Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

Постановка задачи. Рассмотрим функцию, заданную таблично

x_0	x_1	$\ldots$	x_n	x_*	?
f_0	f_1	$\ldots$	f_n	?	f_*

здесь $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ — узлы интерполяции. Требуется для этой функции построить интерполяционный многочлен и решить прямую задачу для x_* и обратную задачу для f_*.

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа определяется как линейная комбинация многочленов n-ых степеней:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k c_k(x), \quad c_k(x) - \text{многочлен степени } n$$

Если добавить узел в таблицу значений функции, то вырастет степень многочлена и многочлен в форме Лагранжа придется перестраивать полностью. Многочлен в форме Ньютона строится таким образом, при котором увеличение числа узлов на один приводит к добавлению одного слагаемого к уже построенному многочлену.

Предположим, что имеется один узел интерполирования x_0 и известно значение f_0 . Тогда строится многочлен нулевой степени

$$N_0(x) = f_0, \quad N_0(x_0) = f_0$$

Добавим еще один узел x_1 и значение функции f_1 . К многочлену $N_0(x)$ добавим многочлен первой степени такой, который обращается в ноль при

$$x = x_0: \;\; N_1(x) = N_0(x) + a_1(x - x_0) = f_0 + a_1(x - x_0)\,; N_1(x_0) = f_0.$$

Очевидно, что добавленный многочлен не меняет условия интерполяции при $x = x_0$.

Коэффициент a_1 найдем из условия $N_1(x_1) = f_1$

$$N_1(x_1) = f_0 + a_1\,(x_1 - x_0) \to f_1 = f_0 + a_1(x_1 - x_0) \to a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

Обозначим коэффициент $a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = f(x_0\,; x_1)$

Теперь возьмем три узла x_0, x_1, x_2 и будем строить многочлен второй степени, добавив к $N_1(x)$ многочлен $a_2(x - x_0)(x - x_1)$, получим

$$N_2(x) = f_0 + f(x_0; x_1)(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Добавление многочлена второй степени не меняет условий интерполяции для $x = x_0, x = x_1$

$$N_2(x_0) = f_0; \quad N_2(x_1) = f_1$$

Чтобы выполнить условие при $x = x_2$ найдем коэффициент a_2 из уравнения

$$N_2(x_2) = f_0 + f(x_0; x_1)(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f_2$$

$$a_2 = \frac{f\_2 - f\_0 - f(x\_0; x\_1)(x\_2 - x\_0)}{(x\_2 - x\_0)(x\_2 - x\_1)} \quad (*)$$

$$a_2 = \frac{f(x_1; x_2) - f(x_0; x_1)}{x_2 - x_0} \ (**);$$

$$f(x_0; x_1) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}; f(x_1; x_2) = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$$

Обозначим коэффициент $a_2 = f(x_0; x_1; x_2)$

Домашнее задание: $(*) = [] = (**)$

<u>Определение</u> Выражение вида $f(x_k; x_m) = \frac{f_m - f_k}{x_m - x_k}$ называется разделенной разностью **первого порядка**.

Например, $f(x_2; x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{f\_3 - f\_2}{x\_3 - x\_2}$

<u>Определение</u> Выражение вида $f(x_k; x_m; x_s) = \frac{f(x_m; x_s) - f(x_k; x_m)}{x_s - x_k}$ называется разделенной разностью **второго порядка**.

Например, $f(x_1; x_2; x_3) = \frac{f(x_2; x_3) - f(x_1; x_2)}{x_3 - x_1}$

<u>Определение</u> Выражение вида $f(x_0; x_1; \dots x_n) = \frac{f(x_1; x_2; \dots x_n) - f(x_0; x_1; x_2; \dots x_{n-1})}{x_n - x_0}$ называется разделенной разностью $\boldsymbol{n} -$ го **порядка**.

Заметим, что $f_k \approx f(x_k)$ называется разделенной разностью **нулевого** порядка.

Запишем многочлен, используя разделенные разности

$$N_2\ (x) = f_0 + f(x_0; x_1\ )(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1)$$

или

$$N_2(x) = f_0 + f(x_0; x_1\ )\omega_1(x) + f(x_0; x_1; x_2)\omega_2(x)$$

$$N_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f(x_0; x_1; \dots x_k)\omega_k(x);\ \omega_0(x) = 1;\ \omega_1(x) = (x - x_0),$$
$$\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

Таким образом, если функция задана в $(n+1) - \text{м}$ узле, то многочлен $n -$ й степени примет вид

$$N_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_0; x_1; \dots x_k)\omega_k(x);\ \ \omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \qquad (1)$$

Многочлен, задаваемый формулой (1), называется **интерполяционным многочленом в форме Ньютона.**

Конечно же, многочлены Лагранжа и Ньютона совпадают между собой, так как условия интерполирования позволяют определять их однозначным образом. Отличаются эти многочлены лишь формой записи.

