Лекция 15

Приближённые алгоритмы.
Алгоритм Кристофидеса.

План лекции

- Приближённые алгоритмы с гарантированной оценкой точности
- Метрическая ЗК
  - ✓ Алгоритм остовного дерева для МЗК
  - ✓ Алгоритм Кристофидеса
- Неаппроксимируемость общей ЗК.

Точность приближённого алгоритма

Оптимизационная задача

- Множество входов: X
- Множество допустимых решений: $S(x)$
- Функция стоимости/веса решения: $w: S(x) \to R_+$
- Задача: для заданного $x \in X$ найти допустимое решение $s^* \in S(x)$: $\forall s \in S(x)$

$$w(s^*) \geq w(s) \quad \text{// максимизация}$$

$$w(s^*) \leq w(s) \text{ // минимизация}$$

- Обозначение: $s^* = opt(x); w(s^*) = w^*(x)$.

Точность приближённого алгоритма

Приближённый алгоритм

- Алгоритм A: $A(x) \in S(x)$.
- Имеет полиномиальную временную сложность
- *Коэффициент приближения* (performance ratio), для задачи минимизации:

$$R(A) = \sup\left\{\frac{c(A(x))}{c(opt(x))} : x \in X\right\}$$

Задача коммивояжёра

Для задачи коммивояжёра выделяют как общий вариант (нет ограничений на функцию $w\colon E \to \mathrm{R}_+$), так и важный частный случай — метрический вариант.

Определение. Функция $w\colon E \to \mathrm{R}_+$ называется метрической, если она удовлетворяет условиям метрики:

1) $w(u,v) \geq 0$; $w(u,v)=0 \Leftrightarrow u=v$

2) $w(u,v) = w(v,u)$

3) неравенство треугольника: $w(u,v) \leq w(u,x) + w(x,v)$

Метрическая задача коммивояжёра

Важно: для того чтобы задача была метрической, необходимо, чтобы граф G был полным графом.

Метрическая задача также имеет практически важный подвариант — евклидова задача коммивояжёра (w — евклидово расстояние между вершинами в R^2 или R^3). Для евклидовой ЗК есть ещё более сильные приближённые алгоритмы и эвристики. Но мы их рассматривать не будем.

Метрическая задача коммивояжёра

Теорема. Метрическая задача коммивояжёра является NP-трудной задачей.

Доказательство

Сведём к МЗК известную NP-полную задачу о гамильтоновом цикле: «есть ли на данном неориентированном графе G гамильтонов цикл?».

Пусть надо определить наличие гамильтонова цикла на графе G(V,E), |V| = *n*.

Построим полный граф H(V, E′) и назначим рёбрам графа H веса:

- Если ребро (u,v) есть на графе G, то w(u,v)=1.
- Иначе w(u,v) = 2.

Общая задача коммивояжёра

Легко проверить, что такая весовая функция является метрической. Граф H можно построить по G за полиномиальное время.

Если G является гамильтоновым графом (на нём есть гамильтонов цикл), то на H оптимальный гамильтонов цикл Z^* состоит из рёбер веса 1, поэтому $w(Z^*) = n$.
Иначе (граф G не содержит гамильтонова цикла) $w(Z^*) > n$.

Таким образом, решая за полиномиальное время МЗК, мы сможем решать за полиномиальное время и NP-полную задачу о гамильтоновом цикле. ЧТД.

