

Лабораторная работа.
Методы уточнения корней нелинейного уравнения.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

Требуется отделить его корни и уточнить один из них методом Ньютона и методом простой итерации.

Методы решения. Для отделения корней представим уравнение (1) в виде $G(x) = H(x)$, где $y = G(x), y = H(x)$ — элементарные функции. Построим графики этих функций и по точкам пересечения сделаем вывод о числе корней уравнения (1) и их расположении.

Пусть на отрезке $[a, b]$ у функции $F(x)$ есть единственный ноль. Рассмотрим численные методы для его уточнения.

Метод Ньютона является итерационным методом. Выбираем начальное приближение $x_0 \in [a, b]$ из условия

$$F(x_0) \cdot F''(x_0) > 0 \tag{2}$$

и организуем итерации по правилу:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{3}$$

Корень считается найденным с точностью ε , если выполняется оценка

$$|F(x_{i+1})| < m \cdot \varepsilon, \quad m = \min_{[a,b]} |F'(x)| \tag{4}$$

Метод простой итерации заключается в замене исходного уравнения (1) эквивалентным ему уравнением

$$x = G(x), \quad x \in [a, b] \tag{5}$$

причем функция $G(x)$ является сжимающей, т.е. $G(x) \in [a, b]$ для всех $x \in [a, b]$ и существует такое число $q : 0 < q < 1$, что для любых $x \in [a, b]$ выполняется $|G'(x)| \leq q$.

Когда функция $G(x)$ найдена, организуем итерации по правилу:

$$x_{i+1} = G(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{6}$$

причем начальное приближение $x_0 \in [a, b]$ задаем произвольно.

Итерационный процесс оканчиваем, когда выполняется условие:

$$|x_{i+1} - x_i| < \frac{\varepsilon(1-q)}{q}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{7}$$

Методические указания

- Возьмите тестовый пример для отладки программы. Например, $2^x - 4 = 0$. Очевидно, что это уравнение имеет единственный корень на отрезке $[1, 3]$. Зададим функцию

```
> restart;  
> f := (x) -> 2^x - 4;
```

- По методу Ньютона следует создать процедуру, в которой выполняется следующее:
 1. концы отрезка a, b , точность ε , $F(x)$ — параметры процедуры
 2. начальное приближение x_0 из a, b определяется с помощью условия (2)
 3. цикл *for...while* предусматривает расчет последующих итераций
 4. при выходе из цикла определить условие выхода
 5. если процесс не сошелся, присвоить код ошибке
 6. вернуть код ошибки, корень, число итераций
- По методу простой итерации следует создать процедуру, в которой выполняется следующее:
 1. x_0, q , точность ε , $G(x)$ — параметры процедуры
 2. организовать цикл *for...while* для расчета следующих итераций
 3. при выходе из цикла определить условие выхода
 4. если процесс не сошелся, присвоить код ошибке
 5. вернуть код ошибки, корень, число итераций
- Сохраните результаты работы для тестового примера в личной папке под именем НЕЛИН-УРАВНЕНИЕ(ТЕСТ).MWS, для индивидуального задания — НЕЛИН-УРАВНЕНИЕ(ВАР00).MWS. Загрузите в Moodle оба файла.