Лабораторная работа. Метод Ньютона для системы нелинейных уравнений

Постановка задачи.Отделить корни системы нелинейных уравнений и уточнить один из них методом Ньютона с точностью ε.

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2) = 0 \\ F_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Решение.

Построим графики функций и определим число корней и области их локализации. Выберем начальное приближение из области локализации корня (x_1, x_2).

Построим матрицу Якоби $J(x_1, x_2)$ — матрицу производных, состоящую из производных уравнений

$$\frac{\partial F_1(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial F_2(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \tag{2}$$

Применим метод Ньютона для расчета следующих приближений к корням системы нелинейных уравнений.

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - \frac{\Delta_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\det(J(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}))}, \tag{3}$$

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - \frac{\Delta_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\det(J(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}))}, \tag{4}$$

Здесь использованы обозначения

$$\Delta_1(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} F_1(x_1, x_2) & \frac{\partial F_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ F_2(x_1, x_2) & \frac{\partial F_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & F_1(x_1, x_2) \\ \frac{\partial F_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & F_2(x_1, x_2) \end{vmatrix}$$

Подставим начальное приближение и получим первое приближение

$$x_1^{(1)} = \ldots \tag{5}$$

$$x_2^{(1)} = \ldots \tag{6}$$

Продолжаем итерации до тех пор, пока норма разности между двумя итерациями не станет меньше ε

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$$