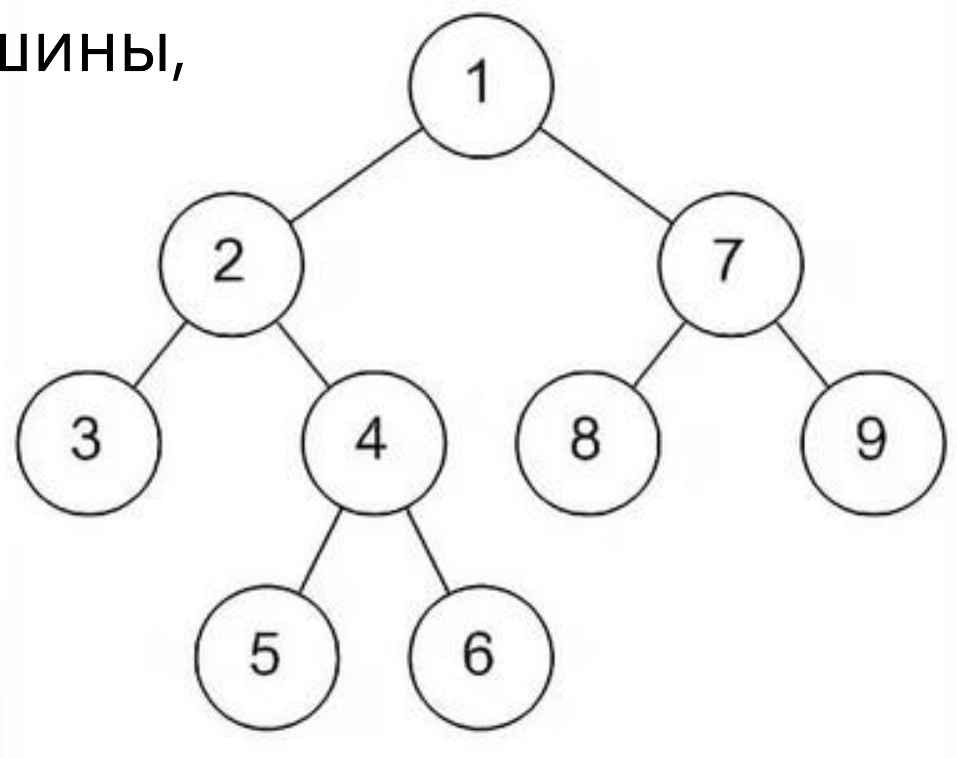
Метрическая задача коммивояжёра

Приближённый алгоритм для МЗК

1. Построить на G минимальное остовное дерево T // алгоритм Прима или Краскала
2. Построить P — обход вершин T в прямом порядке. // см. дальше
3. Вернуть гамильтонов цикл Z′, проходящий вершины в порядке, совпадающем с с порядком первого вхождения вершин в P.

Метрическая задача коммивояжёра

Прямой порядок обхода дерева:
1. Посетить текущую вершину.
2. Для всех поддеревьев, выходящих из текущей вершины, *рекурсивно* обойти каждое поддерево.



Метрическая задача коммивояжёра

Теорема. $w(Z') \leq 2\, w(Z^*)$, где Z^* - минимальный гамильтонов цикл.

