

# Компьютерное зрение и обработка изображений

## Лекция 3

### Бинарные изображения

Я.М.Демяненко  
dem@math.sfedu.ru

Южный федеральный университет  
Институт математики, механики и компьютерных наук

2020

## Содержание

- 1 Выделение и маркировка связанных областей
  - Выделение связанных областей
  - Маркировка связанных областей
  - Подсчёт объектов на изображении
- 2 Свойства областей бинарного изображения
  - Геометрические свойства
  - Свойства формы
- 3 Математическая морфология
  - На чём основана
  - Дилатация и эрозия
  - Замыкание и размыкание
  - Основные морфологические алгоритмы

## Содержание

- 1 Выделение и маркировка связанных областей
  - Выделение связанных областей
  - Маркировка связанных областей
  - Подсчёт объектов на изображении
- 2 Свойства областей бинарного изображения
  - Геометрические свойства
  - Свойства формы
- 3 Математическая морфология
  - На чём основана
  - Дилатация и эрозия
  - Замыкание и размыкание
  - Основные морфологические алгоритмы

## Выделение связанных областей

	1	
2	*	3
	4	

4-связность

1	2	3
4	*	5
6	7	8

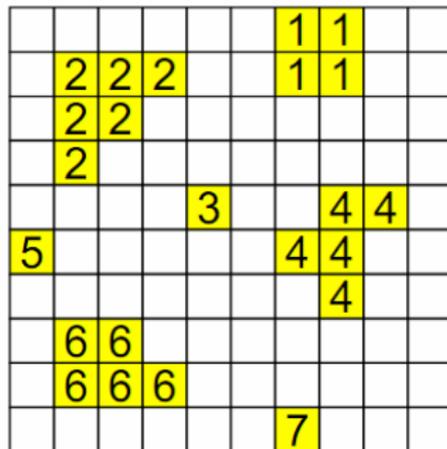
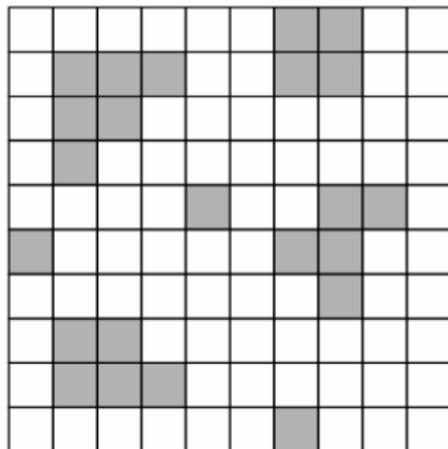
8-связность



$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq 1$$

$$|x_1 - x_2| \leq 1 \text{ и } |y_2 - y_1| \leq 1$$

## Разметка связанных областей



## Маркировка связанных компонент



1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	1

1	1	0	1	1	1	0	2
1	1	0	1	0	1	0	2
1	1	1	1	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	0	2
3	3	3	3	0	4	0	2
0	0	0	3	0	4	0	2
5	5	0	3	0	0	0	2
5	5	0	3	0	2	2	2

## Алгоритмы маркировки

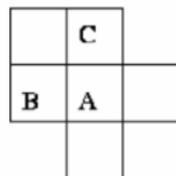
- Рекурсивный алгоритм маркировки (в памяти целиком) – алгоритм заливки
- Алгоритм построчной маркировки (большие изображения – обрабатываются порциями по 2 строки)

## Рекурсивный алгоритм маркировки – алгоритм заливки

- Простой рекурсивный
- Заливка линиями
- Заливка с выделением границы

## Метод последовательного сканирования

```
if A = 0 do nothing
else if (not B labeled) and (not C labeled)
increment label numbering and label A
else if B xor C labeled
copy label to A
else if B and C labeled
if B label = C label
copy label to A
else
copy either B label or C label to A
```



## Случай конфликта

						1
					1	1
	2			1	1	1
2	2		1	1	1	1
2	2	2	?			

