движущаяся точка находится в точке перегиба траектории $\left(\kappa = \dfrac{1}{R} = 0\right)$. В течение некоторого промежутка времени для движущейся точки $w_n = 0$ на прямолинейном участке траектории.

Проекции вектора ускорения $\boldsymbol{w}$ на оси ортогональной криволинейной системы координат [2]

$$w_i = \frac{1}{2H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(v^2)}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial(v^2)}{\partial x_i}\right], \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.5}$$

В декартовой системе координат имеем

$$w_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad w_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad w_z = \dot{v}_z = \ddot{z}. \tag{3.6}$$

В цилиндрической системе координат получаем

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \quad w_z = \ddot{z}. \tag{3.7}$$

В сферической системе координат определяем

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\cos^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2 - \rho\dot{\theta}^2,$$

$$w_\varphi = \rho\cos\theta\cdot\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\cdot\dot{\rho}\dot{\varphi} - 2\rho\sin\theta\cdot\dot{\varphi}\dot{\theta}, \quad (3.8)$$

$$w_\theta = \rho\ddot{\theta} + \rho\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\rho}\dot{\theta}.$$

Рассмотрим прямолинейное движение точки, уравнение движения $x = x(t)$, тогда $w = w_x = \ddot{x}(t)$, т. е. ускорение не имеет нормальной составляющей. Если точка движется с постоянным ускорением $w = w_0 = \text{const}$ (равнопеременно), то $\ddot{x}(t) = w_0$. Тогда закон изменения скорости линеен, $v(t) = w_0 t + v_0$, а уравнение движения точки $x(t) = w_0\dfrac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$, где v_0 и x_0 – скорость и координата в начальный момент времени при $t = 0$.

При решении задач с использованием декартовой системы координат иногда возникает необходимость, кроме проекций скорости и ускорения точки с использованием формул (2.5) и (3.6), найти касательное и нормальное ускорения. С этой целью для величины вектора скорости воспользуемся соотношением (2.8), которое в указанном случае запишем в виде

$$v^2 = (v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2. \quad (3.9)$$

Продифференцируем по времени t левую и правую части уравнения (3.9):

$$2v\dot{v} = 2v_x\dot{v}_x + 2v_y\dot{v}_y + 2v_z\dot{v}_z.$$

Используем первое соотношение (3.3) для нахождения касательной составляющей ускорения:

$$w_\tau = \dot{v} = \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z}{v}. \quad (3.10)$$

Для нормальной составляющей ускорения, согласно формуле (3.4), получаем

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}\,. \tag{3.11}$$

Приведем решение задач из § 12 задачника [1].

Задача 3.1 (12.9)

Поезд движется равнозамедленно по дуге окружности радиуса $R = 800$ м и проходит путь $l_1 = 800$ м, имея начальную скорость $v_0 = 54$ км/ч и конечную $v_1 = 18$ км/ч. Определить полное ускорение поезда в начале и в конце дуги, а также время движения по этой дуге.

Решение

Поезд движется по дуге окружности, следовательно, в каждый момент времени t полное ускорение $w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}$ (3.4). Отсчет дуги вдоль траектории будем производить от начального положения поезда в направлении движения, тогда длина дуги $s(t)$ и путь поезда $l(t)$ совпадают. По условию задачи $s(0) = 0$, $v(0) = v_0 = 54$ км/ч = 15 м/с, $s(T) = l_1 = 800$ м, $v(T) = v_1 = 18$ км/ч $= 5$ м/с, где T – искомое время движения поезда. Кроме того, в каждый момент времени t имеют место соотношения $v = \dot{s}$, $w_\tau = \ddot{s}$, $w_n = \dfrac{v^2}{R}$. Движение поезда по дуге равнозамедленное, т. е. в каждой точке траектории выполняется соотношение

$$w_\tau = \ddot{s} = a = \text{const}, \quad a < 0\,. \tag{3.12}$$

Проинтегрируем уравнение (3.12) дважды:

$$v(t) = \dot{s} = at + C_1,$$

$$s(t) = a\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2\,.$$

Найдем константы интегрирования

$$v(0) = v_0 = C_1,\ s(0) = 0 = C_2,$$

после этого получим следующие зависимости от времени t для скорости и длины дуги:

$$v(t) = at + v_0,$$

$$s(t) = a\frac{t^2}{2} + v_0 t.$$

Для нахождения a и T составляем систему уравнений

$$\begin{cases} v(T) = v_1 = aT + v_0, \\ s(T) = l_1 = a\dfrac{T^2}{2} + v_0 T. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$T = \frac{2l_1}{v_1 + v_0} = 80 \text{ с},\ w_\tau = a = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2l_1} = -\frac{1}{8} \text{ м/с}^2. \tag{3.13}$$

В отличие от касательного, нормальное ускорение поезда зависит от времени, в точках начальной и конечной оно вычисляется через известные значения скорости v_0 и v_1 согласно второй формуле (3.3), при этом заметим, что в решаемой задаче радиус кривизны траектории – это радиус окружности R:

$$w_n\big|_{t=0} = \frac{v_0^2}{R} = \frac{9}{32} \text{ м/с}^2, \quad w_n\big|_{t=T} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{1}{32} \text{ м/с}^2.$$

Находим полное ускорение в начальном и конечном положениях:

$$w\big|_{t=0} = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{9}{32}\right)^2} = 0{,}308 \text{ м/с}^2. \tag{3.14}$$

$$w\big|_{t=T} = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{32}\right)^2} = 0{,}129 \text{ м/с}^2. \tag{3.15}$$

На рис. 3.2 изображены траектория поезда, скорость и ускорение в начальном и конечном положениях.

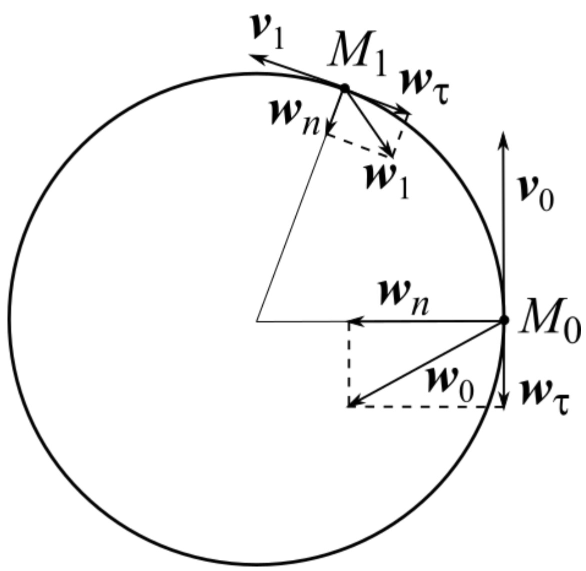

Рис. 3.2

Задача 3.2 (12.18)

Найти траекторию точки M шатуна кривошипно-ползунного механизма (рис. 3.3), если $r = l = 60$ см, $MB = \frac{l}{3}$, $\varphi = 4\pi t$ (t – в секундах), а также определить скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки в момент, когда $\varphi = 0$.

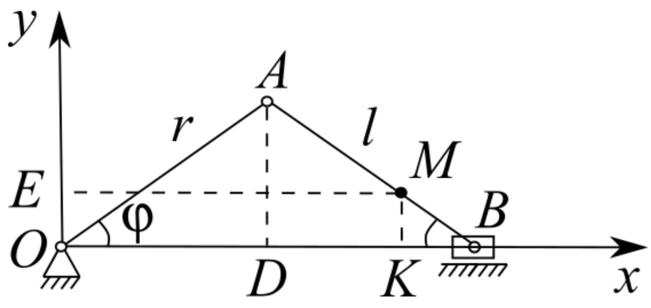

Рис. 3.3

Решение

Введем систему отсчета *Oxy*, как показано на рис. 3.3. Используя факт равнобедренности треугольника OAB, определим координаты точки M:

$$x_M = |OB| - |KB| = 2|OD| - |KB| = 2l\cos\varphi - \frac{1}{3}l\cos\varphi =$$

$$= \frac{5}{3}l\cos\varphi = 100\cos 4\pi t \text{ см}, \tag{3.16}$$

$$y_M = |OE| = \frac{1}{3}l\sin\varphi = 20\sin 4\pi t \text{ см}.$$

Исключая параметр времени t, получим траекторию точки M:

$$\frac{x_M^2}{100^2} + \frac{y_M^2}{20^2} = 1. \tag{3.17}$$

Это эллипс с центром в начале координат и полуосями $a = 100$ см и $b = 20$ см.

Определим скорость точки M:

$$\begin{gathered} v_M^2 = \dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 = \left(-400\pi\sin 4\pi t\right)^2 + \left(80\pi\cos 4\pi t\right)^2 = \\ = 80^2\pi^2\left(\cos^2 4\pi t + 25\sin^2 4\pi t\right) = 80^2\pi^2\left(1 + 24\sin^2 4\pi t\right). \end{gathered} \tag{3.18}$$

Если $\varphi = 4\pi t = 0$, то $t = 0$, тогда

$$v_M\big|_{t=0} = 80\pi \text{ см/с}.$$

Найдем ускорение точки M:

$$\begin{gathered} w_M^2 = \ddot{x}_M^2 + \ddot{y}_M^2 = \left(-1600\pi^2\cos 4\pi t\right)^2 + \left(-320\pi^2\sin 4\pi t\right)^2 = \\ = 320^2\pi^4\left(\sin^2 4\pi t + 25\cos^2 4\pi t\right) = 320^2\pi^4\left(1 + 24\cos^2 4\pi t\right). \end{gathered} \tag{3.19}$$

Вычисляем значение ускорения при $t = 0$:

$$w_M\big|_{t=0} = 320 \cdot 5\pi^2 = 1600\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Для определения радиуса кривизны траектории используем соотношения (3.3):

$$R = \frac{v^2}{w_n}, \quad w_n^2 = w^2 - w_\tau^2, \quad w_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Продифференцируем выражение для квадрата скорости (3.18):

$$2v_M \frac{dv_M}{dt} = 80^2 \pi^2 24 \cdot 2\sin 4\pi t \cdot \cos 4\pi t \cdot 4\pi .$$

Тогда получаем при $t = 0$

$$2v_M \left. \frac{dv_M}{dt} \right|_{t=0} = 0 .$$

Поскольку $v|_{t=0} = 80\pi \neq 0$, то касательное ускорение

$$w_\tau|_{t=0} = \left. \frac{dv_M}{dt} \right|_{t=0} = 0 ,$$

следовательно, полное и нормальное ускорения совпадают:

$$w_n|_{t=0} = w|_{t=0} = 1600\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Находим величину радиуса кривизны при $t = 0$:

$$R|_{t=0} = \left. \left(\frac{v^2}{w_n} \right) \right|_{t=0} = \frac{80^2 \pi^2}{1600\pi^2} = 4 \text{ см}.$$

На рис. 3.4 изображены траектория точки M, скорость и ускорение в момент, когда $\varphi = 0$.

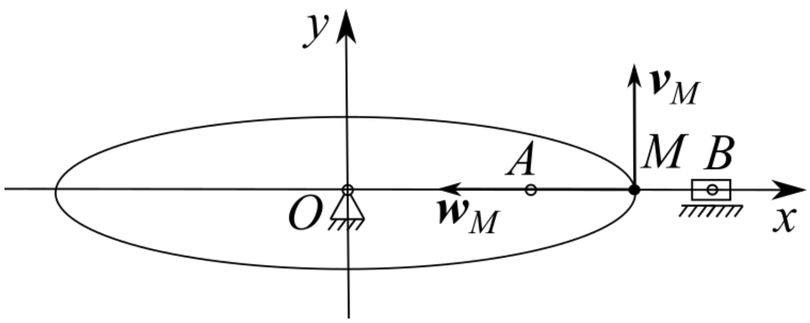

Рис. 3.4

Задача 3.3 (12.21)

Движение снаряда задано уравнениями (см. задачу 1.4 (10.14))

$$x = (v_0 \cos\alpha) \cdot t,$$

$$y = (v_0 \sin\alpha) \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \qquad (3.20)$$

где v_0 и α – постоянные величины. Найти радиус кривизны траектории при $t = 0$ и в момент падения на землю.

Решение

Используя уравнения движения снаряда, найдем проекции скорости

$$v_x = \dot{x} = v_0 \cos\alpha,$$

$$v_y = \dot{y} = v_0 \sin\alpha - gt$$

и проекции ускорения

$$w_x = \ddot{x} = 0,$$

$$w_y = \ddot{y} = -g.$$

Заметим, что ускорение при движении снаряда не изменяется ($w = g$) и направлено вдоль оси Oy в отрицательном направлении.

В момент времени $t = T$ падения снаряда на землю $y = 0$, следовательно, для нахождения T имеем уравнение

$$v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 0,$$

решая его, находим $t_1 = 0$ (это точка O на рис. 1.7 – начало движения), $t_2 = T = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ (точка A на рис. 1.7).

Найдем скорость снаряда при $t = 0$:

$$v_x(0) = v_0 \cos\alpha, \quad v_y(0) = v_0 \sin\alpha, \quad v(0) = v_0.$$

При $t = T$ получаем

$$v_x(T) = v_0 \cos\alpha, \quad v_y(T) = v_0 \sin\alpha - g\frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = -v_0 \sin\alpha, \quad v(T) = v_0 .$$

Таким образом, скорость в точке O и скорость в точке A равны между собой по величине.