Доказательство

Достаточно доказать 2 вспомогательных утверждения

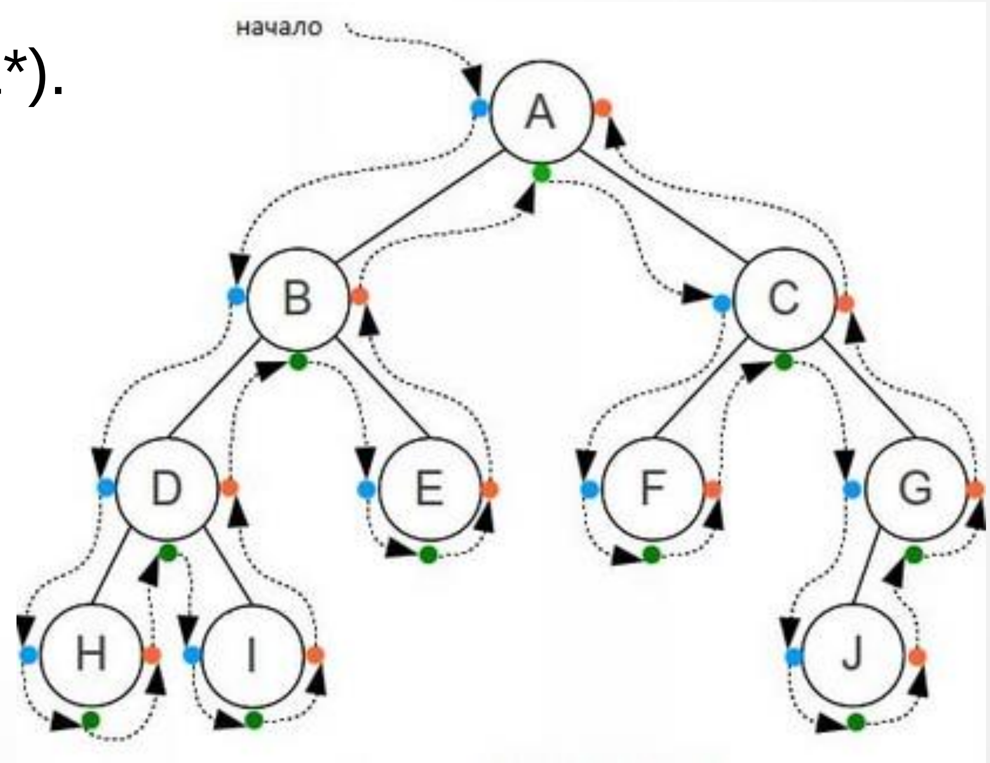
1) $w(Z^*) \geq w(T)$
2) $w(Z') \leq 2\, w(T)$.

Докажем (1). Если из Z^* удалить одно (произвольное) ребро, получится остовное дерево T'. А по построению T — *минимальное* остовное дерево. Поэтому $w(Z^*) > w(T') \geq w(T)$.

Метрическая задача коммивояжёра

Докажем (2). Через P обозначим маршрут на графе, соответствующий обходу T в прямом порядке. P проходит ровно 2 раза по каждому ребру T.

Поэтому $w(P) = 2\ w(T) \leq 2\ w(Z^*)$.



Метрическая задача коммивояжёра

Поэтому $w(P) = 2\ w(T) \leq 2\ w(Z^*)$.
Маршрут P — замкнутый путь, проходящий по всем вершинам графа. Но P — не гамильтонов цикл, т. к. по некоторым вершинам может проходить более одного раза.
Обход Z' содержит список вершин в порядке прохождения P , но без дубликатов.
В силу того, что для весов рёбер выполняется неравенство треугольника, $w(Z') \leq w(P)$.

Поэтому: $w(Z') \leq w(T) \leq 2\ w(T)$. Т.е. (2) доказано.

ЧТД.

Метрическая задача коммивояжёра

Сложность алгоритма совпадает со сложностью построения минимального остовного дерева, т. е. не превышает $O(n^2)$. Таким образом, для метрической задачи коммивояжёра (МЗК, MTSP) существует полиномиальный алгоритм с R=2.

Существует более точный алгоритм — алгоритм Кристофидеса, имеющий R=1,5.

