Алгоритмы на графах

Лекция 1.

Основные понятия теории графов. Представления графов.

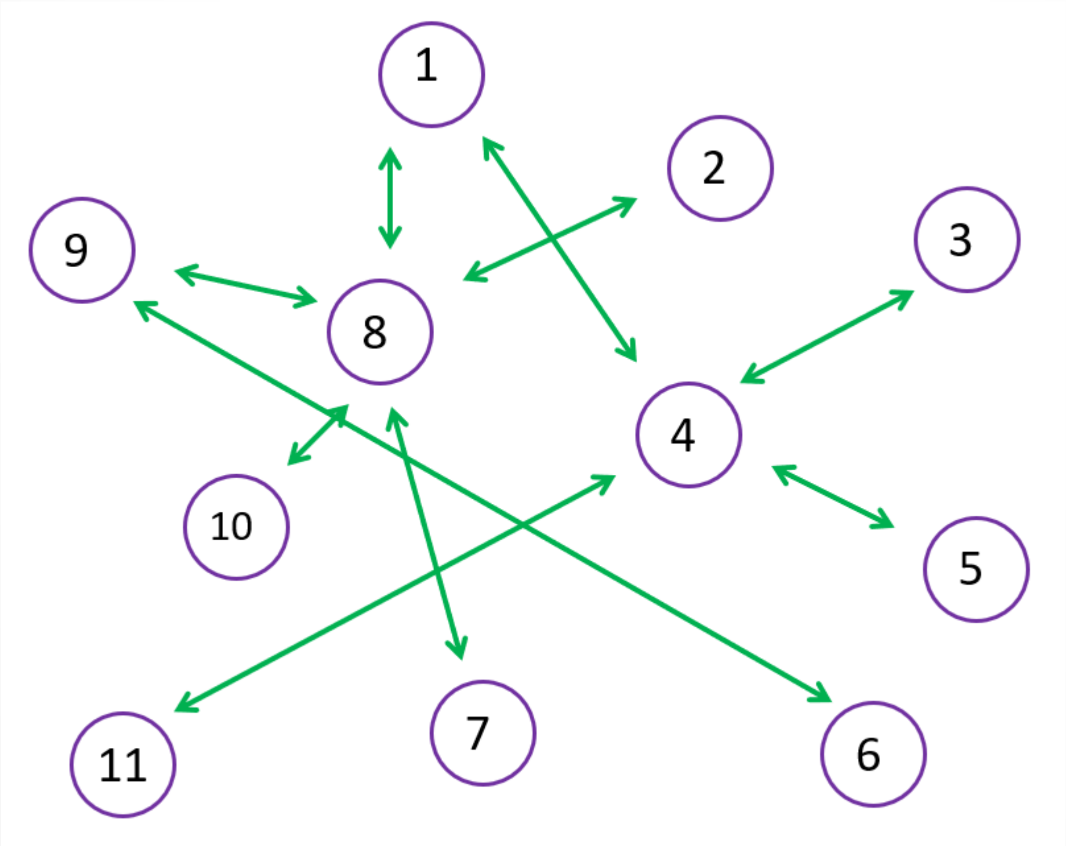
Адигеев Михаил Георгиевич

2024

Основные понятия

Графы

Граф – это абстрактная структура, представляющая *объекты* и *отношения* между ними.



Графы

Граф G=(V,E)

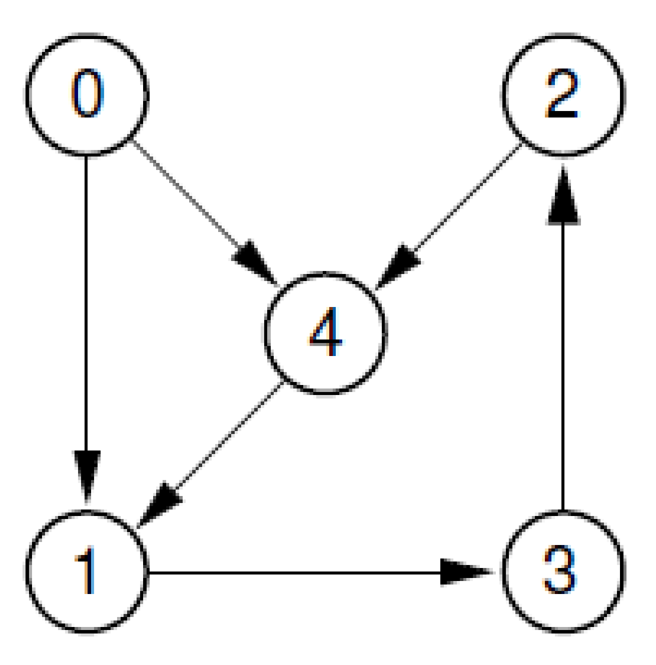
V – множество ***вершин*** (узлов). |*V*|=*n*.