Для определения касательной составляющей ускорения используем соотношение (3.10):

$$w_\tau = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{v},$$

тогда при $t = 0$ имеем $w_\tau(0) = -g \sin\alpha$, а при $t = T$ получаем $w_\tau(T) = g \sin\alpha$.

Тогда в моменты времени и $t = 0$, и $t = T$ нормальную составляющую ускорения вычисляем согласно соотношению (3.11):

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \sqrt{g^2 - g^2 \sin^2\alpha} = g\cos\alpha .$$

Следовательно, радиус кривизны в точках O и A оказывается одинаковым:

$$R = \frac{v^2}{w_n} = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha} . \tag{3.21}$$

Задача 3.4 (12.27)

Движение точки задано уравнениями

$$x = 2t, \quad y = t^2$$

(t – в секундах, x и y – в сантиметрах). Определить радиус кривизны, величины и направления скорости и ускорения точки в момент времени $t = 1$ с.

Решение

Уравнения движения точки являются параметрическими уравнениями траектории, исключим из них параметр времени t.

Получим уравнение траектории в координатной форме

$$t = \frac{x}{2}, \quad y = \frac{x^2}{4}.$$

Это парабола с вершиной в начале координат, ветви ее направлены вверх (рис. 3.5). Так как $t \geq 0$, то движение происходит по правой ветви параболы от положения $M_0(0, 0)$ при $t_0 = 0$ до положения $M_1(2, 1)$ при $t_1 = 1$.

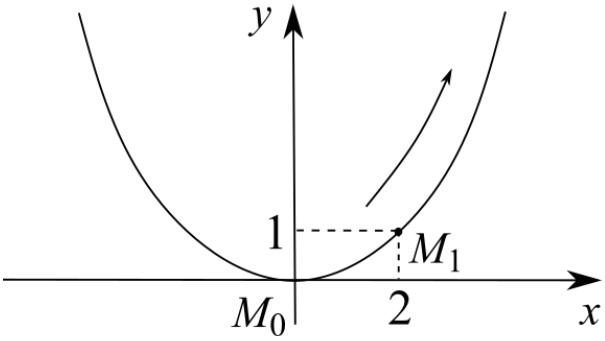

Рис. 3.5

Находим проекции скорости:

$$v_x = \dot{x} = 2 \text{ см/с},$$

$$v_y = \dot{y} = 2t \text{ см/с}.$$

Проекция скорости на ось Ox сохраняет свое значение в любой момент времени. Найдем $v_y(t_1) = 2$ см/с, тогда величина скорости $v(t_1) = 2\sqrt{2}$ см/с. Скорость в момент времени $t_1 = 1$ направлена под углом $\frac{\pi}{4}$ к оси Ox, так как $v_x(t_1) = v_y(t_1)$ (рис. 3.6).

Величина ускорения остается неизменной: $w_x = \ddot{x} = 0$, $w_y = \ddot{y} = 2$ см/с, $w = 2$ см/с. Вектор ускорения направлен параллельно оси Oy (рис. 3.7).

Разложим ускорение на касательное и нормальное: $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_\tau + \boldsymbol{w}_n$ (рис. 3.7). Определяем величину w_τ, используя соотношение (3.10):

$$w_\tau(1) = \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 2}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Тогда нормальное ускорение имеет значение

$$w_n(1) = \sqrt{4-2} = \sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

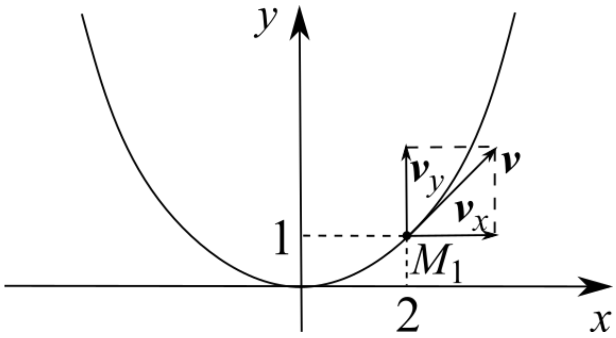

Рис. 3.6

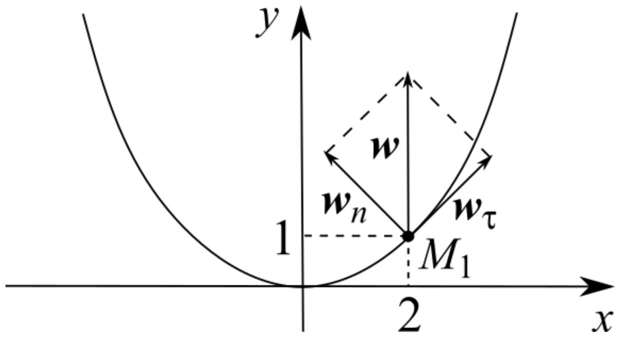

Рис. 3.7

Вычисляем радиус кривизны в точке M_1:

$$R = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \text{ см.}$$

Задача 3.5 (12.32)

Точка M движется по винтовой линии. Уравнения движения ее в цилиндрической системе координат имеют вид

$$r = a,\ \varphi = kt,\ z = \mu t,$$

здесь a, k, μ – константы.

Найти проекции скорости и ускорения точки на оси цилиндрической системы координат, касательную и нормальную составляющие ускорения и радиус кривизны винтовой линии.

Решение

Для решения задачи будем использовать соотношения (2.6) и (3.7), получаем проекции скорости

$$v_r = 0,\ v_\varphi = ak,\ v_z = \mu$$

и проекции ускорения

$$w_r = -ak^2,\ w_\varphi = 0,\ w_z = 0.$$

Касательную составляющую ускорения найдем по формуле, представляющей собой аналог соотношения (3.10):

$$w_\tau = \left(0 \cdot (-ak^2) + ak \cdot 0 + \mu \cdot 0\right) = 0.$$

Нормальную составляющую ускорения – по формуле (3.11):

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = w = ak^2.$$

Радиус кривизны винтовой линии определим с помощью второго соотношения (3.3):

$$R = \frac{v^2}{w_n} = \frac{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2}{w_n} = \frac{a^2k^2 + \mu^2}{ak^2}.$$

Задача 3.6 (Задание К-1, № 30 [3])

По заданным уравнениям движения точки M установить вид ее траектории и для момента времени $t = 1$ с найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке. Уравнения движения: $x(t) = 2\cos\left(\dfrac{\pi t^2}{3}\right) - 2$ см, $y(t) = -2\sin\left(\dfrac{\pi t^2}{3}\right) + 3$ см.

Решение

Чтобы получить уравнение траектории в координатной форме, исключим время из уравнений движения, используя основное тригонометрическое тождество.

С этой целью предварительно разрешим уравнения движения относительно значений тригонометрических функций:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi t^2}{3}\right), \\ -\dfrac{y-3}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi t^2}{3}\right), \end{cases}$$

каждое соотношение возведем в квадрат и сложим их, получим уравнение

$$\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{y-3}{2}\right)^2 = 1,$$

преобразуем его

$$\left(x+2\right)^2 + \left(y-3\right)^2 = 2^2. \tag{3.22}$$

Это уравнение окружности с центром в точке $\left(-2, 3\right)$ и радиусом 2. При $t=0$ точка M находилась в положении $M_0(0, 3)$, в момент времени $t=1$ с – в положении $M_1\left(-1,\ 3-\sqrt{3}\right)$.

Для определения скорости точки находим проекции скорости на оси координат:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = -\frac{4\pi t}{3}\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) \text{ см/с}, \\ v_y &= \dot{y} = -\frac{4\pi t}{3}\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) \text{ см/с}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Модуль скорости точки

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{4\pi t}{3} \text{ см/с}. \tag{3.24}$$

В момент времени $t=1$ с вычисляем проекции и величину скорости:

$$v_x(1) = -\frac{2\pi\sqrt{3}}{3} \text{ см/с}, \quad v_y(1) = -\frac{2\pi}{3} \text{ см/с}, \quad v(1) = \frac{4\pi}{3} \text{ см/с}.$$

Для определения ускорения точки находим проекции ускорения на оси координат:

$$w_x = \ddot{x} = -\frac{4\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) - \frac{8\pi^2 t^2}{9}\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) \text{ см/с}^2,$$
$$w_y = \ddot{y} = -\frac{4\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) + \frac{8\pi^2 t^2}{9}\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) \text{ см/с}^2. \tag{3.25}$$

Модуль ускорения точки

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \frac{4\pi}{3}\sqrt{1 + \frac{4\pi^2 t^4}{9}} \text{ см/с}^2. \tag{3.26}$$

В момент времени $t = 1$ с вычисляем проекции и величину вектора ускорения:

$$w_x(1) = -\frac{2\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{4\pi^2}{9} \text{ см/с}^2,$$

$$w_y(1) = -\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi^2\sqrt{3}}{9} \text{ см/с}^2,$$

$$w(1) = \frac{4\pi}{3}\sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{9}} \text{ см/с}^2.$$

Касательное ускорение получим для заданного момента времени с помощью соотношения (3.10)

$$w_\tau = \frac{\left(-\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{2\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{4\pi^2}{9}\right) + \left(-\frac{2\pi}{3}\right)\left(-\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi^2\sqrt{3}}{9}\right)}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} \text{ см/с}^2,$$

для нахождения нормального ускорения используем (3.11)

$$w_n = \sqrt{\left(\frac{4\pi}{3}\sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{9}}\right)^2 - \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2} = \frac{8\pi^2}{9} \text{ см/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории в этой точке равен

$$R = \frac{v^2}{w_n} = \frac{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2}{\frac{8\pi^2}{9}} = 2 \text{ см},$$

что является очевидным фактом, так как траектория движения есть окружность, радиус которой найден выше – 2 см (3.22).

На рис. 3.8 изображена траектория движения точки M, скорость точки и ее проекции, ускорение и его проекции, касательное и нормальное ускорения.

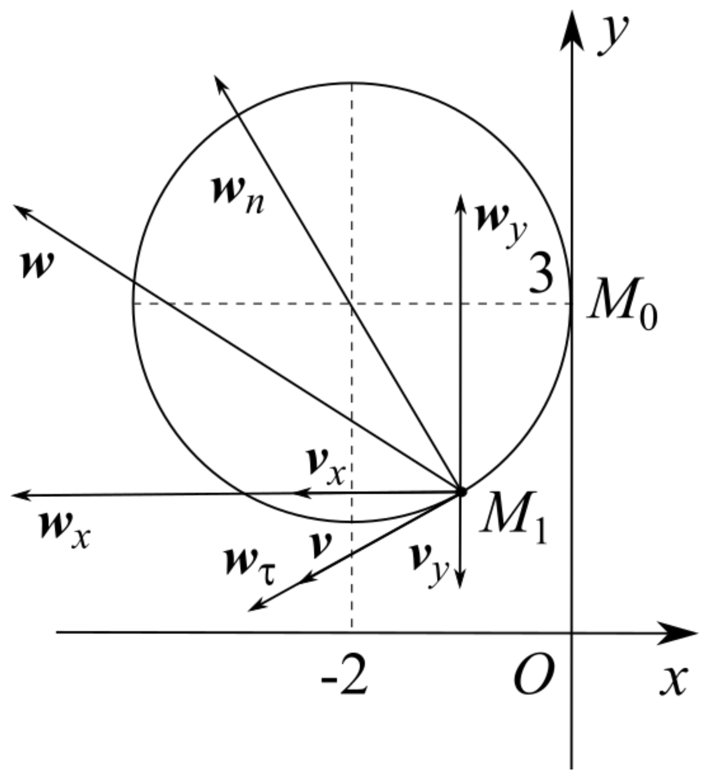

Рис. 3.8

В табл. 3.1 приведены численные значения всех полученных величин.

Таблица 3.1

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с^2					Радиус кривизны, см
x	y	v_x	v_y	v	w_x	w_y	w	w_τ	w_n	R
–1	1,27	–3,62	–2,09	4,19	–8,02	5,51	9,73	4,19	8,78	2

Задача 3.7 (Задание К-2, № 25 [3])

Для точки M заданного механизма (рис. 3.9) составить уравнения движения, вычертить участок ее траектории и для момента времени $t = \frac{1}{3}$ с найти скорость точки, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке. Расчетные данные задачи: $O_1O_2 = 2\,O_1K = CD = 60$ см, $O_1C = AB = 21$ см, $MB = \frac{1}{3}AB$, $\varphi = \pi t$.