## Пример

1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	1

1	1	0	2	2	2	0	3
1	1	0	2	0	2	0	3
1	1	1	1	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	3
4	4	4	4	0	5	0	3
0	0	0	4	0	5	0	3
6	6	0	4	0	0	0	3
6	6	0	4	0	7	7	3

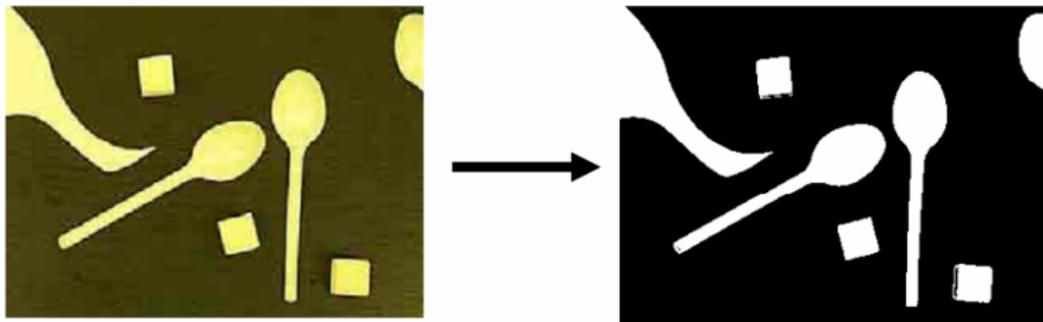
## Структура данных для объединения-поиска

1	1	0	2	2	2	0	3
1	1	0	2	0	2	0	3
1	1	1	1	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	3
4	4	4	4	0	5	0	3
0	0	0	4	0	5	0	3
6	6	0	4	0	0	0	3
6	6	0	4	0	7	7	3

1	1	0	1	1	1	0	3
1	1	0	1	0	1	0	3
1	1	1	1	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	3
4	4	4	4	0	5	0	3
0	0	0	4	0	5	0	3
6	6	0	4	0	0	0	3
6	6	0	4	0	3	3	3

