Лабораторная работа.
Построение интерполяционного многочлена Лагранжа

Постановка задачи. Рассмотрим функцию, заданную таблично

x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_0	y_1	$\dots$	y_n

здесь $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ — узлы интерполяции. Требуется для этой функции построить интерполяционный многочлен, который можно использовать для определения значений функции в точках, не являющихся узлами.

Элементы теории. Будем разыскивать алгебраический многочлен вида

$$L_n(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \dots + a_n\, x^n \tag{1}$$

который удовлетворяет условию интерполирования $L_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа записывается в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{2}$$

Оценка погрешности интерполирования в некоторой точке $x \in [a, b]$ имеет вид

$$|y(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{\max\limits_{x\in[a,b]} |y^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} |(x - x_0)\,(x - x_1)\, \dots (x - x_n)| \tag{3}$$

Для того, чтобы минимизировать погрешность интерполирования, следует выбирать в качестве узлов x_i корни многочлена Чебышева $T_{n+1}(x)$:

$$T_{n+1}(x) = cos((n+1) \cdot \arccos(x)) \tag{4}$$

$$x_i = \cos(\frac{(2\, i + 1)\pi}{2\,(n+1)}), \quad i = 0, \dots, n \tag{5}$$

Заметим, что корни многочлена $x_i \in [-1, 1]$ и следует в помощью замены переменных перейти к отрезку $[a, b]$.

В этом случае оценка погрешности улучшается и принимает вид:

$$|y(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{\max\limits_{x\in[a,b]} |y^{(n+1)}(x)|}{2^n\,(n+1)!} \tag{6}$$

Методические указания

- Возьмите в качестве теста любой многочлен третьей степени.
  Например, $y = x^3 - 8$, $x \in [-1, 2]$.
  Постройте интерполяционный многочлен Лагранжа степени $n = 3$, выбрав равноотстоящие узлы $x_i = a + i\,h$, $h = \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Используйте следующий фрагмент кода на Maple:

```
> restart;
> a:=-2; b:=1; n:=3; xc:=0.5; yc:=-5;
> X[0]:=    ; Y[0]:= ; ....
> # построение ИМ Лагранжа для функции Y(x)
> Lagr:=proc(n, X, Y)
> local i, j, ...;
> Sum:=0:
> for i from 0 to n do P:=1:
>   for j from 0 to n do if j<>i then P:=P*        : end if: end do:
> Sum:=Sum+        :
> end do:
> Lg:=simplify(Sum);
> return(Lg);
> end proc;
```

- Постройте интерполяционный многочлен Лагранжа степени $n = 3$, выбрав в качестве узлов нули многочлена Чебышева (см. (5)).
- Постройте график для всех интерполяционных многочленов и исходной функции. Для этого используется следующие команды:

```
> with(plots):
> gr1:=plot(L3, x=a..b, color=red):
> gr2:=plot(L3_CH, x=a..b, color=green):
> gr3:=plot(y, x=a..b, color=blue):
> display(gr1, gr2, gr3);
```

- Для некоторого значения $xc \neq x_i$, например, $xc = 0.5$ вычислите значение интерполяционного многочлена Лагранжа по равноотстоящим узлам и значение многочлена, построенного по нулям Чебышева. Найдите погрешности в каждом случае и сделайте вывод.
- Для некоторого значения $yc \neq y_i$, например, $yc = -2$ решите обратную задачу интерполирования. Для этого выберите нужный фрагмент исходной таблицы и постройте линейный многочлен Лагранжа. Подставьте заданное значение yc.
- Сохраните результаты работы для теста в личной папке под именем ИНТЕРПОЛЯЦИЯ(ТЕСТ).MWS.
- Используйте написанную программу для выполнения индивидуального задания. Сохраните результаты работы для индивидуального задания в личной папке под именем ИНТЕРПОЛЯЦИЯ(ИНД).MWS.
- Оформите отчет, который включает: текст задания, описание методов интерполирования, код с результатами прогона для теста и индивидуального задания.