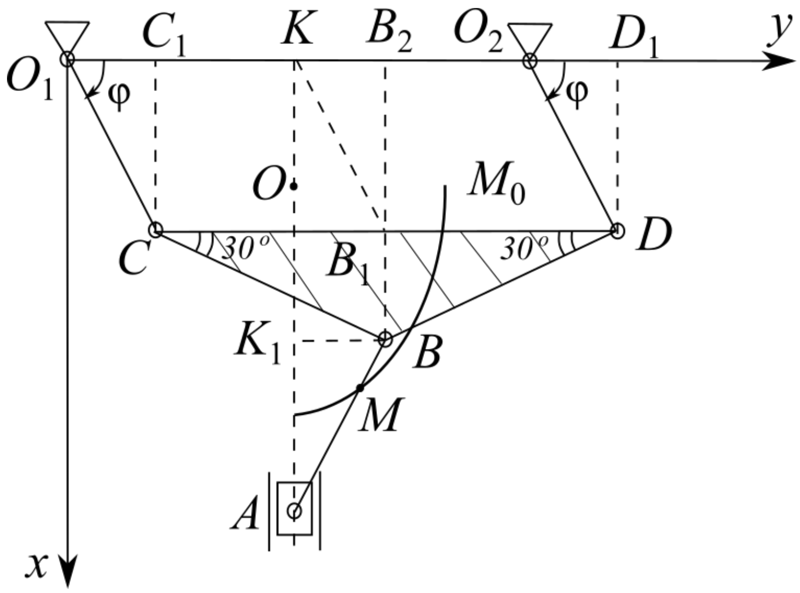

Рис. 3.9

Решение

Проектируем точки C, B и D на ось y: C_1, B_2 и D_1, тогда $B_1C = B_1D$, здесь B_1 – проекция B на CD.

Так как O_1CDO_2 – параллелограмм, то $O_1C_1 = KB_2 = O_2D_1$, и по построению $KB_2 = K_1B$.

Стержни O_1C и BA имеют одинаковую длину и равные проекции, следовательно, $\angle K_1BA = \varphi$.

Находим проекции точки M на оси координат:

$$x_M = O_1C\sin\varphi + B_1B + \frac{1}{3}AB\sin\varphi,$$

$$y_M = O_1K + \frac{2}{3}AB\cos\varphi,$$

где $B_1B = \frac{1}{2}\cdot CD\cdot \mathrm{tg}30^\circ = \frac{1}{2}\cdot 60\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}$ см.

Получаем уравнения движения точки M в параметрическом виде:

$$\begin{gathered} x_M(t) = 21\sin\pi t + 10\sqrt{3} + 7\sin\pi t = 10\sqrt{3} + 28\sin\pi t \text{ см},\\ y_M = 30 + 14\cos\pi t \text{ см}. \end{gathered} \tag{3.27}$$

Уравнение траектории в координатной форме получим, исключив параметр времени t:

$$\frac{\left(x - 10\sqrt{3}\right)^2}{28^2} + \frac{\left(y-30\right)^2}{14^2} = 1. \tag{3.28}$$

Итак, траектория точки – это эллипс с центром в точке $O(10\sqrt{3}, 30)$ и полуосями 28 см и 14 см. При $t = 0$ точка M находилась в положении $M_0(10\sqrt{3}, 44)$, в момент времени $t = \frac{1}{3}$ с – в $M(24\sqrt{3}, 37)$. Строим дугу эллипса, проходящего через эти точки (рис. 3.9).

Проекции скорости на оси координат находим, продифференцировав соотношения (3.27):

$$v_x = \dot{x} = 28\pi\cos\pi t \text{ см/с},$$
$$v_y = \dot{y} = -14\pi\sin\pi t \text{ см/с}. \quad (3.29)$$

Модуль скорости принимает вид

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 14\pi\sqrt{1+3\cos^2\pi t} \text{ см/с}. \quad (3.30)$$

Вычисляем скорость и ее составляющие при $t = \dfrac{1}{3}$ с:

$$v_x\left(\frac{1}{3}\right) = 14\pi \text{ см/с}, \quad v_y\left(\frac{1}{3}\right) = -7\pi\sqrt{3} \text{ см/с}, \quad v\left(\frac{1}{3}\right) = 7\sqrt{7}\pi \text{ см/с}.$$

Продифференцируем составляющие скорости (3.29), получим проекции ускорения, найдем и модуль ускорения:

$$w_x = \ddot{x} = -28\pi^2\sin\pi t \text{ см/с}^2,$$
$$w_y = \ddot{y} = -14\pi^2\cos\pi t \text{ см/с}^2, \quad (3.31)$$
$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = 14\pi^2\sqrt{1+3\sin^2\pi t} \text{ см/с}^2.$$

В момент времени $t = \dfrac{1}{3}$ с вычисляем ускорение и его проекции:

$$w_x\left(\frac{1}{3}\right) = -14\sqrt{3}\,\pi^2 \text{ см/с}^2, \quad w_y\left(\frac{1}{3}\right) = -7\pi^2 \text{ см/с}^2, \quad w\left(\frac{1}{3}\right) = 7\sqrt{13}\,\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Касательное и нормальное ускорения получим для заданного момента времени с помощью соотношений (3.10) и (3.11):

$$w_\tau = \frac{14\pi\cdot(-14\pi^2\sqrt{3}) + (-7\sqrt{3}\pi)\cdot(-7\pi^2)}{7\sqrt{7}\pi} = -3\sqrt{21}\pi^2 \text{ см/с}^2,$$

$$w_n = \sqrt{\left(7\sqrt{13}\pi^2\right)^2 - \left(-3\sqrt{21}\pi^2\right)^2} = 8\sqrt{7}\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Радиус кривизны в этом положении

$$R = \frac{v^2}{w_n} = \frac{\left(7\sqrt{7}\pi\right)^2}{8\sqrt{7}\pi^2} = \frac{49}{8}\sqrt{7} \text{ см}.$$

На рис. 3.10 показан участок траектории точки M (дуга M_0M), скорость точки и ее проекции, ускорение и его проекции, касательное и нормальное ускорения.

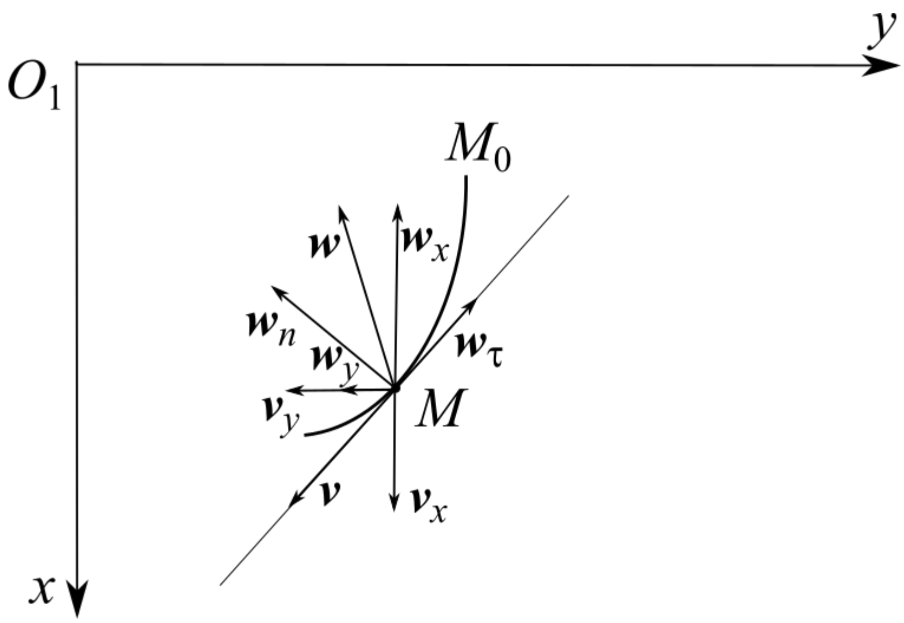

Рис. 3.10

Обратим внимание на то, что касательное ускорение имеет отрицательное значение (см. w_τ в табл. 3.2), следовательно, вектор скорости $\boldsymbol{v}$ и вектор $\boldsymbol{w}_\tau$, направлены в разные стороны вдоль касательной к траектории (рис. 3.10).

В табл. 3.2 приведены численные значения всех полученных величин.

Таблица 3.2

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с^2					Радиус кривизны, см
x	y	v_x	v_y	v	w_x	w_y	w	w_τ	w_n	R
41,56	37	49,98	–38,08	58,18	–239,3	–69,08	249,09	–135,6	208,9	16,2

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.8 (12.1)

Поезд движется со скоростью 72 км/ч; при торможении он получает замедление, равное 0,4 м/с^2. Найти, за какое время до прихода поезда на станцию и на каком от нее расстоянии должно быть начато торможение.

Ответ. 50 с, 500 м.

Задача 3.9 (12.2)

Копровая баба, ударив сваю, движется затем вместе с ней в течение 0,02 с до остановки, причем свая углубляется в землю на 6 см. Определить начальную скорость движения сваи, считая его равнозамедленным.

Ответ. 6 м/с.

Задача 3.10 (12.7)

Поезд, имея начальную скорость 54 км/ч, прошел 600 м в первые 30 с. Считая движение поезда равнопеременным, определить скорость и ускорение поезда в конце 30-й секунды, если рассматриваемое движение поезда происходит на закруглении радиуса $R = 1$ км.

Ответ. $v = 25$ м/с, $w = 0,708$ м/с^2.

Задача 3.11 (12.8)

При отходе от станции скорость поезда возрастает равномерно и достигает величины 72 км/ч через 3 мин после отхода; путь расположен на закруглении радиуса 800 м. Определить касательное, нормальное и полное ускорения поезда через 2 мин после момента отхода от станции.

Ответ. $w_\tau = \dfrac{1}{9}$ м/ с^2, $w_n = \dfrac{2}{9}$ м/с^2, $w = 0,25$ м/с^2.

Задача 3.12 (12.12)

Прямолинейное движение точки происходит по закону $s = \frac{g}{a^2}\left(at + e^{-at}\right)$, где a и g – постоянные величины. Найти начальную скорость точки, а также определить ее ускорение в функции от скорости.

Ответ. $v_0 = 0$, $w = g - av$.

Задача 3.13 (12.13)

Движение точки задано уравнениями

$$x = 10\cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right),\ y = 10\sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$$

(x, y – в сантиметрах, t – в секундах). Найти траекторию точки, величину и направление скорости, а также величину и направление ускорения.

Ответ. Окружность радиуса 10 см; скорость $v = 4\pi$ см/с и направлена по касательной в сторону перехода от оси Ox к оси Oy поворотом на $90°$; ускорение $w = 1{,}6\pi^2$ см/с^2 и направлено к центру.

Задача 3.14 (12.14)

Уравнения движения пальца кривошипа дизеля в период пуска имеют вид $x = 75\cos 4t^2$, $y = 75\sin 4t^2$ (x, y – в сантиметрах, t – в секундах). Найти скорость, касательное и нормальное ускорения пальца.

Ответ. $v = 600t$ см/с, $w_\tau = 600$ см/ с^2, $w_n = 4800t^2$ см/с^2.

Задача 3.15 (12.25)

Точка движется по винтовой линии согласно уравнениям $x = 2\cos 4t$, $y = 2\sin 4t$, $z = 2t$, причем за единицу длины взят метр. Определить радиус кривизны ρ траектории.

Ответ. $\rho = 2\frac{1}{8}$ м.

Задача 3.16 (12.26)

Движение точки задано в полярных координатах уравнениями $r = ae^{kt}$ и $\varphi = kt$, где a и k – заданные постоянные величины. Найти уравнение траектории, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки как функции ее радиус-вектора r.

Ответ. $r = ae^{\varphi}$ – логарифмическая спираль; $v = kr\sqrt{2}$, $w = 2k^2 r$, $\rho = r\sqrt{2}$.

Задача 3.17 (12.33)

Точка M движется по линии пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$. Уравнения движения точки в сферических координатах имеют вид (см. задачу 1.12 (10.21)) $r = R$, $\varphi = \frac{kt}{2}$, $\theta = \frac{kt}{2}$.

Найти проекции и модуль ускорения точки в сферических координатах.

Ответ. $w_r = -\frac{Rk^2}{4}\left(1 + \cos^2\theta\right)$, $w_\varphi = -\frac{Rk^2}{2}\sin\theta$, $w_\theta = \frac{Rk^2}{4}\sin\theta\cos\theta$, $w = \frac{Rk^2}{4}\sqrt{4 + \sin^2\theta}$.

Задача 3.18 (Задание К-1, № 13 [3])

В условиях задачи 2.14 по заданным уравнениям движения точки M найти проекции ускорения, полное, касательное и нормальное ускорения точки, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

Ответ. $w_x = -20{,}04$ см/с^2, $w_y = 1\ 3$, см/с^2, $w = 24{,}3$ см/с^2, $w_\tau = 10{,}47$ см/с^2, $w_n = 21{,}93$ см/с^2, $\rho = 5$ см.

Задача 3.19 (Задача 3.13 [4])

Судно для достройки на плаву спускается на воду по смазанным полозьям с постоянным ускорением. Первый метр пути судно прошло за 1 с.

Сколько времени потребовалось для спуска судна, если длина полозьев 400 м?

Ответ. 20 с.

Задача 3.20 (Задача 3.17 [4])

Точка M движется по окружности радиуса R с касательным ускорением w, величина которого неизменна. В начальный момент точка находилась в M_0 и ее скорость равнялась нулю.

Определить, в какой момент времени величина нормального ускорения станет равной величине касательного ускорения, и вычислить длину дуги, пройденную точкой к этому моменту.

Ответ. $t = \sqrt{\dfrac{R}{w}}$, $s = \dfrac{R}{2}$.

Задача 3.21 (Задача 3.32 [4])

Ускорение точки равно $12t$ м/с и направлено по оси x в отрицательном направлении. При $t = 2$ с скорость точки равнялась 6 м/с и была направлена по оси x в положительном направлении. При $t = 3$ с точка находилась на оси x на расстоянии 50 м от своего начального положения.