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
0	1	0	0	0	0	3

## Хорошие входные данные



## Формула для подсчёта

- Внешние углы

0	0
0	1

0	0
1	0

1	0
0	0

0	1
0	0

- Внутренние углы

1	1
1	0

1	1
0	1

0	1
1	1

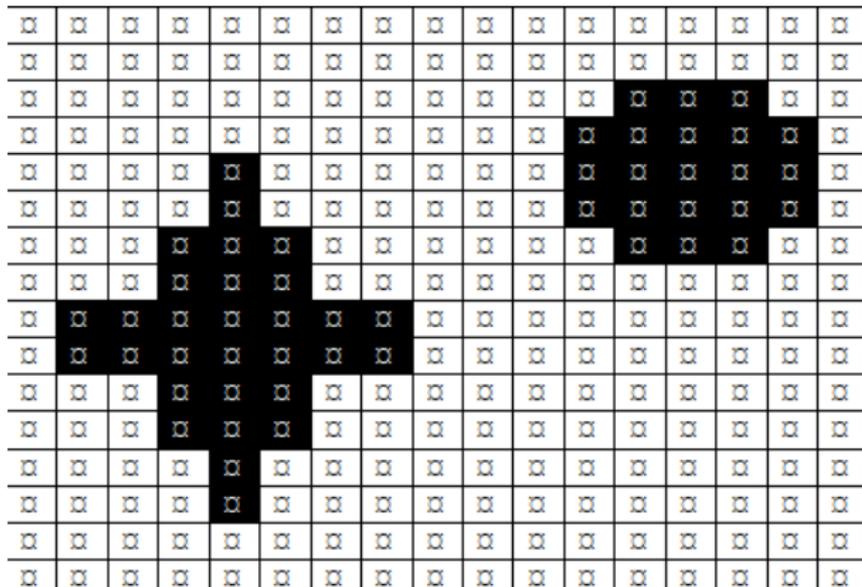
0	1
1	1

- $(\text{Внешние углы} - \text{Внутренние углы})/4$

## Подсчёт объектов 1

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

## Подсчёт объектов 2



# Содержание

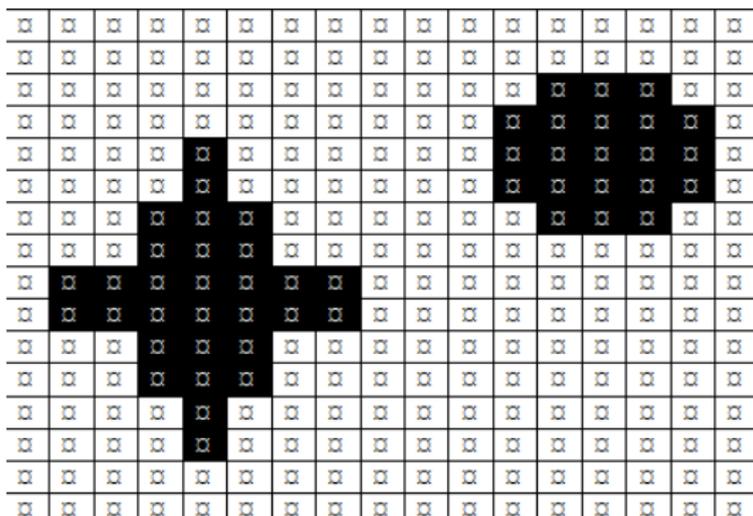
- 1 Выделение и маркировка связанных областей
  - Выделение связанных областей
  - Маркировка связанных областей
  - Подсчёт объектов на изображении
- 2 Свойства областей бинарного изображения
  - Геометрические свойства
  - Свойства формы
- 3 Математическая морфология
  - На чём основана
  - Дилатация и эрозия
  - Замыкание и размыкание
  - Основные морфологические алгоритмы

## Свойства областей бинарного изображения

- Геометрические (площадь, центр тяжести, экстремальные точки)
- Свойства формы (характеристики округлости и продолговатости)
- Свойства интенсивности (средняя, текстурные статистики)

# Площадь

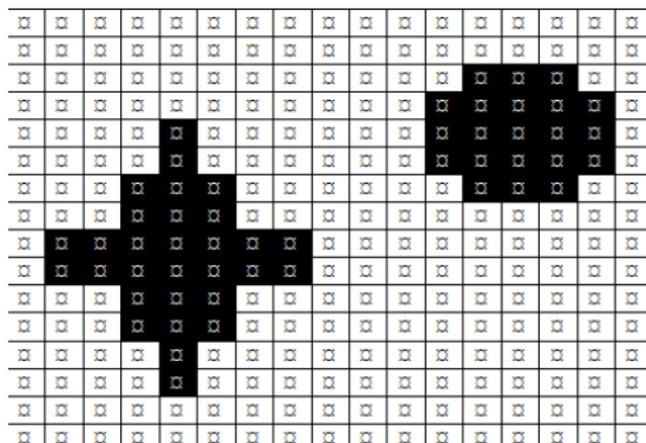
$$A = \sum_{(r,c) \in R} 1$$



## Центр тяжести

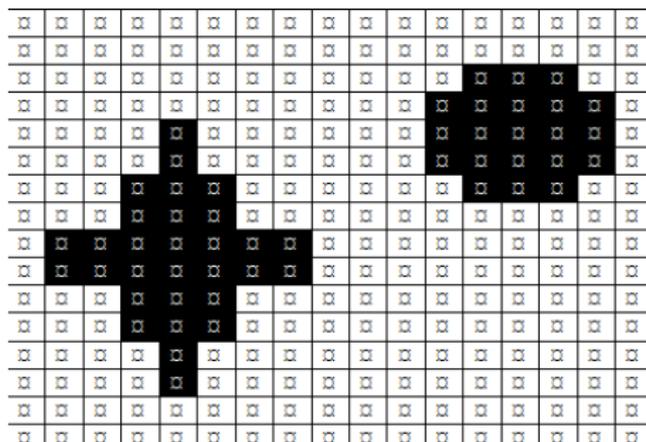
$$\bar{r} = \frac{1}{A} \sum_{(r,c) \in R^r} r$$