E – множество ***рёбер*** (дуг). |*E*|=*m*

Графы бывают *ориентированные* или *неориентированные*.

Графы

Ориентированный граф:

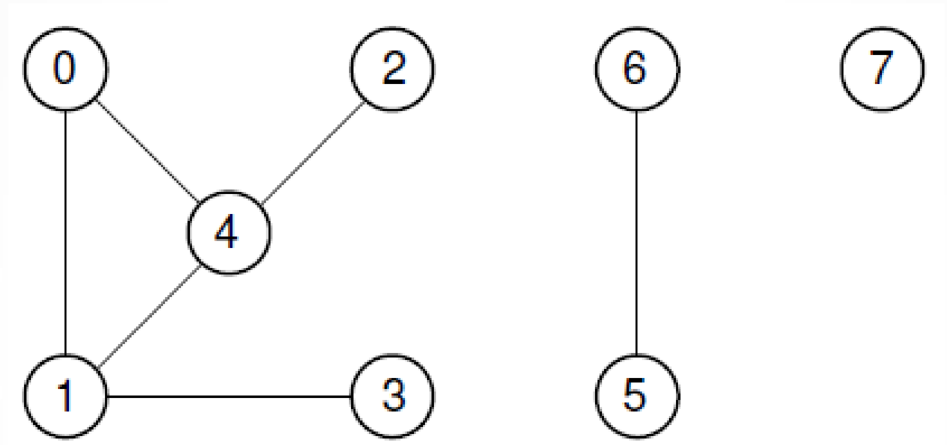


Ориентированные рёбра будем также называть *дугами*.

Дуга(ориентированное ребро) – это *упорядоченная* пара вершин: $e'=(u,v)$ и $e''=(v,u)$ – разные дуги.

Графы

Неориентированный граф:

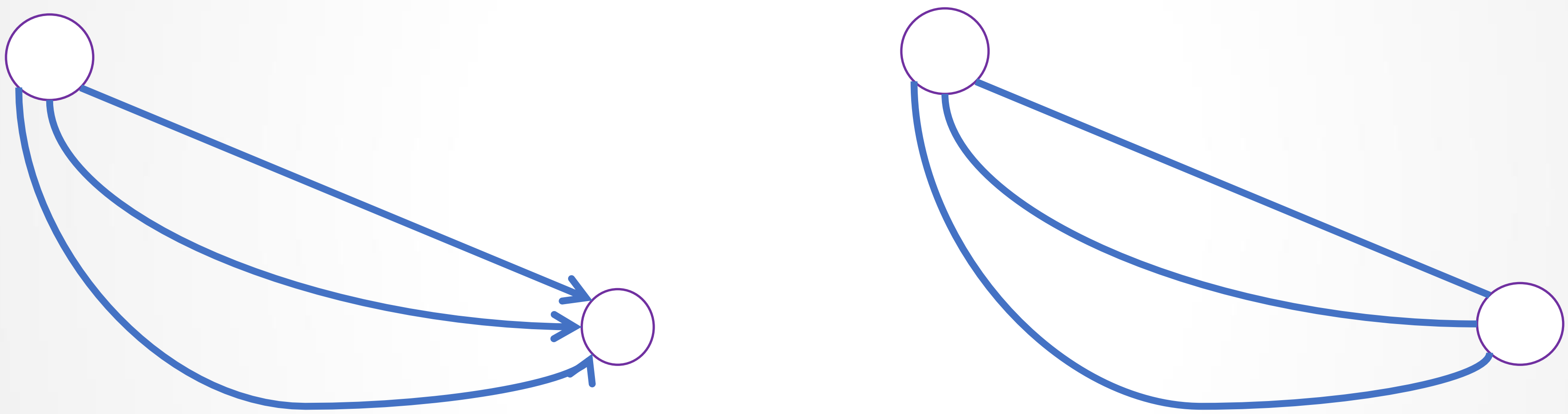


(Неориентированное) ребро – это *неупорядоченная* пара вершин: $e'=(u,v)$ и $e''=(v,u)$ – одно и то же ребро.

Или два разных ребра…

Графы

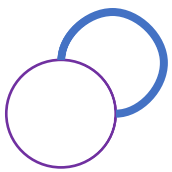
На графах могут быть *кратные* рёбра/дуги (граф тогда называется *мультиграфом*).



Для мультиграфов нужно изменить определение графа G=(V,E). Теперь E – мультимножество, т.е. может содержать некоторые элементы более одного раза.