Определить уравнение движения точки.

Ответ. $x = -2t^3 + 10t + 14$.

4. Сложное движение точки

В некоторых задачах теоретической механики оказывается необходимым рассмотреть движение точки одновременно по отношению к двум системам отсчета. Одну из них можно считать условно неподвижной или основной, другая движется относительно первой.

Движение точки M в неподвижной системе $O_1x_1x_2x_3$ (рис.4.1) называется ***абсолютным*** или ***сложным***. Траектория KM этого движения называется ***абсолютной траекторией,*** $\boldsymbol{v}_a$ – ***абсолютной скоростью,*** $\boldsymbol{w}_a$ – ***абсолютным ускорением***.

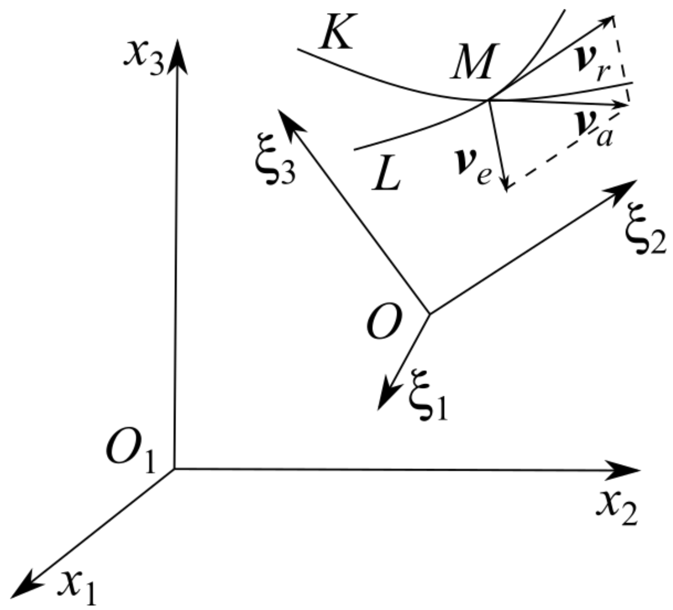

Рис. 4.1

Движение точки M по отношению к подвижной системе $O\xi_1\xi_2\xi_3$ (рис.4.1) называется ***относительным движением***. Такое движение может видеть наблюдатель, связанный с системой $O\xi_1\xi_2\xi_3$ и перемещающийся вместе с ней. Траектория LM, описываемая точкой M в относительном движении, соответствующие скорость $\boldsymbol{v}_r$ и ускорение $\boldsymbol{w}_r$ также называются ***относительными***. Отметим, что при нахождении $\boldsymbol{v}_r$ и $\boldsymbol{w}_r$ систему $O\xi_1\xi_2\xi_3$ можно рассматривать как неподвижную в данный момент времени.

Движение, совершаемое подвижной системой $O\xi_1\xi_2\xi_3$ по отношению к неподвижной $O_1x_1x_2x_3$, является для точки M ***переносным***. Система $O\xi_1\xi_2\xi_3$ в каждой конкретной задаче связана с некоторым твердым телом, которое и совершает переносное движение. Рассмотрим ту точку подвижной системы координат (твердого тела), с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M. Кинематические характеристики этой точки являются ***переносной скоростью*** $\boldsymbol{v}_e$ и ***переносным ускорением*** $\boldsymbol{w}_e$ для точки M.

Между кинематическими характеристиками относительного, переносного и абсолютного движений имеют место следующие зависимости.

Теорема сложения скоростей.

При сложном движении точки ее абсолютная скорость равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e. \tag{4.1}$$

Теорема сложения ускорений (теорема Кориолиса).

При сложном движении точки ее абсолютное ускорение равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений

$$\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_e + \boldsymbol{w}_c. \tag{4.2}$$

Кориолисово *(или поворотное) ускорение равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения* $\boldsymbol{\omega}_e$ *на относительную скорость точки* $\boldsymbol{v}_r$

$$\boldsymbol{w}_c = 2(\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{v}_r). \qquad (4.3)$$

В формуле (4.3) $\boldsymbol{\omega}_e$ – угловая скорость подвижной системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Вектор ускорения Кориолиса $\boldsymbol{w}_c$ направлен перпендикулярно плоскости векторов $\boldsymbol{\omega}_e$ и $\boldsymbol{v}_r$ в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\boldsymbol{\omega}_e$ с $\boldsymbol{v}_r$ видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 4.2).

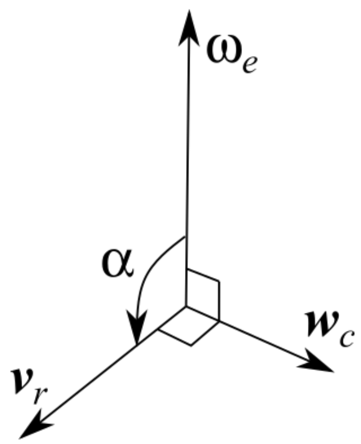

Рис. 4.2

Модуль кориолисова ускорения вычисляется по правилу нахождения модуля векторного произведения

$$|\boldsymbol{w}_c| = 2|\boldsymbol{\omega}_e| \cdot |\boldsymbol{v}_r| \sin\alpha, \qquad (4.4)$$

где α – угол между векторами $\boldsymbol{\omega}_e$ и $\boldsymbol{v}_r$ (рис. 4.2).

Заметим, что ускорение Кориолиса $w_c = 0$, если:

1) переносное движение является поступательным ($\omega_e = 0$);

2) скорость относительного движения v_r или угловая скорость переносного движения ω_e в данный момент времени обратилась в ноль;

3) вектор относительной скорости $\boldsymbol{v}_r$ и вектор угловой скорости переносного движения $\boldsymbol{\omega}_e$ параллельны, т. е. угол между этими векторами $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$.

При решении конкретных задач рекомендуется следующая последовательность действий:

1) разложить абсолютное движение на составляющие его относительное и переносное движения;
2) выбрать неподвижную (абсолютную) систему координат и подвижную, связанную с телом, переносящим точку;
3) определить положение точки на траектории относительного движения, скорость $\boldsymbol{v}_r$ и ускорение $\boldsymbol{w}_r$ в относительном движении, представив, что переносное движение остановлено;
4) перейти к анализу переносного движения, отвлекаясь от относительного, и прежде всего определить угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_e$ и угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}_e$, а затем найти переносную скорость $\boldsymbol{v}_e$ и переносное ускорение $\boldsymbol{w}_e$ как скорость и ускорение точки твердого тела, с которой в данный момент времени совпадает точка, участвующая в сложном движении;
5) если угловая скорость переносного движения $\omega_e \neq 0$, то перейти к определению кориолисова ускорения согласно соотношениям (4.3) и (4.4);
6) найти абсолютную скорость $\boldsymbol{v}_a$, используя теорему сложения скоростей (4.1);

7) найти абсолютное ускорение $\boldsymbol{w}_a$ по теореме Кориолиса (4.2). Отметим, что в самом общем случае соотношение (4.2) запишется в виде

$$\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_r^\tau + \boldsymbol{w}_r^n + \boldsymbol{w}_e^\tau + \boldsymbol{w}_e^n + \boldsymbol{w}_c, \tag{4.5}$$

здесь относительное и переносное ускорения разложены на касательные (вращательные) и нормальные (центростремительные) составляющие, т. е. предусмотрены возможные варианты криволинейных траекторий в относительном и переносном движениях;
8) нахождение величины абсолютного ускорения w_a по формуле (4.5), так же как и величины абсолютной скорости v_a по (4.1), удобно осуществлять методом проектирования каждого слагаемого на три взаимно ортогональные направления.

Рассмотрим задачи § 22–23 задачника [1].

Задача 4.1 (22.7)

Для определения собственной скорости самолета при ветре на Земле отмечают прямую линию известной длины l м, концы которой должны быть хорошо видны сверху. Направление отмеченной прямой должно совпадать с направлением ветра. Вдоль этой прямой самолет пролетел сначала по ветру за время t_1 с, а затем против ветра за время t_2 с. Определить собственную скорость v самолета и скорость V ветра.

Решение

Движение самолета относительно Земли будем считать *абсолютным*. Его можно представить как сложное: движение вместе с потоком воздуха со скоростью $\boldsymbol{V}$ ветра – *переносное* и движение относительно потока с собственной скоростью $\boldsymbol{v}$ – *относительное* движение. Траектория, по условию задачи, – прямая линия, скорости самолета $\boldsymbol{v}$ и ветра $\boldsymbol{V}$ не изменяются во время движения и направлены вдоль той же прямой. При решении задачи будем использовать теорему сложения скоростей (4.1)

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e,$$

где $\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{V}$.

Рассмотрим первый случай, когда вдоль прямой самолет пролетел сначала по ветру, следовательно, скорости относительного и переносного движений направлены в одну сторону, чтобы получить абсолютную скорость, сложим их алгебраически

$$v_a = v_r + v_e = v + V.$$

Расстояние длины l самолет в этом случае пролетел за время t_1, получаем уравнение

$$l = v_a t_1 = (v + V)t_1.$$

Рассмотрим второй случай, теперь вдоль прямой самолет летел против ветра, следовательно, скорости относительного и переносного движений направлены в разные стороны, алгебраическое сложение дает для абсолютной скорости

$$v_a = v_r - v_e = v - V.$$

Расстояние длины l самолет пролетел против ветра за время t_2, получаем уравнение

$$l = v_a t_2 = (v - V)t_2.$$

Для нахождения собственной скорости самолета v и скорости ветра V имеем систему уравнений

$$v + V = \frac{l}{t_1},$$

$$v - V = \frac{l}{t_2},$$

решая которую, получаем

$$v = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right) \text{ м/с},$$

$$V = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) \text{ м/с}.$$

Задача 4.2 (22.9)

Пассажир движущегося со скоростью 72 км/ч по горизонтальному шоссе автомобиля видит через боковое стекло кабины траектории капель дождя наклоненными к вертикали под углом 40°. Определить абсолютную скорость падения дождевых капель отвесно падающего дождя, пренебрегая трением капель о стекло.

Решение

Прямолинейное движение автомобиля с пассажиром является *переносным*, наблюдаемые пассажиром наклоненные траектории капель дождя – это траектории прямолинейного *относительного* движения, их сумма – прямолинейное *абсолютное* движение капель отвесно падающего дождя (рис. 4.3).

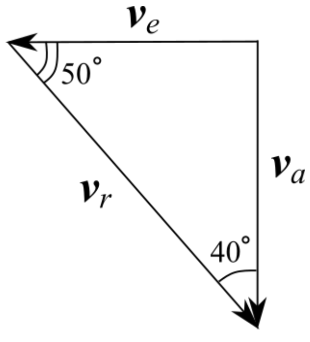

Рис. 4.3

На рис. 4.3 построен векторный треугольник, соответствующий теореме сложения скоростей (4.1)

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e,$$

здесь $v_e = 72$ км/ч $= 20$ м/с, сам вектор $\boldsymbol{v}_e$ направлен по горизонтали. Через конец вектора $\boldsymbol{v}_e$ проведена прямая под углом 40° к вертикали, т. е. под углом 50° к $\boldsymbol{v}_e$, до пересечения с вертикальной прямой, построенной в начале вектора $\boldsymbol{v}_e$. Точка пересечения этих прямых – это концы векторов $\boldsymbol{v}_a$ и $\boldsymbol{v}_r$.

Из векторного треугольника получаем

$$v_a = \frac{v_e}{tg 40°} = \frac{20}{0,8391} = 23,8 \text{ м/с.}$$

Задача 4.3 (22.11)

Корабль плывет на юг со скоростью $36\sqrt{2}$ км/ч. Второй корабль идет курсом на юго-восток со скоростью 36 км/ч. Найти величину и направление скорости второго корабля, определяемые наблюдателем, находящимся на палубе первого корабля.

Решение

Прямолинейное движение второго корабля на юго-восток со скоростью $v_2 = 36$ км/ч, являющееся *абсолютным,* представим в виде суммы двух движений: 1) *переносное* – прямолинейное движение первого корабля на юг со скоростью $v_e = v_1 = 36\sqrt{2}$ км/ч и 2) прямолинейное *относительное* со скоростью v_r, наблюдаемое с палубы первого корабля. Построим векторный треугольник, соответствующий теореме сложения скоростей (4.1)

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e,$$

в этом соотношении вектор $\boldsymbol{v}_e$ направлен на юг, вектор $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_2$ направлен на юго-восток, они имеют общее начало, между ними угол 45°. Вектор-замыкающий, начинающийся в конце вектора $\boldsymbol{v}_e$ и заканчивающийся в конце вектора $\boldsymbol{v}_a$, является искомым вектором относительного движения $\boldsymbol{v}_r$ (рис. 4.4).

