Лабораторная работа.
Решение линейной краевой задачи методом Галеркина, методом коллокации или методом наименьших квадратов

Постановка задачи. Рассмотрим линейную краевую задачу для дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y''(x) + P(x)\,y'(x) + Q(x)\,y(x) = F(x) \tag{1}$$
$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0 \tag{2}$$

Будем разыскивать приближенное-аналитическое решение на $[a, b]$ различными проекционными методами.

Методы решения. Запишем краевую задачу в операторной форме:

$$A\,y = F(x), \tag{3}$$

где оператор A определен следующим образом:

$$D(A) : L_2[a, b], \quad y(x) \in D(A), Ay(x) = y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y, \quad y(a) = y(b) = 0 \tag{4}$$

Выберем систему координатных функций в виде системы алгебраических многочленов, удовлетворяющих краевым условиям (2):

$$\varphi_i(x) = (x - a)\,(b - x)\,x^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

или системы тригонометрических многочленов, также удовлетворяющих краевым условиям:

$$\varphi_i(x) = sin\left(\frac{\pi\,i\,(x - a)}{b - a}\right), \quad i = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Приближенное решение краевой задачи будем разыскивать в виде

$$y_n(x) = C_1\,\varphi_1(x) + C_2\,\varphi_2(x) + \cdots + C_n\,\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k\,\varphi_k(x) \tag{7}$$

Методы решения отличаются способом определения констант C_1, C_2, …, C_n.

Метод Галеркина. Подставим приближенное решение (7) в операторное уравнение (4). Назовем *невязкой* величину разности

$$A\,y_n(x) - F(x) = NV(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \tag{8}$$

Потребуем ортогональности невязки координатным функциям:

$$(A\,y_n(x) - F(x), \varphi_i(x)) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{9}$$

Получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных констант C_1, C_2, …, C_n.

$$\sum_{k=1}^{n} C_k\,(A\varphi_k(x), \varphi_i(x)) = (F(x), \varphi_i(x)), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

Запишем матрицу коэффициентов системы и вектор-столбец правых частей:

$$\begin{pmatrix} (A\,\varphi_1,\varphi_1) & (A\,\varphi_2,\varphi_1) & \dots & (A\,\varphi_n,\varphi_1) \\ (A\,\varphi_1,\varphi_2) & (A\,\varphi_2,\varphi_2) & \dots & (A\,\varphi_n,\varphi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A\,\varphi_1,\varphi_n) & (A\,\varphi_2,\varphi_n) & \dots & (A\,\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (F(x),\varphi_1) \\ (F(x),\varphi_2) \\ \dots \\ (F(x),\varphi_n) \end{pmatrix} \tag{11}$$

Скалярное произведение определяем по формуле:

$$(g(x), f(x)) = \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx \tag{12}$$

Находим решение системы и, зная значения констант $C_1, \dots, C_n$ записываем решение $y_n(x)$ и строим его график.

Метод коллокации. Потребуем, чтобы невязка $NV(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ обнулялась в n внутренних точках отрезка ξ_1, ξ_2, …, ξ_n. Получаем систему уравнений

$$A\,y_n(\xi_j) = F(\xi_j), \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{13}$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} C_k\,A\varphi_k(\xi_j) = F(\xi_j), \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{14}$$

Решение системы (набор констант C_1, C_2, …, C_n) позволит записать приближенно-аналитическое решение краевой задачи в виде (7).

Метод наименьших квадратов. Потребуем, чтобы интеграл от квадрата невязки был минимален:

$$\int\limits_a^b (A\,y_n(x) - f(x))^2\,dx \longrightarrow min \tag{15}$$

или

$$\int\limits_a^b (\sum_{k=1}^{n} C_k\,A\varphi_k(x) - f(x))^2\,dx \longrightarrow min \tag{16}$$

Продифференцируем по C_1, затем по $C_2, \dots, C_n$ и приравняем к нулю, получим систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \int\limits_a^b A\varphi_k(x)\,A\varphi_j(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,A\varphi_j(x)\,dx, \quad j = 1, 2, \dots n \tag{17}$$

Задайте матрицу коэффициентов, вектор правых частей и решите систему. Решив систему, получим коэффициенты разложения (7).

Методические указания

- Для проверки методов рассмотрите тестовый пример, например, краевую задачу

$$y''(x) - 3\,y(x) = 8 - 9\,x^2 \tag{18}$$

$$y(-2) = 0, \quad y(1) = 0 \tag{19}$$

  Эта краевая задача имеет точное решение $y(x) = x^3 + x^2 - 2\,x$.

- Задайте в виде функций коэффициенты дифференциального уравнения $P(x)$, $Q(x)$, $F(x)$:

```
> P:=(x)->0;
> Q:=(x)->-3;
> F:=(x)->8-9*x^2;
```

- Задайте все константы задачи:

```
> a:=-2; b:=1;
> n:=3;
```

- Задайте в виде функции правило действия оператора A на функцию y:

```
> A:=(y)->diff(y,x,x)+P(x)*diff(y,x)+Q(x)*y;
```

- Задайте в виде функции координатные функции $\varphi_k(x)$:

```
> KF:=(k,x)->x^(k-1)*(x-a)*(b-x);
```

- Составьте процедуру метода Галеркина, параметрами которой являются a, b, n. Результат работы процедуры — приближенное решение в форме (7).

- Составьте процедуру метода коллокации, параметрами которой являются a, b, n. Результат работы процедуры — приближенное решение в форме (7).

- Составьте процедуру метода наименьших квадратов, параметрами которой являются a, b, n. Результат работы процедуры — приближенное решение в форме (7).

- Постройте все решения, включая точное, на одном графике. Сделайте выводы.

- Сохраните результаты работы для тестового примера в своей папке под именем ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ(ТЕСТ).MWS, для индивидуального задания - ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ (ИНД).MWS