Графы

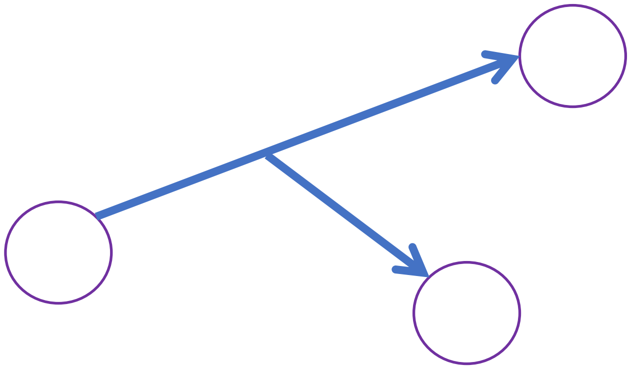
Также для некоторых задач на графах допускается наличие *петель*.



Для неориентированных петель также необходимо модифицировать определение: ребро - это неупорядоченная пара вершин, причём вершины могут совпадать.

Графы

Для очень специфических задач могут быть и более необычные ситуации (квазиграфы), но мы их не рассматриваем.



Локальные характеристики

Рассмотрим дугу (ориентированное ребро) e=(u,v).

Вершина *u* – ***начало*** дуги *e*.

Вершина *v* – ***конец*** дуги *e*.

Вершины *u* и *v* ***инцидентны*** дуге *e*.

Дуга *e* также инцидентна каждой из вершин *u* и *v*.

Вершины *u* и *v* ***смежны***. Это соседние вершины.

Также вершину *u* называют ***родителем*** *v*, а *v* – ***дочерней*** вершиной для *u*.

Локальные характеристики

В неориентированном случае всё очень похоже.

Для ребра *e*=(u,v).

Вершины *u* и *v* – ***концы*** ребра *e*.

Вершины *u* и *v* ***инцидентны*** дуге *e*.

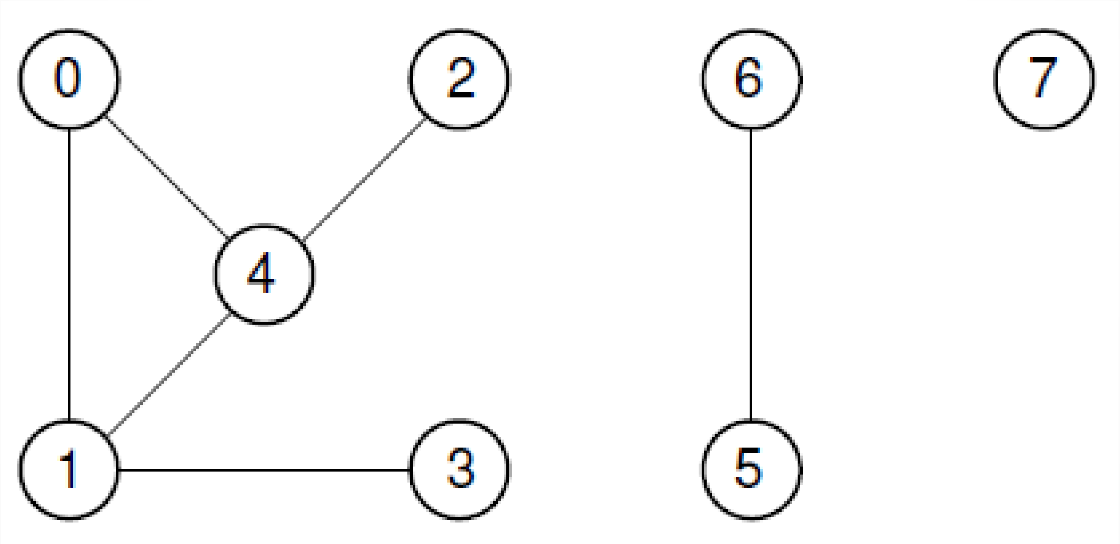
Дуга *e* также инцидентна каждой из вершин *u* и *v*.

Вершины *u* и *v* ***смежны***. Это соседние вершины.

Степени вершин

Для неориентированного графа *G*(*V*,*E*) и вершины $v \in \mathrm{V}$.

Степень вершины *v*: $\deg(v)$ – это количество рёбер графа, инцидентных данной вершине.