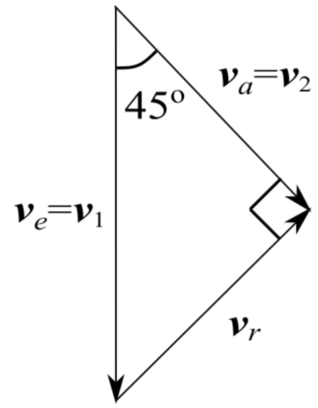

Рис. 4.4

Из треугольника скоростей по теореме косинусов получаем

$$v_r^2 = v_a^2 + v_e^2 - 2v_a v_e \cos 45° = 36^2 + \left(36\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 36 \cdot 36\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 36^2.$$

Итак, величина скорости второго корабля, определяемая наблюдателем, находящимся на палубе первого корабля, $v_r = 36$ км/ч. Для определения направления относительной скорости второго корабля найдем угол α между $\boldsymbol{v}_a$ и $\boldsymbol{v}_r$, также используя теорему косинусов,

$$\cos\alpha = \frac{v_a^2 + v_r^2 - v_e^2}{2v_a v_r} = \frac{36^2 + 36^2 - \left(36\sqrt{2}\right)^2}{2 \cdot 36 \cdot 36} = 0,$$

следовательно, $\alpha = 90°$, скорость $\boldsymbol{v}_r$ направлена на северо-восток.

Задача 4.4 (22.17)

В кулисном механизме при качании кривошипа OC вокруг оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, ползун A, перемещаясь вдоль кривошипа OC, приводит в движение стержень AB, движущийся в вертикальных направляющих K. Расстояние $OK = l$. Определить скорость движения ползуна A относительно кривошипа OC в функции от угловой скорости ω и угла поворота φ кривошипа.

Решение

Прямолинейное движение ползуна A вместе со стержнем AB, движущимся поступательно в вертикальных направляющих, является *абсолютным.* Разложим его на сумму двух движений: 1) *переносное* – вращательное движение кривошипа OC с угловой скоростью ω и 2) прямолинейное *относительное* со скоростью $\boldsymbol{v}_r$ вдоль кривошипа OC (рис. 4.5).

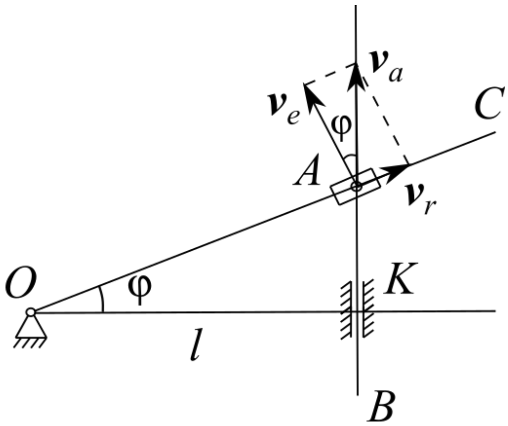

Рис. 4.5

Скорость переносного движения находим как скорость точки кривошипа OC

$$v_e = \omega \cdot OA = \omega \cdot \frac{l}{\cos\varphi},$$

вектор $\boldsymbol{v}_e$ направлен перпендикулярно кривошипу OC (рис. 4.5).

Абсолютная скорость находится по теореме сложения скоростей (4.1)

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e,$$

вектор $\boldsymbol{v}_a$ является диагональю параллелограмма, построенного на $\boldsymbol{v}_r$ и $\boldsymbol{v}_e$, и должен быть направлен вдоль стержня AB, движущегося в вертикальных направляющих K.

Угол между векторами скоростей $\boldsymbol{v}_a$ и $\boldsymbol{v}_e$ легко определяется как угол с перпендикулярными сторонами к углу поворота кривошипа φ. Теперь из параллелограмма скоростей находим скорость движения ползуна A относительно кривошипа OC

$$v_r = v_e \cdot tg\varphi = l\omega \frac{tg\varphi}{\cos\varphi}.$$

Задача 4.5 (22.24)

Восточная, северная и вертикальная составляющие скорости точки M относительно Земли соответственно равны v_E, v_N, v_h. Высота точки над поверхностью Земли в данный момент равна h, широта места φ. Радиус Земли R, ее угловая скорость ω. Определить составляющие абсолютной скорости точки.

Решение

В условии задачи задана *относительная* скорость $v(v_E, v_N, v_h)$ точки M своими составляющими в подвижной системе координат, связанной с Землей, при этом ось ξ_1 направлена на восток, ось ξ_2 – на север, ось ξ_3 – вертикально вверх.

Суточное вращение Земли с угловой скоростью ω для точки M является *переносным*. Скорость этого движения v_e находится как произведение угловой скорости $\omega_e = \omega$ на расстояние MM_1 до оси вращения (ось Земли)

$$v_e = \omega MM_1 = \omega\left(R+h\right)\cos\varphi$$

и направлена вдоль параллели Земли на восток (рис. 4.6).

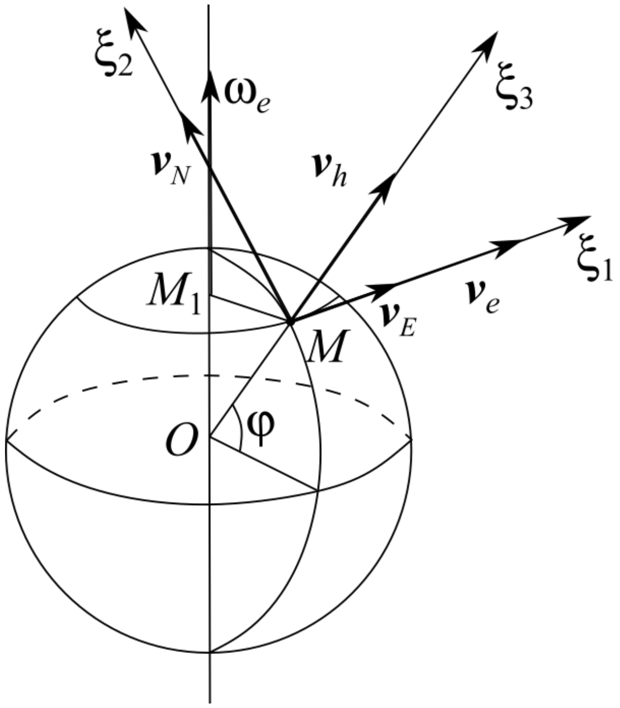

Рис. 4.6

Определим теперь *абсолютную* скорость по теореме сложения скоростей (4.1)

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e .$$

В проекциях на оси введенной выше системы координат получаем

$$v_1 = v_E + v_e = v_E + \omega\left(R+h\right)\cos\varphi ,$$

$$v_2 = v_N ,$$

$$v_3 = v_h .$$

Задача 4.6 (22.10)

Берега реки параллельны; лодка вышла из точки A и, держа курс перпендикулярно берегам, достигла противоположного берега через 10 минут после отправления. При этом она попала в точку C, лежащую на 120 м ниже точки A по течению реки. Чтобы, двигаясь с прежней относительной скоростью, попасть из точки A в точку B, лежащую на прямой AB, перпендикулярной берегам, лодке надо держать курс под некоторым углом к прямой AB и против течения; в этом случае лодка достигает противоположного берега через 12,5 минут. Определить ширину реки l, относительную скорость u лодки по отношению к воде и скорость v течения реки.

Решение

Движение лодки с точки зрения наблюдателя, находящегося на берегу реки, есть *абсолютное*. Первый раз оно происходило по прямой AC, второй раз – по прямой AB. Течение реки для лодки является *переносным* движением, тогда $v_e = v$. Скорость лодки по отношению к воде – это *относительная* скорость $v_r = u$.

1) Рассмотрим движение лодки из точки A в точку C (рис. 4.7), изобразим треугольник скоростей согласно теореме сложения скоростей (4.1)

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e.$$

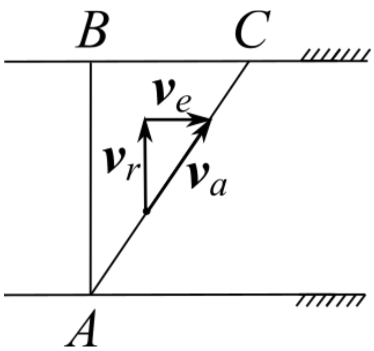

Рис. 4.7

В этом случае вектор абсолютной скорости $\boldsymbol{v}_a$ направлен вдоль прямой AC, вектор относительной скорости $\boldsymbol{v}_r$ перпендикулярен берегам реки, вектор переносной скорости $\boldsymbol{v}_e$ параллелен берегам. Геометрический треугольник ACB подобен треугольнику скоростей, поэтому можем записать отношение

$$\frac{BC}{v_e} = \frac{AB}{v_r} = \frac{AC}{v_a}. \tag{4.6}$$

Лодка, двигаясь с постоянной скоростью v_a, достигла противоположного берега за время $t_1 = 10$ мин, следовательно, $AC = v_a t_1$, тогда отношение (4.6) может быть продолжено

$$\frac{BC}{v_e} = \frac{AB}{v_r} = \frac{AC}{v_a} = t_1, \tag{4.7}$$

что позволяет определить переносную скорость v_e, т. е. скорость течения реки v

$$v = v_e = \frac{BC}{t_1} = 12 \text{ м/мин.}$$

Соотношение (4.7) также позволяет записать уравнение, связывающее между собой пока неизвестные ширину реки l и относительную скорость $v_r = u$ лодки

$$AB = l = v_r t_1 = u t_1. \tag{4.8}$$

2) Рассмотрим движение лодки из точки A в точку B, изобразим треугольник скоростей согласно теореме сложения скоростей (4.1)

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e.$$

В этом случае вектор абсолютной скорости $\boldsymbol{v}_a$ перпендикулярен берегам, т. е. направлен вдоль прямой AB, вектор относительной скорости

$\boldsymbol{v}_r$ направлен по курсу лодки под некоторым углом к прямой AB и против течения, вектор переносной скорости $\boldsymbol{v}_e$ параллелен берегам реки (рис. 4.8).

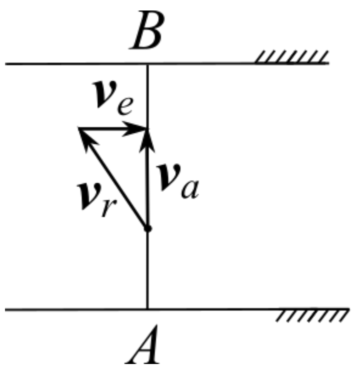

Рис. 4.8

Найдем величину абсолютной скорости v_a

$$v_a = \sqrt{v_r^2 - v_e^2} = \sqrt{u^2 - v^2}\ . \tag{4.9}$$

Лодка, двигаясь с постоянной скоростью v_a, достигла противоположного берега за время $t_2 = 12{,}5$ минут, следовательно,

$$AB = l = v_a t_2\,. \tag{4.10}$$

В соотношениях (4.8) и (4.10) приравниваем правые части, подставляем v_a из (4.9) и возводим в квадрат, получаем уравнение для нахождения относительной скорости лодки u

$$\left(u t_1\right)^2 = \left(u^2 - v^2\right) t_2^2\,,$$

отсюда находим

$$u = \frac{v t_2}{\sqrt{t_2^2 - t_1^2}} = \frac{12 \cdot 12{,}5}{\sqrt{12{,}5^2 - 10^2}} = 20 \text{ м/мин.}$$

Определить ширину реки l можно, вернувшись к уравнению (4.8), получаем

$$l = u t_1 = 20 \cdot 10 = 200 \text{ м.}$$

Задача 4.7 (23.71)

Стержень скользит в вертикальных направляющих, опираясь нижним концом на гладкую наклонную поверхность треугольной призмы. Призма движется по горизонтали вправо с постоянным ускорением w_0. Найти ускорение стержня.

Решение

Рассмотрим нижний конец стержня, для этой точки движение призмы по горизонтали вправо является *переносным* движением с постоянным ускорением $w_e = w_0$. Скольжение конца стержня вдоль наклонной плоскости призмы – *относительное движение.* Перемещение вместе со стержнем в вертикальных направляющих – *абсолютное движение* (рис. 4.9).

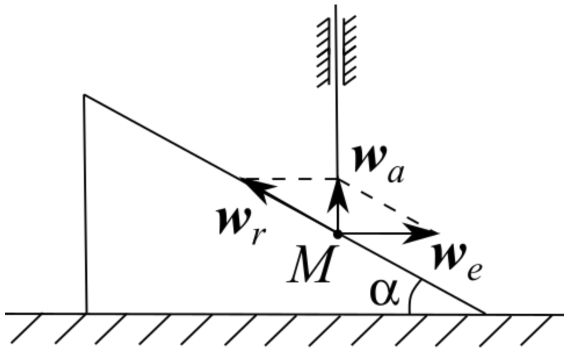

Рис. 4.9

Найти ускорение стержня – означает найти абсолютное ускорение нижнего конца стержня. Применим теорему сложения ускорений (4.2)

$$\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_e + \boldsymbol{w}_c.$$

Переносное движение в рассматриваемой задаче является поступательным, поэтому ускорение Кориолиса $w_c = 0$.

В точке M (нижний конец стержня) построим $\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_e$ по правилу параллелограмма (рис. 4.9). Заметим, что острый угол в параллелограмме равен углу наклона ребра призмы α. Из геометрических соображений находим ускорение стержня

$$w_a = w_e \, tg\alpha = w_0 \, tg\alpha .$$

Задача 4.8 (23.12)

Струя воды течет по горизонтальной трубе OA, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью, равной 2π рад/с. Определить кориолисово ускорение w_c в той точке струи, где относительная скорость $v_r = \frac{21}{11}$ м/с. Принять для π приближенное значение $\pi = \frac{22}{7}$.

