

Лабораторная работа "Методы решения задачи Коши"

Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y'(x) = F(x, y(x)) \quad (1)$$

$$y(a) = y_0 \quad (2)$$

Требуется найти решение этой задачи приближенно-аналитическими методами (методом степенных рядов) и численным методом (методом Эйлера-Коши).

Методы решения. Метод степенных рядов позволяет определить приближенное решение в следующем виде:

$$y(x) \approx C_0 + C_1 * (x - a) + C_2 * (x - a)^2 + C_3 * (x - a)^3 + \dots \quad (3)$$

$$C_0 = y_0, \quad C_1 = F(a, y_0), \quad C_2 = \frac{1}{2} (F_x(a, y_0) + F_y(a, y_0) F(a, y_0)),$$

$$C_3 = \frac{1}{6} (F_{xx}(a, y_0) + 2 F_{xy}(a, y_0) F(a, y_0) + F_{yy}(a, y_0) F^2(a, y_0) + F_y(a, y_0) F_x(a, y_0) + F_y^2(a, y_0) F(a, y_0)) \quad (4)$$

т.е. коэффициенты степенного ряда $C_i, i = 2, 3, \dots$ получаются путем дифференцирования правой части дифференциального уравнения (1) по x , по y и затем подстановкой начального условия x_0, y_0 .

Метод Эйлера Коши позволяет получить решение виде таблицы значений $y_i \approx y(x_i)$, $x_i = a + i h$, $h = \frac{b-a}{n}$ в результате последовательного пересчета по формулам:

$$y_{k+1}^p = y_k + h f(x_k, y_k), \quad (5)$$

$$y_{k+1}^c = y_k + \frac{h}{2} (f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^p)), \quad \dots k = 0, 1, 2, \dots n \quad (6)$$

Методические указания.

- Составьте свою тестовую задачу Коши с точным решением. Например, рассмотрим для теста задачу Коши

$$y'(x) = x^2 + 3y(x) \quad (7)$$

$$y(0) = 2 \quad (8)$$

Эта задача Коши имеет точное решение $y(x) = \frac{56}{27} e^{3x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}$.

- Для расчета коэффициентов в методе степенных рядов следует использовать команду *diff*. Например, для определения коэффициента C_1 :

```
> f:=(x,y)->x*x+3*y;  
> a:=0; y0:=2; C0:=y0; C1:=f(a,y0);  
> C2:=1/2*(diff(f(x,y),x)+diff(f(x,y),y)*f(x,y));  
> C2:=subs(x=a,y=y0,C2);
```

Добавьте расчет $C3$ и составьте приближенное решение YR из четырех слагаемых ряда.

- Для реализации метода Эйлера-Коши используйте цикл с пересчетом

```
> n:=10; h:=...;
> for i from 0 to n-1 do
>   yp:=
>   yc:=
>   X[i+1]:=
>   Y[i+1]:=
> end do;
```

- Постройте на одном графике решения, найденные двумя методами, и точное решение задачи Коши. Сделайте вывод. Для построения графика по массивам точек используйте следующие команды:

```
> xy:=zip((x,y)->[x,y],convert(X,list),convert(Y,list));
> with(plots): plot(xy);
```

- Сохраните результаты работы для своего тестового примера в своей папке в файле ЗАДАЧА-КОШИ(ТЕСТ).MWS, а результаты расчета для индивидуального задания - в ЗАДАЧА-КОШИ(VAR00).MWS