$$\bar{c} = \frac{1}{A} \sum_{(r,c) \in R^c} c$$



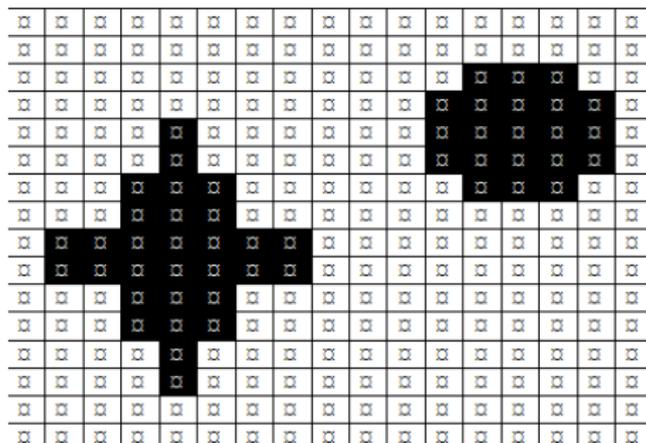
## Периметр

$$|P| = \left| \left\{ k \mid (r_{r+1}, c_{r+1}) \in N_4(r_r, c_r) \right\} \right| + \sqrt{2} \left| \left\{ k \mid (r_{r+1}, c_{r+1}) \in N_8(r_r, c_r) - N_4(r_r, c_r) \right\} \right|$$



# Округлость

$$C_1 = \frac{|P|^2}{A}$$



## Округлость Харалика 1974

$$C_2 = \frac{\mu_R}{\sigma_R}$$

$$\mu_R = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \left\| (r_k, c_k) - (\bar{r}, \bar{c}) \right\|$$

$$\sigma_R = \left( \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \left[ \left\| (r_k, c_k) - (\bar{r}, \bar{c}) \right\| - \mu_R \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

