Лабораторная работа.
Решение краевой задачи методом прогонки

Постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу для обыкновенного диф. уравнения 2-го порядка

$$y"(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), x \in [a, b] \tag{1}$$
$$y(a) + \alpha y'(a) = \beta$$
$$y(b) + \gamma y'(b) = \psi \tag{2}$$

Требуется с помощью метода прогонки вычислить приближенное решение задачи (1-2) в точках $x_i = a + ih$, $h = (b-a)/N$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Метод решения. Метод прогонки заключается в сведении краевой задачи (1-2) к решению разностного уравнения. Рассмотрим дифференциальное уравнение в точке $x = x_i$ и заменим значения производных в точке разностными отношениями

$$y''(x_i) \sim \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2},\ y'(x_i) \sim \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2\,h}, i = 1, 2, \dots N-1$$

Получим разностное уравнение

$$A_i\, y_{i-1} - C_i\, y_i + B_i\, y_{i+1} = F_i, \quad i = 1, \dots, N-1 \tag{3}$$

Аппроксимируем краевое условие в точке $x = a$ и получим

$$y_0 = L_1\, y_1 + K_1, \quad L_1 = \frac{-\alpha\,(A_0 + B_0)}{2hA_0 - \alpha C_0}, \quad K_1 = \frac{\alpha F_0 + 2h\, A_0 \beta}{2hA_0 - \alpha C_0} \tag{4}$$

В точке $x = b$

$$y_N = \frac{2h\psi B_N - \gamma F_N + \gamma K_N (A_N + B_N)}{2hB_N + \gamma\, C_N - L_N \gamma\,(A_N + B_N)} \tag{5}$$

Представим решение y_i в виде

$$y_i = L_{i+1}\, y_{i+1} + K_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \tag{6}$$

Подставим и исключим последовательно y_{i-1} из уравнения (3). Получим формулы для определения α_i, β_i

$$L_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i\, L_i}, \quad K_{i+1} = \frac{A_i\, K_i - F_i}{C_i - A_i\, L_i}, \quad i = 1, 2, \dots N-1 \tag{7}$$

Таким образом, последовательно определяем L_1, K_1 по формулам (4), затем L_i, K_i, $i = 1, 2, \dots N$ по формулам (7). После этого из краевого условия (5) находим y_N, и по формуле (6) определяем y_{N-1}, …, y_0.

Расчет по этому методу зависит от выбора h. Подбор шага осуществляем следующим образом: выбрав начальный шаг h_0, определяем решение u^1 в точках $a + i\,h_0$. Затем, поделив шаг пополам, вычисляем решение u^2. Полученное решение следует сравнить с u^1 в одних и тех же точках. Если $\delta = \|u^1 - u^2\| < \varepsilon$, то решение найдено и можно строить его график. В противном случае шаг дробим, пересылаем u^2 в u^1 и вычисляем u^2 с новым шагом. Однако, дробить шаг следует не более четырех раз.

Методические указания

- Составьте функции для определения коэффициентов линейного дифференциального уравнения (1): $P(x)$, $Q(x)$, $F(x)$. Для примера рассмотрим следующую краевую задачу:

$$y"(x) - 2\,x\,y'(x) + 3\,y(x) = 2\,\cos(x)\,(1-x), x \in [0, \frac{\pi}{2}] \tag{8}$$

$$y(0) + y'(0) = 0$$

$$y(\frac{\pi}{2}) - y'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1 \tag{9}$$

  Точным решением этой краевой задачи является $y(x) = x\,\sin(x)$.

- Задайте отрезок интегрирования и краевые условия: a, b, α, β, γ, ψ.

- Запрограммируйте процедуру для коэффициентов разностного уравнения. Параметрами являются x, h, P, Q, F. Возвращаемые значения — константы A, B, C, FF.

- Запрограммируйте процедуру для метода прогонки с постоянным шагом. Параметрами a, b, n, α, β, γ, ψ. Возвращаемые значения — вектор точек $x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$, $i = 0, \ldots, n$ и вектор решения в этих точках.

- Задайте точность ε. Запрограммируйте цикл для подбора шага в методе прогонки для получения решения с требуемой точностью.

- Постройте графики полученного решения с постоянным шагом, решения с требуемой точностью и точного решения. Для этого используйте следующий фрагмент кода:

```
> xy:=zip((x,y)->[x,y],convert(X,list),convert(Y,list));
> with(plots): plot(xy);
```

- Сохраните результаты работы для тестового примера в своей папке под именем ПРОГОНКА(ТЕСТ).MWS, для индивидуального задания - ПРОГОНКА(ИНД).MWS