Решение

В рассматриваемой задаче движение струи воды по горизонтальной трубе OA – движение *относительное*, оно прямолинейное, относительная скорость $\boldsymbol{v}_r$ направлена вдоль трубы OA.

Вращение трубы вокруг вертикальной оси – *переносное* движение, угловая скорость его $\omega_e = 2\pi$ рад/с, вектор $\boldsymbol{\omega}_e$ лежит на оси вращения (рис. 4.10).

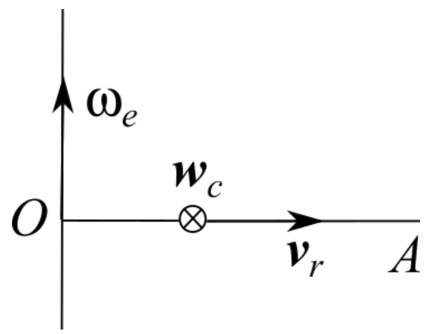

Рис. 4.10

Ускорение Кориолиса находим согласно (4.3)

$$\boldsymbol{w}_c = 2\left(\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{v}_r\right).$$

Как векторное произведение $\boldsymbol{w}_c$ перпендикулярен плоскости рисунка и направлен от читателя (использовано обозначение: кружок с косым крестиком $\otimes$ – вектор, уходящий за плоскость рисунка). Найдем модуль Кориолисова ускорения

$$\left|\boldsymbol{w}_c\right| = 2\left|\boldsymbol{\omega}_e\right| \cdot \left|\boldsymbol{v}_r\right| \sin\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{21}{11} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{21}{11} = 24 \text{ м/с}^2.$$

Задача 4.9 (23.45)

Точка движется со скоростью 2 м/с по окружности обода диска диаметра 4 м. Диск вращается в противоположном направлении, имея в данный момент угловую скорость 2 рад/с и угловое ускорение 4 рад/с^2. Определить абсолютные скорость и ускорение точки.

Решение

Движение точки M по окружности обода диска является *относительным* движением, скорость $v_r = 2$ м/с постоянная и направлена по касательной к окружности, тогда касательное ускорение $w_r^\tau = 0$. Найдем относительное ускорение как центростремительное

$$w_r = w_r^n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{2^2}{2} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Вектор относительной скорость $\boldsymbol{v}_r$ и вектор относительного ускорения $\boldsymbol{w}_r$ изображены на рис. 4.11, так как $\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{w}_r^n$, то направлен вектор $\boldsymbol{w}_r$ к центру окружности.

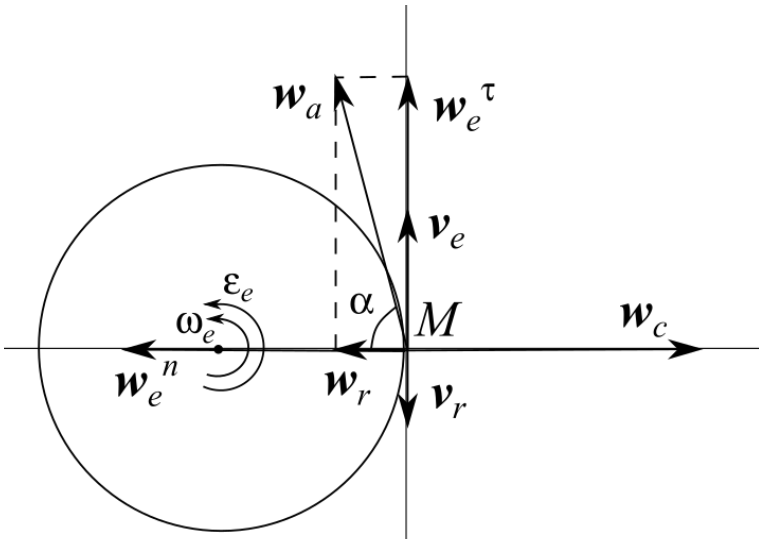

Рис. 4.11

Вращение диска вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через центр окружности, для точки будет *переносным*, по условию задачи в данный момент времени угловая скорость $\omega_e = 2$ рад/с, угловое ускорение $\varepsilon_e = 4$ рад/с^2, лежат оба вектора на оси вращения, на рис.4.11 отмечены круговыми стрелками.

Переносная скорость $\boldsymbol{v}_e$ направлена по касательной к окружности в сторону противоположную $\boldsymbol{v}_r$ (по условию задачи), вычислим ее величину

$$v_e = \omega_e R = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с}.$$

Переносное ускорение имеет касательную и нормальную составляющие $\boldsymbol{w}_e = \boldsymbol{w}_e^{\tau} + \boldsymbol{w}_e^{n}$. Вектор касательного ускорения $\boldsymbol{w}_e^{\tau}$ сонаправлен с вектором скорости $\boldsymbol{v}_e$, а вектор нормальной составляющей $\boldsymbol{w}_e^{n}$ направлен из точки M к оси вращения по радиусу (рис.4.11).

Найдем в данный момент времени составные части переносного ускорения

$$w_e^{\tau} = R \cdot \varepsilon_e = 2 \cdot 4 = 8 \text{ м/с}^2,$$

$$w_e^{n} = R \cdot \omega_e^2 = 2 \cdot 2^2 = 8 \text{ м/с}^2.$$

Кориолисово ускорение находим согласно (4.3)

$$\boldsymbol{w}_c = 2\left(\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{v}_r\right),$$

по правилу векторного произведения вектор $\boldsymbol{w}_c$ направлен перпендикулярно векторам-сомножителям, следовательно, лежит в плоскости рисунка и направлен противоположно $\boldsymbol{w}_r^n$, модуль его вычисляем согласно (4.4)

$$\left|\boldsymbol{w}_c\right| = 2\left|\boldsymbol{\omega}_e\right| \cdot \left|\boldsymbol{v}_r\right| \sin\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot = 8 \text{ м/с}^2.$$

Абсолютную скорость точки M найдем как разность относительной и переносной скоростей, так как они лежат на одной прямой, но направлены в разные стороны

$$v_a = v_e - v_r = 4 - 2 = 2 \text{ м/с}.$$

Абсолютное ускорение точки M в данный момент найдем из векторного равенства (4.5), которое в решаемой задаче принимает вид

$$\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_e^\tau + \boldsymbol{w}_e^n + \boldsymbol{w}_c.$$

Модуль абсолютного ускорения находим методом проекций

$$w_{a1} = w_e^\tau = 8 \text{ м/с}^2,$$

$$w_{a2} = w_r + w_e^n - w_c = 2 + 8 - 8 = 2 \text{ м/с}^2,$$

$$w_a = \sqrt{w_{a1}^2 + w_{a2}^2} = \sqrt{8^2 + 2^2} = 8{,}246 \text{ м/с}^2.$$

направлен вектор абсолютного ускорения под углом α к радиусу таким, что

$$\cos\alpha = \frac{w_{a2}}{w_a} = \frac{2}{8{,}246} = 0{,}2425, \quad \alpha = 76^\circ.$$

Задача 4.10 (Задание К-10, № 28 [3])

По заданным уравнениям относительного движения точки M и переносного движения тела D определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.

Схема механизма показана на рис. 4.12, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 4.1.

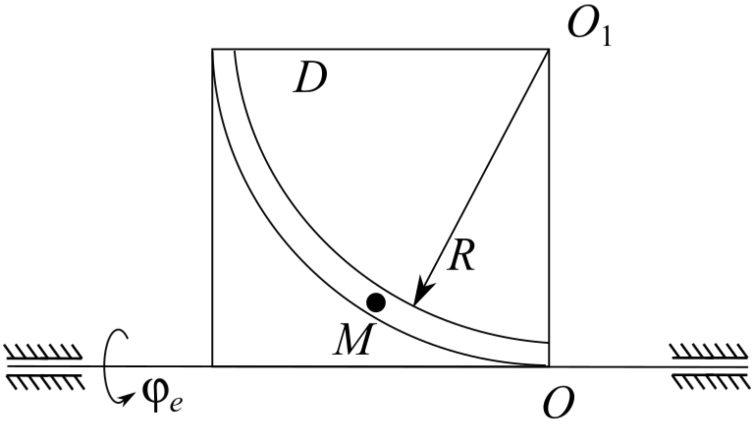

Рис. 4.12

Табл. 4.1

Уравнение относительного движения точки M $OM = s_r$, см	Уравнение движения тела D φ_e, рад	t_1, с	R, см
$2{,}5\pi t^2$	$\varphi_e = 2t^3 - 5t$	2	40

Примечание: OM – дуга окружности, положение точки M на схеме соответствует положительному значению s_r.

Решение

Будем считать, что в расчетный момент времени плоскость чертежа (рис. 4.12) совпадает с плоскостью тела (квадрата) D.

Положение точки M на квадрате определяется расстоянием $s_r = OM$, отсчитываемом по дуге окружности. Находим путь, пройденный точкой за время $t = t_1 = 2$ с,

$$s_r(2) = 2{,}5\pi \cdot 2^2 = 10\pi \text{ см.}$$

Определяем соответствующий центральный угол α

$$\alpha(2) = \frac{s_r(2)}{R} = \frac{10\pi}{40} = \frac{\pi}{4},$$

перемещаем в соответствующее положение (середина дуги) точку M.

Рассмотрим *относительное движение* точки M, траекторией является четверть окружности. Относительная скорость $\boldsymbol{v}_r$ направлена по касательной к окружности и определяется по формуле (2.3)

$$v_r = \frac{ds_r}{dt} = 5\pi t.$$

Относительное ускорение должно быть разложено по двум взаимно ортогональным направлениям (3.2)

$$\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{w}_r^{\tau} + \boldsymbol{w}_r^{n}.$$

Найдем касательную и нормальную составляющие, используя соотношения (3.3)

$$w_r^{\tau} = \frac{dv_r}{dt} = 5\pi, \quad w_r^{n} = \frac{v_r^2}{R}.$$

Величины кинематических характеристик относительного движения точки M посчитаем при $t = t_1 = 2$ с.

$$v_r(2) = 10\pi \text{ см/с}, \quad w_r^{\tau}(2) = 5\pi \text{ см/с}^2, \quad w_r^{n} = \frac{v_r^2}{R} = \frac{(10\pi)^2}{40} = 2{,}5\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Положительные знаки у величины $v_r(2)$ и у величины $w_r^\tau(2)$ показывают, что векторы $\boldsymbol{v}_r$ и $\boldsymbol{w}_r^\tau$ направлены в сторону возрастания дуги траектории относительного движения (рис. 4.13).

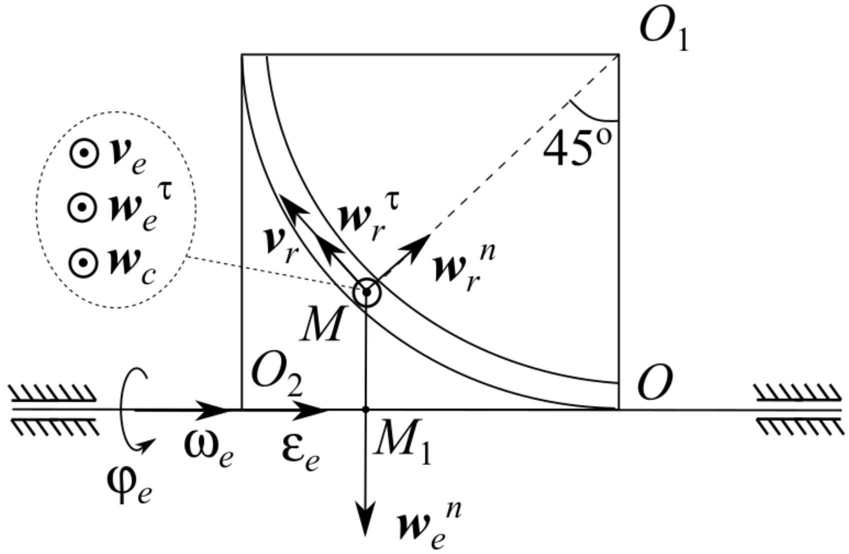

Рис. 4.13

Вектор нормальной составляющей ускорения $\boldsymbol{w}_r^n$ направим к центру кривизны этой траектории, т. е. от M к O_1.

Далее перейдем к рассмотрению *переносного движения*, это вращение квадрата вокруг оси O_2O, направление увеличения угла вращения φ_e указано на рис. 4.12 круговой стрелкой.

Прежде всего определим угловую скорость ω_e и угловое ускорение ε_e как функции времени

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 6t^2 - 5,$$

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = 12t.$$

Вычислим их при $t = t_1 = 2$ с

$$\omega_e(2) = 19 \text{ с}^{-1}, \ \ \varepsilon_e(2) = 24 \text{ с}^{-2}.$$

Одинаковые и при этом положительные знаки у величин $\omega_e(2)$ и $\varepsilon_e(2)$ показывают, что векторы угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_e$ и углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ в данный момент времени направлены от O_2 к O, т. е. вращение квадрата происходит ускоренно в сторону возрастания угла вращения φ_e (рис. 4.13).