# Основные свойства областей изображений

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0
2 2 2 2 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0
2 2 2 2 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0
2 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0
2 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
2 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
2 2 2 2 0 0 3 3 3 0 0 0 0 0 0 0
2 2 2 2 0 0 3 3 3 0 0 0 0 0 0 0
2 2 2 2 0 0 3 3 3 0 0 0 0 0 0 0
2 2 2 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    
```

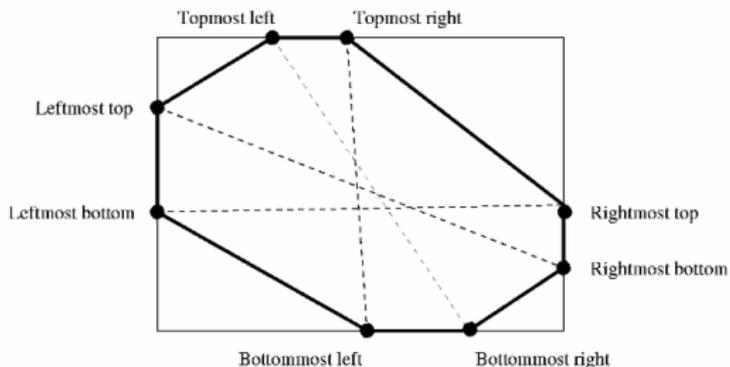
labeled connected-components image

region num.	region area	row of center	col of center	perim. length	circularity <sub>1</sub>	circularity <sub>2</sub>	radius mean	radius var.
1	44	6	11.5	21.2	10.2	15.4	3.33	.05
2	48	9	1.5	28	16.3	2.5	3.80	2.28
3	9	13	7	8	7.1	5.8	1.2	0.04

properties of the three regions

## Описывающий прямоугольник и экстремальные точки

Для оценки приблизительного местоположения



$$D = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + (c_2 - c_1)^2} + Q(\Theta)$$
$$Q(\Theta) = \begin{cases} \frac{1}{|\cos \Theta|} & : |\Theta| < 45^\circ \\ \frac{1}{|\sin \Theta|} & : |\Theta| > 45^\circ \end{cases}$$

## Центральный момент второго порядка

- Центральный момент второго порядка по строке

$$\mu_{rr} = \frac{1}{A} \sum_{(r,c) \in R} (r - \bar{r})^2$$

- Центральный момент второго порядка столбцу

$$\mu_{cc} = \frac{1}{A} \sum_{(r,c) \in R} (c - \bar{c})^2$$

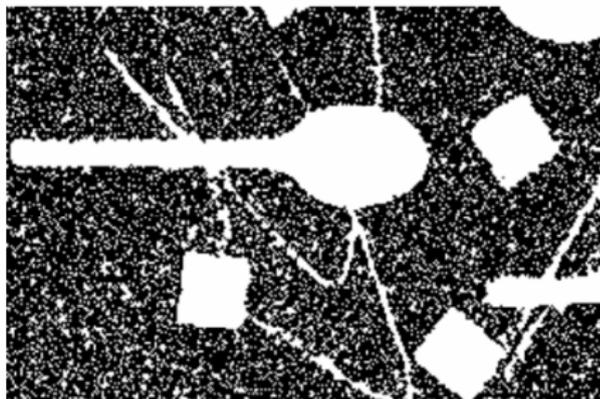