Метрическая задача коммивояжёра

Алгоритм Кристофидеса для МЗК

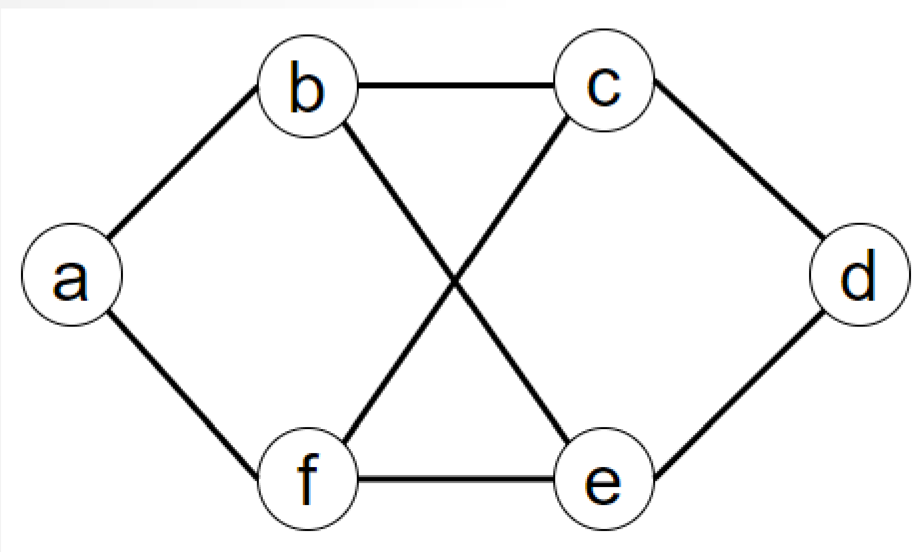
1. Построить на G минимальное остовное дерево T // алгоритм Прима или Краскала
2. Пусть X — множество вершин, имеющих нечётные степени на T.
3. Построить M — *минимальное по весу совершенное паросочетание* на G[X].
4. На графе T$\cup$M построить эйлеров цикл.
5. Вернуть гамильтонов цикл Z′, проходящий вершины в порядке их первого вхождения в эйлеров цикл.

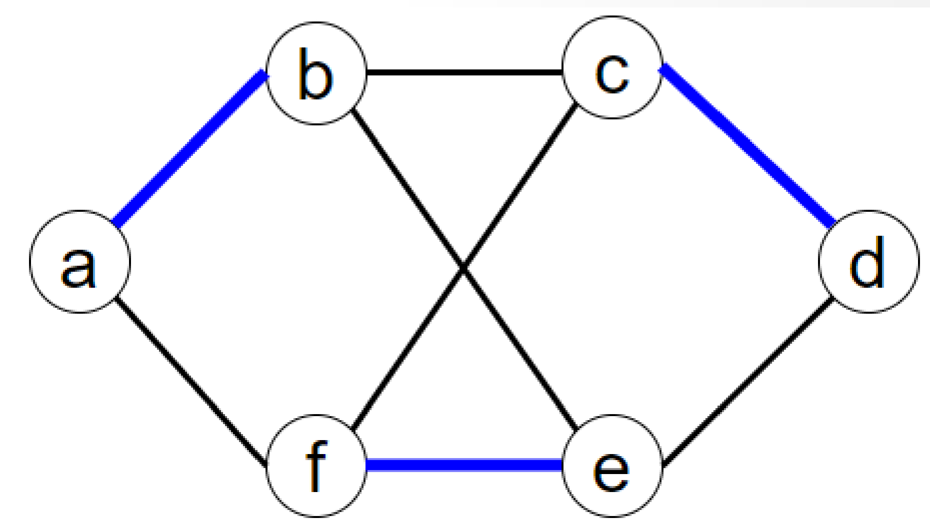
Метрическая задача коммивояжёра

Здесь G[X] – это подграф графа G, порождённый множеством вершин $X \subseteq V$, то есть подграф G, содержащий только вершины из множества X (но все такие вершины) и только рёбра, оба конца которых принадлежат X (но все такие рёбра).

Паросочетания

Определение. ***Паросочетанием*** на графе $G(V, E)$ называется подмножество рёбер $M \subseteq E$, в котором все рёбра попарно не смежны (не имеют общих вершин).