Лемма. Разделенная разность $n - \text{го}$ порядка выражается через значения функции следующим образом:

$$f(x_0; x_1; x_2; \dots x_n) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}\dots)(x_k - x_n)}$$

Доказательство: Методом математической индукции

Пусть $n = 1$. Тогда $f(x_0; x_1) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{f_0}{x_0 - x_1} + \frac{f_1}{x_1 - x_0}$ верное равенство

Пусть утверждение верно при $n = m$

$$f(x_0; x_1; \dots x_m) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f_k}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_m)}$$

Докажем, что формула верна и при $n = m + 1$

$$f(x_0; x_1; \dots x_{m+1}) = \frac{f(x_1; \dots x_{m+1}) - f(x_0; \dots x_m)}{x_{m+1} - x_0}$$
$$= \frac{1}{x_{m+1} - x_0}\left(\sum_{k=1}^{m+1} \frac{f_k}{(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{m+1})} - \sum_{k=0}^{m} \frac{f_k}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_m)}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_{m+1} - x_0}\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{f_k}{(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{m+1})} + \frac{f_{m+1}}{(x_{m+1} - x_1)\dots(x_{m+1} - x_m)} - \sum_{k=1}^{m} \frac{f_k}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_m)} - \frac{f_0}{(x_0 - x_1)\dots(x_0 - x_m)}\right)$$

$$= \frac{1}{x_{m+1} - x_0}\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{f_k(x_k - x_0) - f_k(x_k - x_{m+1})}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{m+1})} + \frac{f_{m+1}}{(x_{m+1} - x_1)\dots(x_{m+1} - x_m)} - \frac{f_0}{(x_0 - x_1)\dots(x_0 - x_m)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{f_k}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{m+1})} + \frac{f_{m+1}}{(x_{m+1} - x_0)(x_{m+1} - x_1)\dots(x_{m+1} - x_m)} + \frac{f_0}{(x_0 - x_1)\dots(x_0 - x_m)(x_0 - x_{m+1})}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \frac{f_k}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{m+1})}$$

Коэффициенты многочлена Ньютона удобно определять по таблице разделенных разностей:

x_k	f_k	$f(x_k; x_{k+1})$	$f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2})$	$f(x_k; x_{k+1}; \dots x_n)$
x_0	f_0	$f(x_0; x_1)$	$f(x_0; x_1; x_2)$	$f(x_0; x_1; \dots; x_n)$
x_1	f_1	$f(x_1; x_2)$	$f(x_1; x_2; x_3)$	—
x_2	f_2	$f(x_2; x_3)$	$f(x_2; x_3; x_4)$	—
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_{n-1}	f_{n-1}	$f(x_{n-1}; x_n)$	—	—
x_n	f_n	—	—	—

Пример *По заданной таблице значений постройте интерполяционный многочлен в форме Ньютона и определите недостающее значение*

-1	0	1	2	0.1
-9	-4	11	78	$?$

Решение. *В таблице значений приведены значения функции для четырех узлов* $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, *значит, будем строить многочлен третьего порядка. Интерполяционный многочлен третьего порядка в форме Ньютона имеет вид*

$$N_3(x) = f(x_0) + f(x_0;x_1)(x - x_0) + f(x_0;x_1;x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ f(x_0;x_1;x_2;x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Построим таблицу разделенных разностей определения коэффициентов многочлена

x_k	f_k	$f(x_k;x_{k+1})$	$f(x_k;x_{k+1};x_{k+2})$	РР III порядка
$x_0 = -1$	$f_0 = \mathbf{-9}$			
$x_1 = 0$	$f_1 = -4$	$f(x_0;x_1) = \frac{-4-(-9)}{0-(-1)} = \mathbf{5}$		
$x_2 = 1$	$f_2 = 11$	$f(x_1;x_2) = \frac{11-(-4)}{1-0} = 15$	$f(x_0;x_1;x_2) = \frac{15-5}{1-(-1)} = \mathbf{5}$	
$x_3 = 2$	$f_3 = 78$	$f(x_2;x_3) = \frac{78-11}{2-1} = 67$	$f(x_1;x_2;x_3) = \frac{67-15}{2-0} = 26$	$f(x_0;x_1;x_2;x_3) = \frac{26-5}{2-(-1)} = \mathbf{7}$

