Лабораторная работа.
Решение нелинейной краевой задачи методом пристрелки

Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка

$$F(x, y, y', y'', y^{III}, y^{IV}) = 0 \tag{1}$$

$$y(a) = \alpha, \quad y'(a) = \beta, \quad y''(a) = \gamma \tag{2}$$

$$y(b) = \psi \tag{3}$$

Метод решения. Метод пристрелки состоит в определении недостающего начального условия $y^{III}(a)$ для того, чтобы решить задачу как задачу Коши методом, например, Рунге-Кутта. Положим

$$y^{III}(a) = C, \tag{4}$$

где C — произвольная константа.

Теперь задача (1), (2), (4) может быть решена как задача Коши и в результате получим значение решения на правом конце отрезка интегрирования $y(b)$. Конечно, результат будет зависеть от выбора C. Так как для функции $y(x)$ в точке $x = b$ задано краевое условие (3), то получаем уравнение для определения константы C:

$$G(C) = y(b) - \psi = 0 \tag{5}$$

Для решения уравнения (5) используем метод секущих

$$C_2 = C_0 - \frac{G(C_0)\,(C_1 - C_0)}{G(C_1) - G(C_0)} \tag{6}$$

Этот метод требует задания двух начальных приближений. Критерием окончания итерационного процесса является близость двух соседних итераций $|C_2 - C_1| < EPS$.

Как только найдено значение C, получаем задачу Коши, решение которой является решением исходной краевой задачи. Находим это решение и строим его график.

Методические указания

- Для проверки метода пристрелки рассмотрите тестовый пример, например, нелинейную краевую задачу

$$y^{IV}(x) - y(x) \cdot y'(x) = \frac{2}{x^3} - x\,\ln(x)\,(\ln(x) + 1) \tag{7}$$

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 1 \tag{8}$$

$$y(2) = 2\,\ln(2) \tag{9}$$

  Эта краевая задача имеет точное решение $y(x) = x\,\ln(x)$. Искомым значением является $C = y^{III}(1) = -1$.

- Задайте границы отрезка и константы из краевых условий:

```
> a:=1; b:=2;
> alf:=0; bet:=1; gam:=1; psi:=evalf(2*ln(2));
```

- Запрограммируйте процедуру решения задачи Коши с начальным условием $y^{III}(a) = C$:

```
> ZK := proc(C)
>       local rez, ode, ics, ry, ry2;
>       ode := diff(y(x),x,x,x,x) -y(x)*diff(y(x),x)= 2/x/x/x-
        x*ln(x)*(ln(x)+1);
>       ics := y(a)=alf, D(y)(a)=bet, (D@@2)(y)(a)=gam, (D@@3)(y)(a)=C;
>       ry:=dsolve({ode,ics},numeric, range=a..b);
>       ry2:=ry(b); rez:=rhs(op(2,ry2));
>       RETURN(rez);
> end proc;
```

- Запрограммируйте процедуру решения нелинейного уравнения $G(C) = 0$ методом секущих

```
> SEC := proc(C00, C10, eps, MaxIt)
>        local rez, FF0, FF1, C0, C1;
>        ...
> RETURN(rez);
> end proc;
```

- Задайте начальные приближения $C0$, $C1$, точность и начальное приближение. Вызовите процедуру секущих и сохраните решение.
- Решите задачу Коши с найденным начальным условием и постройте его график.
- Сохраните результаты работы для тестового примера в своей папке под именем НЕЛИНЕЙНАЯ КЗ(ТЕСТ).MWS, для индивидуального задания - НЕЛИНЕЙНАЯ КЗ(ИНД).MWS