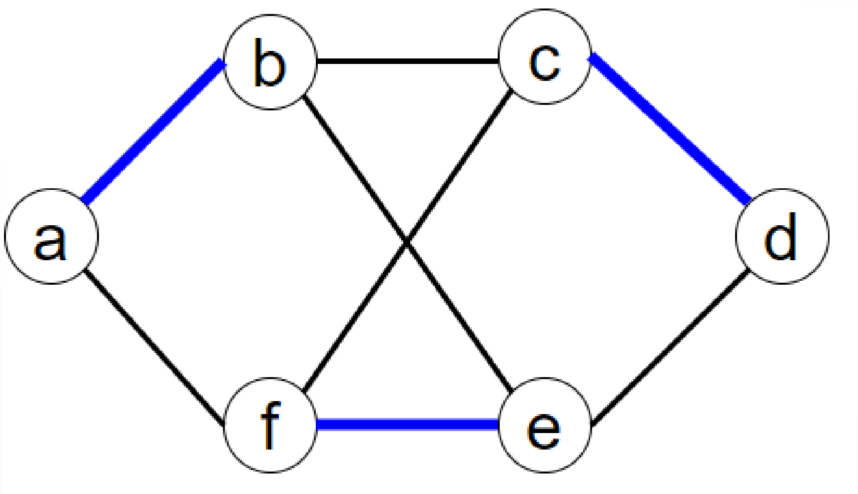


Паросочетания

<u>Определение</u>. ***Совершенным паросочетанием*** называется паросочетание, которое покрывает все вершины графа, то есть каждая вершина инцидентна ребру паросочетания.

<u>Определение</u>. Паросочетание называется ***наибольшим***, если на данном графе не существует паросочетания с бОльшим количеством рёбер.

Очевидно, что совершенное паросочетание является наибольшим, но обратное, вообще говоря, не верно.



Паросочетания

Алгоритм Эдмондса при эффективной реализации может находить минимальное по весу совершенное паросочетание за время $O(n^3)$. Самый быстрый алгоритм (усовершенствованная версия алгоритма Эдмондса) имеет сложность $O(\sqrt{n} \cdot m)$.

Оценим совокупную сложность алгоритма Кристофидеса.

Метрическая задача коммивояжёра

Алгоритм Кристофидеса для МЗК

1. Построить на G минимальное остовное дерево T // алгоритм Прима или Краскала $O(m \cdot \log n)$
2. Пусть X — множество вершин, имеющих нечётные степени на T. $O(m)$
3. Построить M — *минимальное по весу совершенное паросочетание* на G[X]. $O(n^3)$
4. На графе T∪M построить эйлеров цикл. $O(m)$
5. Вернуть гамильтонов цикл Z′, проходящий вершины в порядке их первого вхождения в эйлеров цикл. $O(m)$

Итого: сложность алгоритма Кристофидеса: $\boldsymbol{O(n^3)}$.

Общая задача коммивояжёра

Теорема. Для общей (без соблюдения условия треугольника) задачи коммивояжёра не существует полиномиального алгоритма с R=const. Иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ не существует приближённого алгоритма с полиномиальной временной сложностью и $R \leq 1 + \varepsilon$.

Доказательство

Метод «от противного». Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ существует такой алгоритм. Покажем, что такой алгоритм смог бы (точно) решать NP-полную задачу о гамильтоновом цикле («есть ли на данном графе G гамильтонов цикл?»).

Общая задача коммивояжёра

Пусть надо определить наличие гамильтонова цикла на графе G(V,E), |V| = *n*.

Построим полный граф H(V, E′) и назначим рёбрам графа H веса по следующему правилу:

- Если ребро (u,v) есть на графе G, то w(u,v)=1.
- Иначе w(u,v) = (1+ε) n+1.

Граф H можно построить по G за полиномиальное время. С помощью гипотетического приближённого алгоритма найдём на H гамильтонов цикл Z′, такой, что w(Z′) ≤ (1+ε) w(Z*).

Общая задача коммивояжёра

$w(Z') \leq (1+\varepsilon)\, w(Z^*)$.

Если на G есть гамильтонов цикл, то Z^* состоит из рёбер веса 1, и $w(Z') \leq (1+\varepsilon)\, n$.

Если на G нет гамильтонова цикла, то $w(Z^*) \geq n$-1 +(1+ε) n+1 = $n+(1+\varepsilon)\, n > (1+\varepsilon)\, n$. И поэтому $w(Z') \geq w(Z^*) > (1+\varepsilon)\, n$.

Таким образом, с помощью такого алгоритма можно было бы за полиномиальное время определять, есть ли на графе гамильтонов цикл.
ЧТД.