Подставим найденные разделенные разности в интерполяционный многочлен Ньютона

$$N_3(x) = -9 + 5(x+1) + 5(x+1)(x-0) + 7(x+1)(x-0)(x-1)$$
$$= -9 + 5x + 5 + 5x\hat{}2 + 5x + 7\,x\hat{}3 - 7x = 7x^3 + 5x^2 + 3x - 4$$

Выполним проверку

$$N_3(-1) = -7+5-3-4 = -9;\ \ N_3(0) = -4;\ \ N_3(1) = 7+5+3-4 = 11;$$

$$N_3(2) = 56+20+6-4 = 78$$

Теперь найдем недостающее значение функции

$$N_3(0.1) = \frac{7}{1000} + \frac{5}{100} + \frac{3}{10} - 4 = \frac{7+50+300-4000}{1000} = -3{,}643$$

Свойства разделенных разностей

1) $f(x_k; x_m) = f(x_m; x_k)$
2) $(\alpha f + \beta g)(x_k; x_s) = \alpha f(x_k; x_s) + \beta g(x_m; x_s)$

Решение обратной задачи интерполирования

Пусть функция задана таблицей значений

-1	0	**1**	**2**	?
-9	-4	**11**	**78**	20

Требуется найти такое значение x_*, которому соответствует заданное $f_* = 20$

Решение:

1) Вначале определим интервал для поиска x_*. Так как $11 < 20 < 78$, то $x_* \in [1, 2]$. Выберем фрагмент таблицы значений для найденных узлов:

$x_0 = 1$	$x_* - ?$	$x_1 = 2$
$f_0 = 11$	$f_* = 20$	$f_1 = 78$

Перевернем таблицу, считая узлами значения функции

$f_0 = 11$	$f_* = 20$	$f_1 = 78$
$x_0 = 1$	x_*	$x_1 = 2$

Построим многочлен Лагранжа первой степени по этим двум узлам

$$L_1(y) = x_0 \frac{y - f_1}{f_0 - f_1} + x_1 \frac{y - f_0}{f_1 - f_0} = 1\,\frac{y - 78}{11 - 78} + 2\,\frac{y - 11}{78 - 11} = \frac{1}{67}y - \frac{22}{67} + \frac{78}{67} = \frac{1}{67}y + \frac{56}{67}$$

Выполним проверку

$$L_1(f_0) = L_1(11) = \frac{67}{67} = 1 = x\_0; \quad L_1(f_1) = L\_1\ (78) = \frac{134}{67} = 2 = x\_1$$

Теперь подставим в многочлен $f_* = 20$

$$L_1(f_*) = L\_1\ (20) = \frac{76}{67} \approx 1.1343$$

Домашнее задание:

1) Постройте многочлен Ньютона для таблицы значений

-1	0	1	2	0.3
-10	2	14	74	$?$

2) Для отладки программы построения ИМ (в форме Лагранжа или в форме Ньютона) необходимо составить тест (многочлен, например, третьей степени).

а) Для этого придумайте многочлен, например,

$$f(x) = x^3 - x^2 + 1$$

б) Составьте для него таблицу значений

-2	-1	0	1
-11	-1	1	1

в) Поставьте прямую и обратную задачи

-2	**-1**	**0**	1	0.5	?
-11	**-1**	**1**	1	?	0

г) Решите прямую задачу

$$f(1/2) = 1/8 - 1/4 + 1 =$$

д) Решите обратную задачу

$x_0 = -1$	$x_1 = 0$	$x_* - ?$
f_0 =-1	$f_1 = 1$	$f_* = 0$

→

$f_0 = -1$	$f_* = 0$	$f_1 = 1$
$x_0 = -1$	$x_* - ?$	x_1 =0

е) Постройте многочлен Лагранжа первой степени

$$L_1(y) = x_0 \frac{y - f_1}{f_0 - f_1} + x_1 \frac{y - f_0}{f_1 - f_0} =$$

$$L_1(-1) = -1 = x_0; L_1(1) = 0 = x_1$$

ж) Подставьте в него $f_* = 0$ Найденное значение и будет x_*

$$L_1(0) =$$