Представим теперь, что точка M замерла в указанном выше положении $\left(\alpha = \dfrac{\pi}{4}\right)$, т. е. отвлечемся от относительного движения. Определим расстояние точки M до оси вращения

$$MM_1(2) = R - R\cos\alpha = 40\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ см}.$$

MM_1 – это радиус окружности, описываемой той точкой квадрата, с которой в данный момент времени совпадает точка M, и представляющей собой траекторию точки в переносном движении. Плоскость этой окружности перпендикулярна плоскости рисунка.

Переносная скорость $\boldsymbol{v}_e$ направлена по касательной к окружности в сторону вращения тела, т. е. перпендикулярно плоскости рисунка и направлена на читателя. Переносное ускорение имеет касательную (вращательную) и нормальную (центростремительную) составляющие $\boldsymbol{w}_e = \boldsymbol{w}_e^\tau + \boldsymbol{w}_e^n$. Вектор вращательного ускорения $\boldsymbol{w}_e^\tau$ сонаправлен с вектором скорости $\boldsymbol{v}_e$, а вектор центростремительной составляющей $\boldsymbol{w}_e^n$ направлен из точки M по перпендикуляру к оси вращения (M_1M – это кратчайшее расстояние до оси вращения, см. рис. 4.13).

Найдем при $t = t_1 = 2$ с модуль переносной скорости

$$v_e = M_1M \cdot \omega_e = 19 \cdot 40\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 222{,}60 \text{ см/с}$$

и составные части переносного ускорения

$$w_e^\tau = M_1M \cdot \varepsilon_e = 24 \cdot 40\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 281{,}18 \text{ см/с}^2,$$

$$w_e^n = M_1M \cdot \omega_e^2 = 19^2 \cdot 40\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4229{,}38 \text{ см/с}^2.$$

Кориолисово ускорение строим согласно (4.3)

$$\boldsymbol{w}_c = 2\left(\boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{v}_r\right),$$

следовательно, в соответствии с правилом векторного произведения вектор $\boldsymbol{w}_c$ направлен перпендикулярно к плоскости квадрата (так как оба вектора-сомножителя лежат в плоскости рисунка) в ту же сторону, что и векторы $\boldsymbol{v}_e$ и $\boldsymbol{w}_e^\tau$. Модуль ускорения Кориолиса определяем при $t = t_1 = 2$ с из соотношения (4.4)

$$\left|\boldsymbol{w}_c\right| = 2\left|\boldsymbol{\omega}_e\right| \cdot \left|\boldsymbol{v}_r\right| \sin\frac{3\pi}{4} = 2 \cdot 19 \cdot 10\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 844{,}12 \text{ см/с}^2.$$

Абсолютную скорость точки M найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e,$$

но так как векторы $\boldsymbol{v}_r$ и $\boldsymbol{v}_e$ взаимно перпендикулярны, то модуль абсолютной скорости вычисляем следующим образом

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = 224{,}81 \text{ см/с}.$$

Абсолютное ускорение точки M определим из векторного равенства (4.5)

$$\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_r^\tau + \boldsymbol{w}_r^n + \boldsymbol{w}_e^\tau + \boldsymbol{w}_e^n + \boldsymbol{w}_c.$$

Модуль абсолютного ускорения находим методом проекций, для этого вводим систему координат $M\xi_1\xi_2\xi_3$, здесь ось $M\xi_1$ перпендикулярна плоскости рисунка, ось $M\xi_2$ лежит на прямой MO_1, тогда ось $M\xi_3$ направлена по касательной к окружности. Проектируя векторное равенство, получаем

$$w_{a1} = w_e^\tau + w_c = 1125{,}30 \text{ см/с}^2,$$

$$w_{a2} = w_r^n - w_e^n \frac{\sqrt{2}}{2} = -2965{,}95 \text{ см/с}^2,$$

$$w_{a3} = w_r^\tau - w_e^n \frac{\sqrt{2}}{2} = -2974{,}91 \text{ см/с}^2,$$

тогда вычисляем модуль абсолютного ускорения

$$w_a = \sqrt{w_{a1}^2 + w_{a2}^2 + w_{a3}^2} = 4348{,}94 \text{ см/с}^2.$$

На рис. 4.13 изображены как векторы все найденные кинематические характеристики точки M, но без соблюдения масштаба. Для векторов, перпендикулярных плоскости чертежа, использовано обозначение: кружок с точкой ⊙ – вектор, смотрящий на читателя.

В таблице 4.2 приведены численные значения всех полученных величин.

Табл. 4.2

ω_e, с$^{-1}$	Скорость, м/с			ε_e, с$^{-2}$	Ускорение, м/с^2					
	v_r	v_e	v_a		w_r^τ	w_r^n	w_e^τ	w_e^n	w_c	w_a
19	0,314	2,226	2,248	24	0,157	0,247	2,812	42,294	8,441	43,489

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.11 (22.1)

Корабль движется прямолинейно со скоростью v_0. На высоте h над морем со скоростью v_1 летит самолет тем же курсом (рис. 4.14). Определить расстояние l, отсчитываемое по горизонтали, на котором надо сбросить вымпел, чтобы он попал на корабль. Сопротивлением воздуха движению вымпела пренебречь.

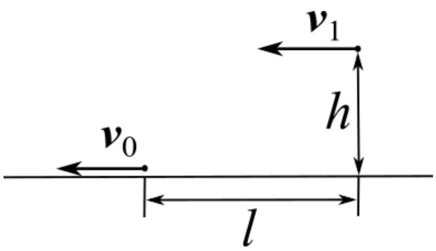

Рис. 4.14

Ответ. $l = (v_1 - v_0)\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

Задача 4.12 (22.2)

Решить задачу 4.11, если самолет летит с той же скоростью навстречу движущемуся кораблю.

Ответ. $l = (v_1 + v_0)\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

Задача 4.13 (22.3)

Корабль, проходящий точку A, движется с постоянной по модулю и направлению скоростью v_0. Под каким углом β к прямой AB надо начать двигаться катеру из точки B, чтобы встретиться с кораблем, если скорость катера постоянна по модулю и направлению и равна v_1? Линия AB составляет угол ψ_0 с перпендикуляром к курсу корабля (рис. 4.15).

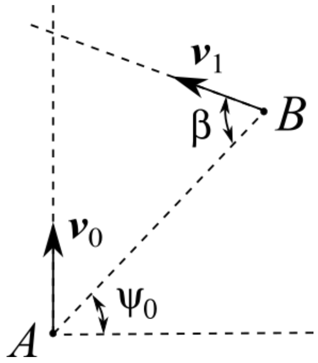

Рис. 4.15

Ответ. $\sin\beta = \dfrac{v_0}{v_1}\cos\psi_0$.

Задача 4.14 (22.12)

Линейка AB эллипсографа приводится в движение стержнем OC, вращающимся вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω_0. Кроме того, весь механизм вместе с направляющими вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку O, с постоянной угловой скоростью, равной также ω_0 (рис.4.16).

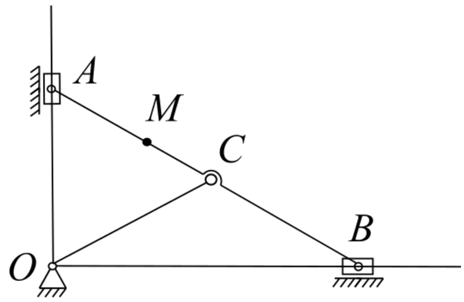

Рис. 4.16

Найти абсолютную скорость произвольной точки M линейки как функцию расстояния $AM = l$ в предположении, что вращение стержня OC и вращение всего механизма происходит в противоположных направлениях.

Ответ. $v_M = (AB - 2l)\omega_0$.

Задача 4.15 (22.13)

Решить задачу 4.14 для случая, когда оба вращения происходят в одном направлении.

Ответ. v_M не зависит от положения точки M и равна $AB \cdot \omega_0$.

Задача 4.16 (22.14)

Шары центробежного регулятора Уатта, вращающегося вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с, благодаря изменению нагрузки машины отходят от этой оси, имея для своих стержней в данном положении угловую скорость $\omega_1 = 1,2$ рад/с. Найти абсолютную скорость шаров регулятора в рассматриваемый момент, если длина стержней $l = 0,5$ м, расстояние между осями их подвеса $2e = 0,1$ м, углы, образованные стержнями с осью регулятора, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 30°$ (рис. 4.17).

Ответ. $v = 3,06$ м/с.

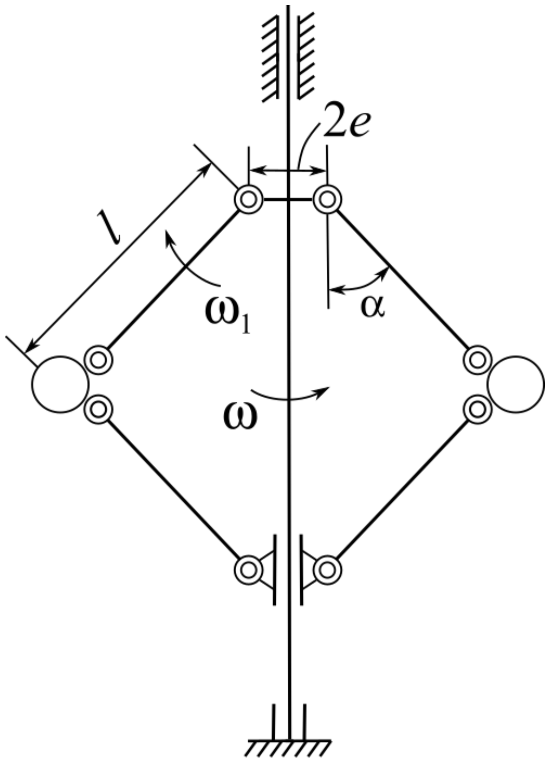

Рис. 4.17

Задача 4.17 (22.27)

На токарном станке обтачивается цилиндр диаметра $d = 80$ мм. Шпиндель делает $n = 30$ об/мин. Скорость продольной подачи $v = 0,2$ мм/с. Определить скорость v_r резца относительно обрабатываемого цилиндра.

Ответ. $v_r = 125,7$ мм/с, $\operatorname{tg}\alpha = 628$, где α — угол между v_r и осью шпинделя.

Задача 4.18 (Задача 5.8 [4])

Две подводные лодки плывут друг за другом на расстоянии s одна от другой с одинаковой скоростью v. Звук локатора, установленного на задней лодке, настигает впереди плывущую лодку и, отразившись, возвращается на экран локатора. Определить время от выхода звука до возвращения его, если скорость распространения звука в воде c.

Ответ. $t = \dfrac{2sc}{c^2 - v^2}$.

Задача 4.19 (Задача 5.9 [4])

При запуске искусственного спутника Земли ему необходимо сообщить вблизи поверхности Земли абсолютную горизонтальную скорость 8 км/сек.

Определить наименьшую и наибольшую относительные горизонтальные скорости, которые необходимо сообщить спутнику, если запуск производится на экваторе; на широте 60°; на Северном полюсе. Радиус Земли $R = 6400$ км.

Ответ. На экваторе $v_{r\,\max} = 8,465$ км/с**,** $v_{r\,\min} = 7,535$ км/с,

на широте 60° $v_{r\,\max} = 8,233$ км/с, $v_{r\,\min} = 7,767$ км/с,

на Северном и Южном полюсах $v_{r\,\max} = v_{r\,\min} = 8$ км/с.

Задача 4.20 (23.1)

Наклонная плоскость AB, составляющая угол $45°$ с горизонтом, движется прямолинейно параллельно оси Ox с постоянным ускорением $0{,}1$ м/с^2 (рис. 4.18).

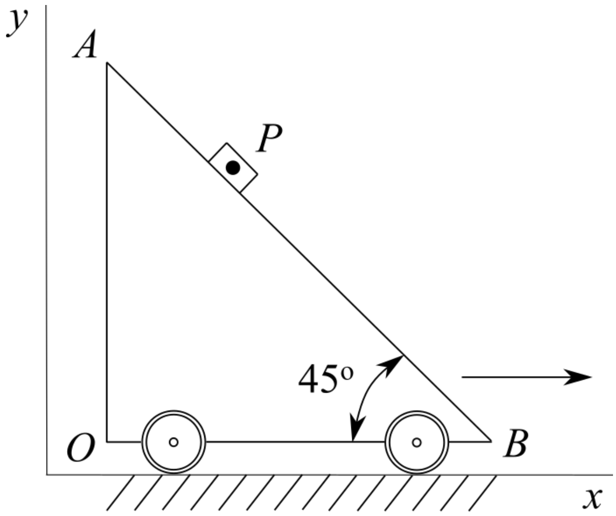

Рис. 4.18

По этой плоскости спускается тело P с постоянным относительным ускорением $0{,}1\sqrt{2}$ м/с^2; начальные скорости плоскости и тела равны нулю, начальное положение тела определяется координатами $x = 0$, $y = h$. Определить траекторию, скорость и ускорение абсолютного движения тела.

Ответ. $y = h - \dfrac{x}{2}$, $v = 0{,}1\sqrt{5}t$ м/с, $w = 0{,}1\sqrt{5}$ м/с^2.

Задача 4.21 (23.70)

На токарном станке обтачивается цилиндр диаметра $d = 80$ мм. Шпиндель делает $n = 30$ об/мин. Скорость продольной подачи постоянна и равна 0,2 мм/с. Определить скорость и ускорение резца относительно обрабатываемого цилиндра.

Ответ. $v_r = 125{,}7$ мм/с, $w_e = 789{,}5$ мм/с^2, $w_r = w_c = 394{,}8$ мм/с^2.