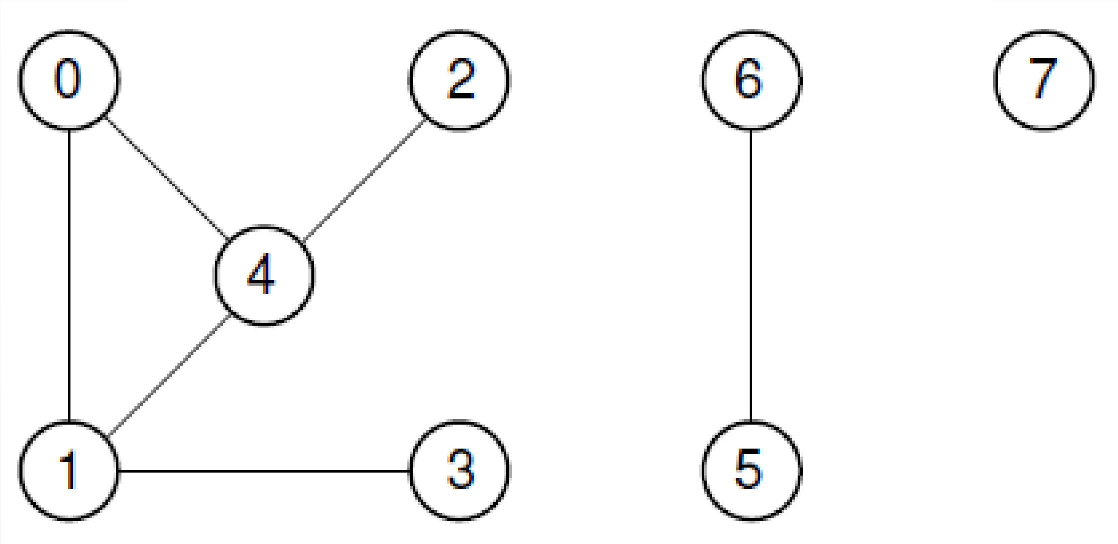
Вершина $v \in V$ называется *изолированной*, если $\deg(v) = 0$, и она называется *висячей*, если $\deg(v) = 1$.

Степени вершин

Теорема (о рукопожатиях).

В любом графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству рёбер:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$



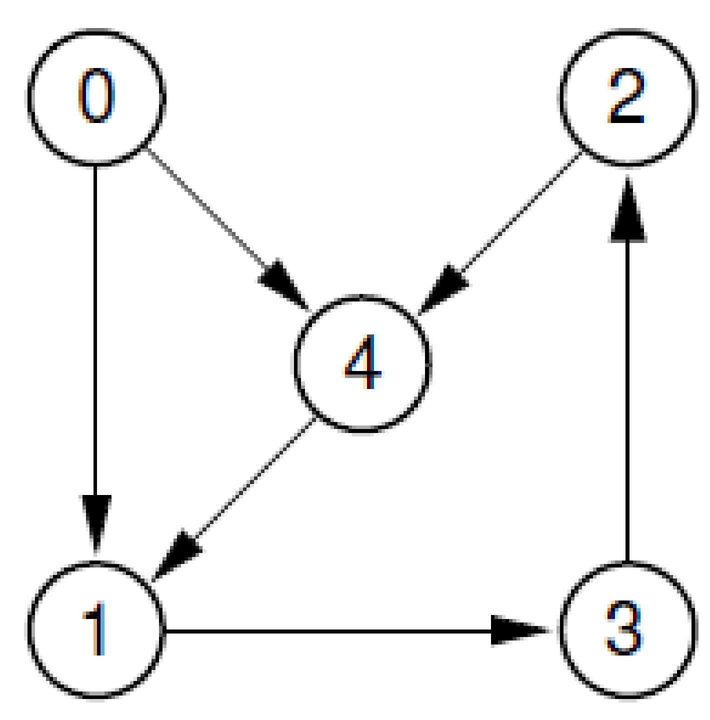
Степени вершин

Для ориентированного графа $G(V,E)$ и вершины $v \in V$.

Степень вершины v: $\deg(v)$ – это количество рёбер/дуг графа, инцидентных данной вершине.

Полустепень захода вершины v: $\mathrm{indeg}(v)$ – это количество дуг графа, заходящих в данную вершину.

Полустепень исхода вершины v: $\mathrm{outdeg}(v)$ – это количество дуг графа, исходящих из данной вершины.



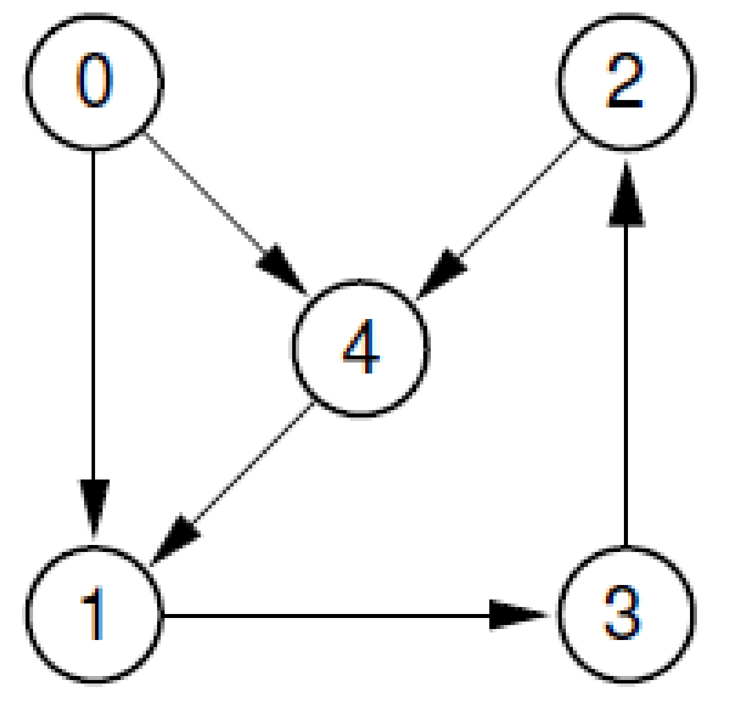
Очевидно:

$$\deg(v) = indeg(v) + outdeg(v)$$

Степени вершин

Источником называется вершина *v*: $\mathrm{indeg}(v) = 0$.

Сток – вершина, для которой $\mathrm{outdeg}(v) = 0$



Представления графов

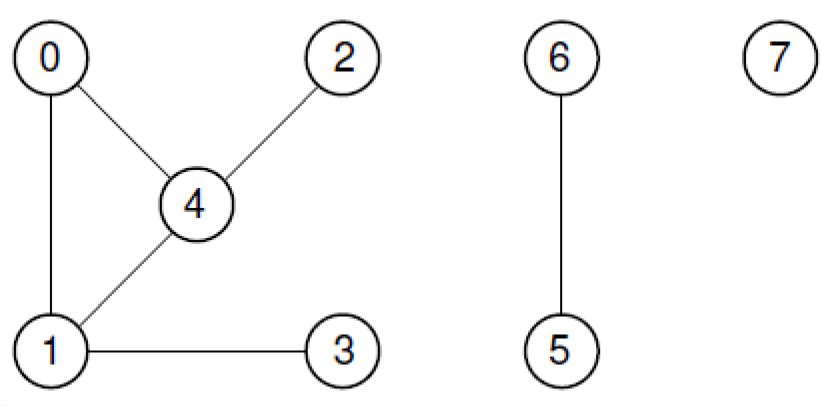
Список дуг

Граф G(V,E) можно представить в виде двух списков:

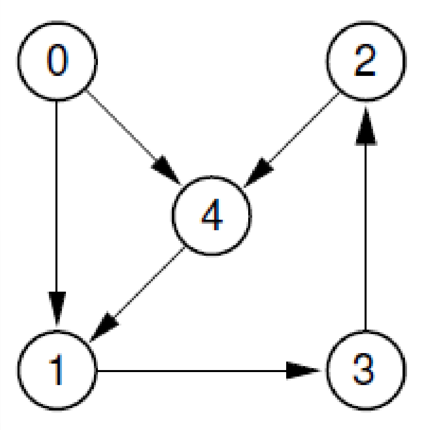
$$V = \{ v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E = \{e_1 = (u_1, v_1), \dots, e_m = (u_m, v_m)\}$$

0	1
0	4
1	3
1	4
2	4
5	6



0	1
0	4
1	3
4	1
2	4
3	2

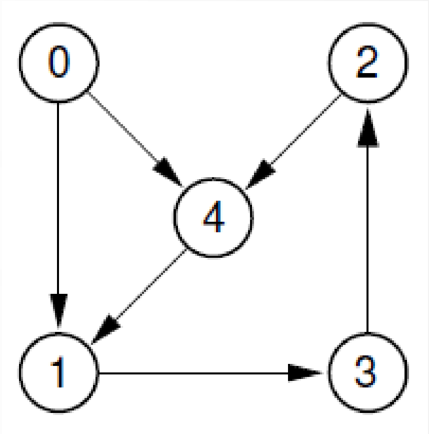


Список дуг

$$E = \{e_1 = (u_1, v_1), \dots, e_m = (u_m, v_m)\}$$

Характеристика	Временная сложность
out-deg(v)	$O(m)$
in-deg(v)	$O(m)$
deg(v)	$O(m)$
has_edge(v,w)	$O(m)$
is_source(v)	$O(m)$
is_sink(v)	$O(m)$