Задача 4.22 (23.5)

На тележке, движущейся по горизонтали вправо с ускорением $w = 0,492$ м/с^2, установлен электрический мотор, ротор которого при пуске в ход вращается согласно уравнению $\varphi = t^2$, причем угол φ измеряется в радианах. Радиус ротора равен $0,2$ м. Определить абсолютное ускорение точки A, лежащей на ободе ротора, при $t = 1$ с, если в этот момент точка A находится в положении, указанном на рис. 4.19.

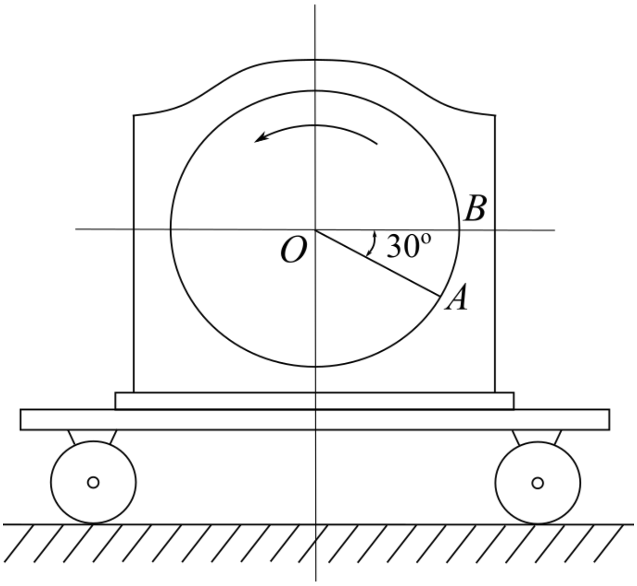

Рис. 4.19

Ответ. $w_A = 0,746$ м/с^2, вектор абсолютного ускорения направлен по вертикали вверх.

Задача 4.23 (23.6)

Определить в задаче 4.22 угловую скорость равномерного вращения ротора, при которой точка A, находясь в положении B, имеет абсолютное ускорение, равное нулю.

Ответ. $\omega = 1,57$ рад/с.

Задача 4.24 (23.27)

По радиусу диска, вращающегося вокруг оси O_1O_2 с угловой скоростью $\omega = 2t$ рад/с, в направлении от центра диска к его ободу движется точка M по закону $OM = 4t^2$ см (рис. 4.20). Радиус OM составляет с осью O_1O_2 угол $60°$. Определить величину абсолютного ускорения точки M в момент $t = 1$ с.

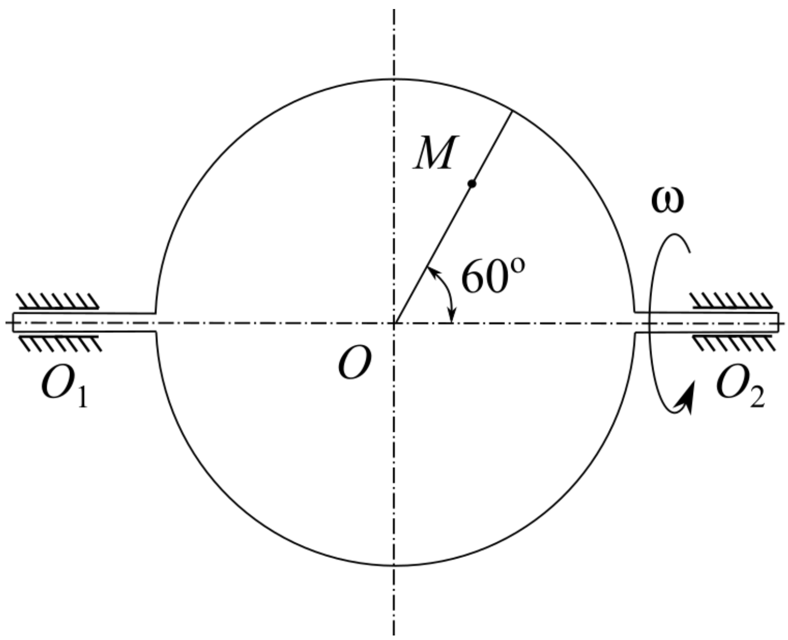

Рис. 4.20

Ответ. $w_M = 35{,}56$ см/с^2.

Задача 4.25 (23.57)

Река Нева течет с востока на запад по параллели $60°$ северной широты со скоростью $v_r = 1{,}11$ м/с. Найти составляющие абсолютного ускорения частицы воды. Радиус Земли $R = 64 \cdot 10^5$ м.

Ответ. $w_e = 1{,}692 \cdot 10^{-2}$ м/с^2, $w_r = 3{,}86 \cdot 10^{-7}$ м/с^2, $w_c = 1{,}616 \cdot 10^{-4}$ м/с^2.

Задача 4.26 (23.36)

Шарик P движется со скоростью 1,2 м/с от A к B по хорде AB диска, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. Найти абсолютное ускорение шарика, когда он находится на кратчайшем расстоянии от центра диска, равном 30 см. В этот момент угловая скорость диска равна 3 рад/с, угловое замедление равно 8 рад/с^2.

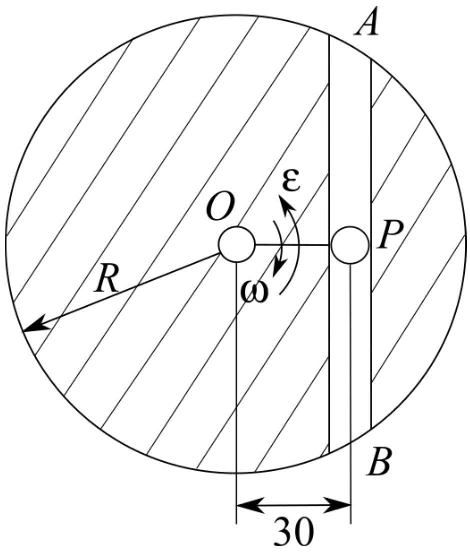

Рис. 4.21

Ответ. $w_a = 10{,}18$ м/с^2.

Задача 4.27 (23.37)

Решить предыдущую задачу (4.26) в предположении, что диск вращается вокруг диаметра, параллельного хорде.

Ответ. $w_a = 3{,}612$ м/с^2.

Задача 4.28 (23.38)

Решить задачу (4.26) при условии, что осью вращения диска является диаметр, перпендикулярный хорде.

Ответ. $w_a = 7,2$ м/с^2.

Задача 4.29 (23.52)

Река ширины 1000 м течет с юга на север со скоростью 1,5 м/с. Определить кориолисово ускорение w_c частиц воды, находящихся на $60°$ северной широты. Определить затем, у какого берега вода выше и насколько, если известно, что поверхность воды должна быть перпендикулярна направлению вектора, составленного из ускорения силы тяжести $\boldsymbol{g}$ и вектора, равного и противоположного кориолисову ускорению.

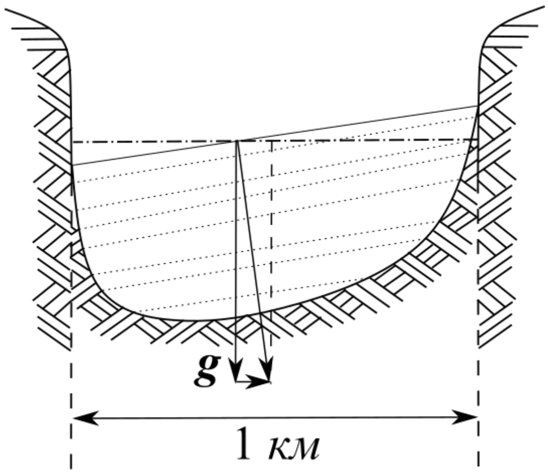

Рис. 4.22

Ответ. Кориолисово ускорение w_c ($w_c = 1,89 \cdot 10^{-4}$ м/с^2) направлено к западу. Вода выше у правого берега на 0,0096 м.

Задача 4.30 (23.53)

Магистраль южных железных дорог к северу от Мелитополя идет прямо по меридиану. Тепловоз движется со скоростью $v = 90$ км/ч на север; широта места $\varphi = 47°$. Найти кориолисово ускорение тепловоза.

Ответ. $w_c = 2{,}66 \cdot 10^{-3}$ м/с^2.

Задача 4.31 (23.58)

Найти абсолютное ускорение шаров центробежного регулятора Уатта, если он вращается вокруг своей вертикальной оси, имея в данный момент угловую скорость $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ рад/с при угловом ускорении $\varepsilon = 1$ рад/с^2; угловая скорость расхождения шаров $\omega_1 = \dfrac{\pi}{2}$ рад/с при угловом ускорении $\varepsilon_1 = 0{,}4$ рад/с^2. Длина рукояток шаров $l = 0{,}5$ м, расстояние между осями их привеса $2e = 0{,}1$ м, угол раствора регулятора в рассматриваемый момент $2\alpha = 90°$. Размерами шаров пренебречь, принимая шары за точки. (См. рисунок к задаче 4.16.)

Ответ. $w = 2{,}937$ м/с^2.

Задача 4.32 (Задание К-10, № 25 [3])

По заданным уравнениям относительного движения точки M и переносного движения тела D определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M (рис. 4.23).

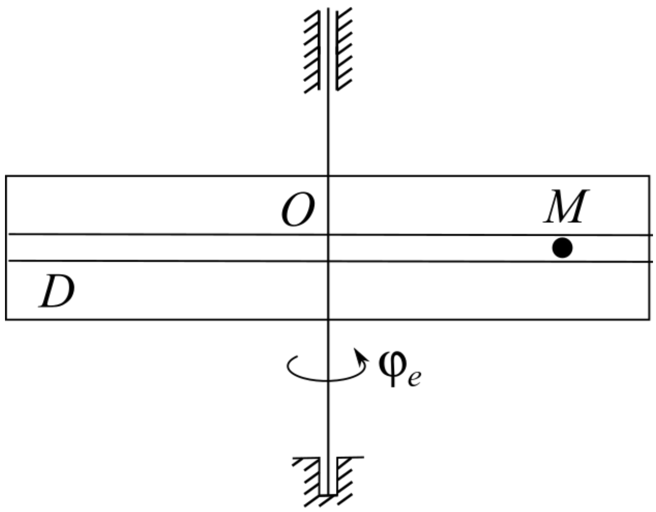

Рис. 4.23

Положение точки M на схеме соответствует положительному значению s_r, необходимые для расчета данные приведены в табл. 4.3.

Табл. 4.3

Уравнение относительного движения точки M $OM = s_r$, см	Уравнение движения тела D φ_e, рад	t_1, с
$15\sin\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$	$\varphi_e = 10t - 0{,}1t^2$	5

Ответ. Значения искомых величин приведены в табл. 4.4.

Табл. 4.4

ω_e, с$^{-1}$	Скорость, м/с			ε_e, с$^{-2}$	Ускорение, м/с^2					
	v_r	v_e	v_a		w_r^τ	w_r^n	w_e^τ	w_e^n	w_c	w_a
9	7,85	116,9	117,2	$-0{,}2$	14,25	–	2,598	1052,2	141,4	1076,9

Литература

1. *Мещерский, И. В.* Задачи по теоретической механике [Текст] : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки и специальностям в области техники и технологий по дисциплине «Теоретическая механика» / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – Изд. 48-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 448 с.

2. *Бухгольц, Н. Н.* Основной курс теоретической механики [Электронный ресурс]. Ч. 1. Кинематика, статика, динамика материальной точки / Н. Н. Бухгольц. – 6-е изд., перераб. и доп. С. М. Таргом. – Москва : Наука, 1965. – 467 с. – Режим доступа: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/BuhgolcKurs1-1965ru.djvu (дата обращения: 16.10.2017).

3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Электронный ресурс] / [А. А. Яблонский, С. С. Норейко, С. А. Вольфсон и др.] ; под общ. ред. А. А. Яблонского. – 3-е изд., испр. – Москва : Высшая школа, 1978. – 388 с. – Режим доступа: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Yablonskij1978ru.djvu (дата обращения: 16.10.2017).

4. *Бать, М. И.* Теоретическая механика в примерах и задачах [Электронный ресурс]. Т. 1. Статика и кинематика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон ; под ред. Г. Ю. Джанелидзе и Д. Р. Меркина. – 5-е изд., перераб. – Москва : Наука, 1967. – 512 с. – Режим доступа: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/BatTeorMech1-1967ru.djvu (дата обращения: 16.10.2017).

5. *Ворович, И. И.* Лекции по динамике Ньютона. Современный взгляд на механику Ньютона и ее развитие [Текст] : в 2 ч. Ч. 2 / И. И. Ворович. – Москва : Физматлит, 2010. – 604 с.

Для заметок

Учебное издание

ШУТЬКО Валентина Моисеевна

ЛАПИНА Полина Анатольевна

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Печатается в авторской редакции

Компьютерная верстка *П. А. Лапиной*

Дизайнер обложки

Подписано в печать 00.00.17.

Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Усл. печ. 6,16. Уч.-изд.л. 4,34.

Заказ № 0000. Тираж 100 экз.

Издательство Южного федерального университета.
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, тел. (863)247-80-51.

Отпечатано в типографии Южного федерального университета.

344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, тел. (863)247-80-51.