0	1
0	4
1	3
4	1
2	4
3	1

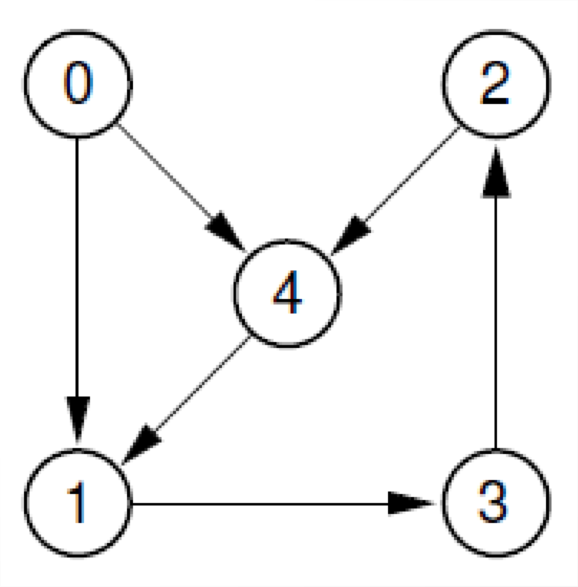


Матрица смежности

Ориентированный граф G(V,E) можно представить в виде матрицы:

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}: a_{ij} = \begin{cases} 1, if\ (i,j) \in E \\ 0,\ otherwise \end{cases}$$

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	0

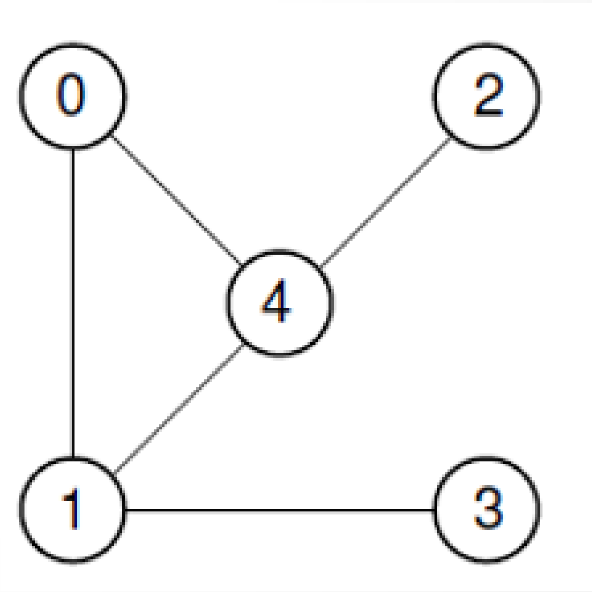


Матрица смежности

Неориентированный граф G(V,E) также можно представить в виде матрицы:

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n} : a_{ij} = \begin{cases} 1, if\ (i,j) \in E \\ 0,\ otherwise \end{cases}$$

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
2	0	0	0	0	1
3	0	1	0	0	0
4	1	1	1	0	0



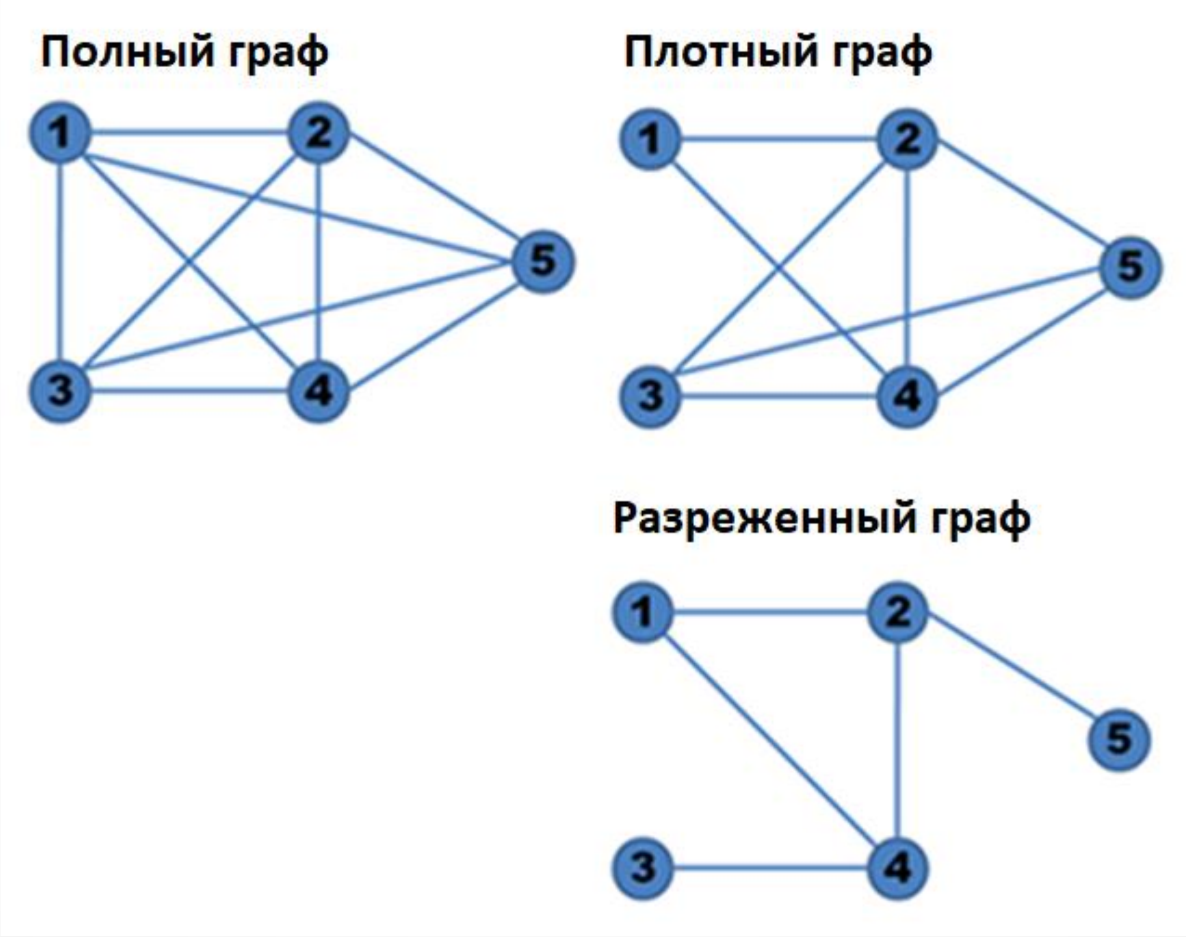
Матрица смежности

Матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ модержит $O(n^2)$ элементов. Эффективно ли такое представление (по памяти)?

- Эффективно для *плотных* графов $(m \sim O(n^2))$.
- Неэффективно для *разряженных* графов $(m \sim O(n))$.

Матрица смежности

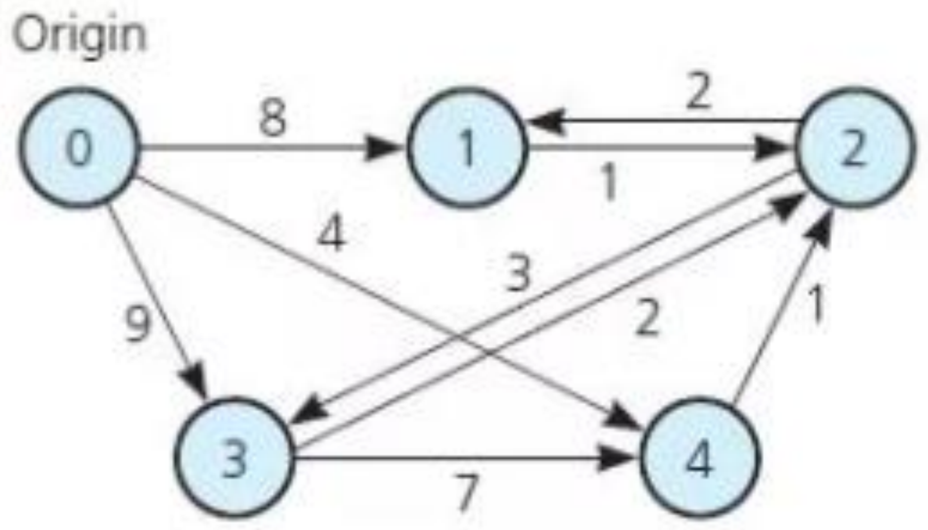
Полным графом называется граф, в котором все вершины попарно смежны.



Матрица смежности

Матрица смежности может нести дополнительную информацию – например, представлять матрицу расстояний:

(a)



(b)

	0	1	2	3	4
0	∞	8	∞	9	4
1	∞	∞	1	∞	∞
2	∞	2	∞	3	∞
3	∞	∞	2	∞	7
4	∞	∞	1	∞	∞

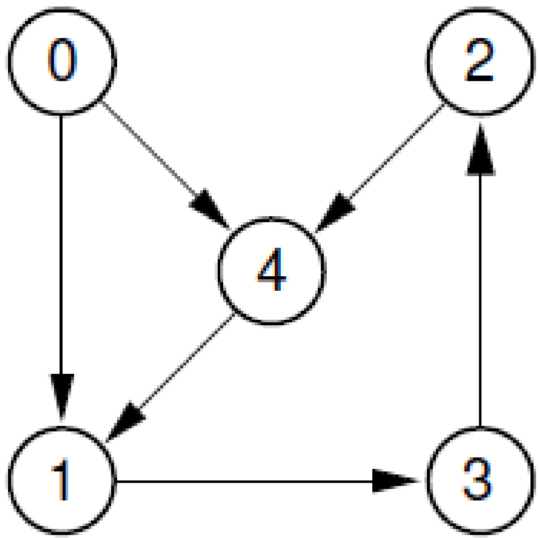
Матрица смежности

Сложность выполнения базовых операций:

Характеристика	Временная сложность
out-deg(v)	$O(n)$
in-deg(v)	$O(n)$
deg(v)	$O(n)$
has_edge(v,w)	$O(1)$
is_source(v)	$O(n)$
is_sink(v)	$O(n)$

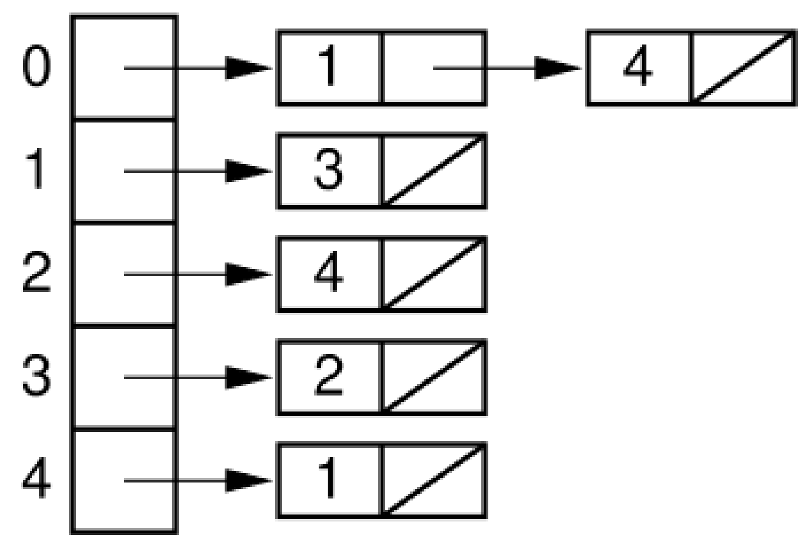
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \boxed{\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}} \end{array}$$

Список смежности



	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	0

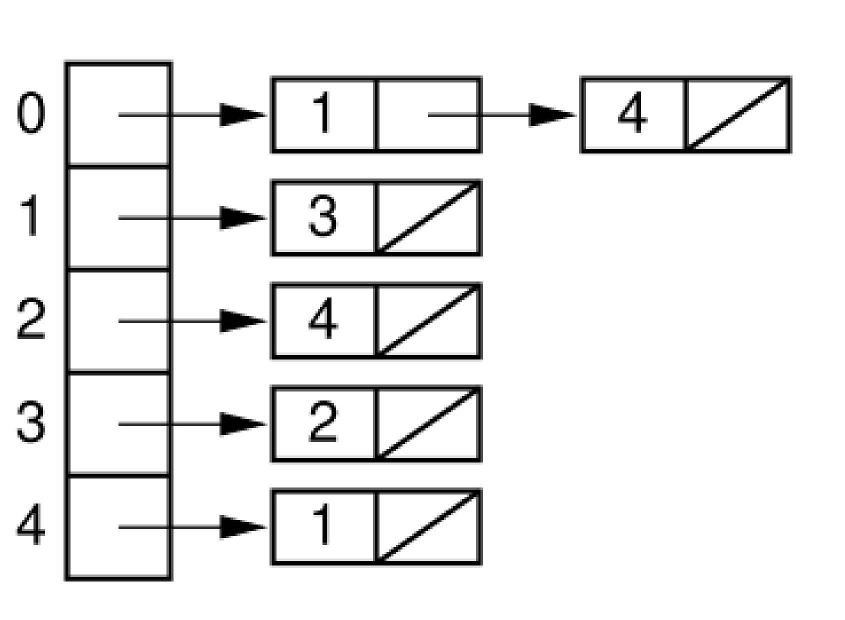
Ёмкостная сложность: $O(n+m)$



Список смежности

Сложность выполнения базовых операций:

Характеристика	Временная сложность
out-deg(v)	$O(\max deg) = O(n)$
in-deg(v)	$O(n+m) = O(m)$
deg(v)	$O(m)$
has_edge(v,w)	$O(\max deg) = O(n)$
is_source(v)	$O(m)$
is_sink(v)	$O(1)$



Ёмкостная сложность: $O(n+m)$

Сравнение представлений

Сложность выполнения базовых операций:

Характеристика	Список дуг	Матрица смежности	Список смежности
out-deg(v)	$O(m)$	$O(n)$	$O(\max deg) = O(n)$
in-deg(v)	$O(m)$	$O(n)$	$O(n+m) = O(m)$
deg(v)	$O(m)$	$O(n)$	$O(m)$
has_edge(v,w)	$O(m)$	$O(1)$	$O(\max deg) = O(n)$
is_source(v)	$O(m)$	$O(n)$	$O(m)$
is_sink(v)	$O(m)$	$O(n)$	$O(1)$
Память	$O(m)$	$O(n^2)$	$O(n+m)$