- Смешанный центральный момент второго порядка

$$\mu_{rc} = \frac{1}{A} \sum_{(r,c) \in R} (r - \bar{r})(c - \bar{c})$$

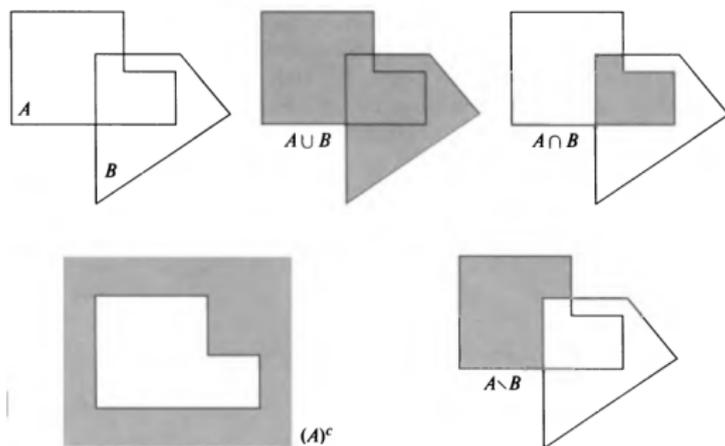
## Содержание

- 1 Выделение и маркировка связанных областей
  - Выделение связанных областей
  - Маркировка связанных областей
  - Подсчёт объектов на изображении
- 2 Свойства областей бинарного изображения
  - Геометрические свойства
  - Свойства формы
- 3 Математическая морфология
  - На чём основана
  - Дилатация и эрозия
  - Замыкание и размыкание
  - Основные морфологические алгоритмы

## Плохие входные данные



## Операции над множествами



- Два множества A и B
- Объединение множеств A и B
- Пересечение множеств A и B
- Дополнение множеств A и B
- Разность множеств A и B

## Кроме того

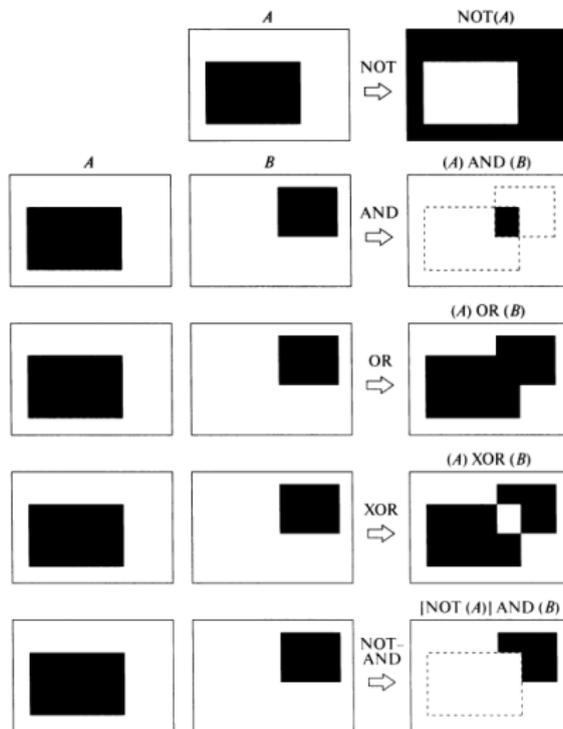
- Центральное отражение

$$\hat{B} = \{w \mid w = -b, b \in B\}$$

- Параллельный перенос

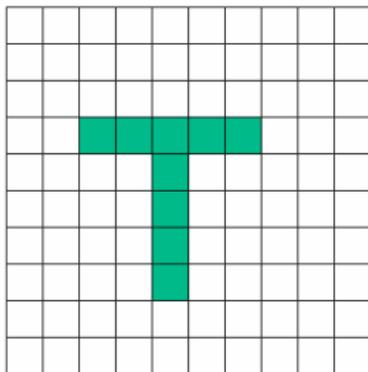
$$(A)_z = \{c \mid c = a + z, a \in A\}$$

# Логические операции



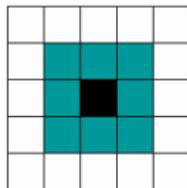
## Основные действующие лица

**A**



Объект обработки

**B**



Структурный элемент – инструмент

## Примеры структурирующих элементов

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

a) BOX(3,5)

	1	1	1	
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
	1	1	1	

b) DISK(5)

	1	1	1	
1				1
1				1
1				1
	1	1	1	

c) RING(5)

1	1		
1	1		
1	1	1	1
1	1	1	1

d)

1	1	1	1	1	1
1		1	1		1
1		1	1		1
1		1	1		1

e)

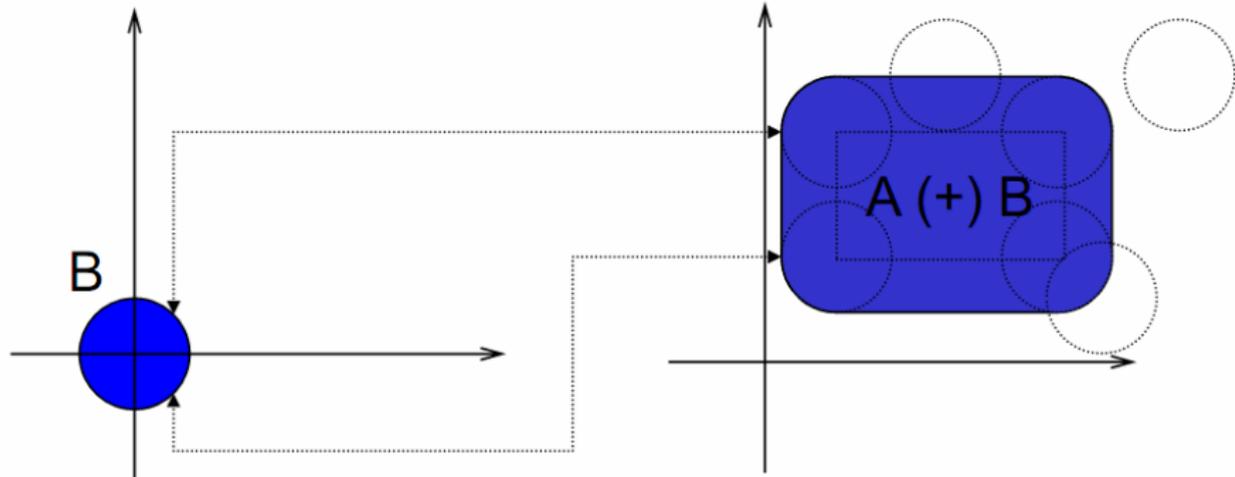
1
1
1
1

f)

## Базовые операции морфологии

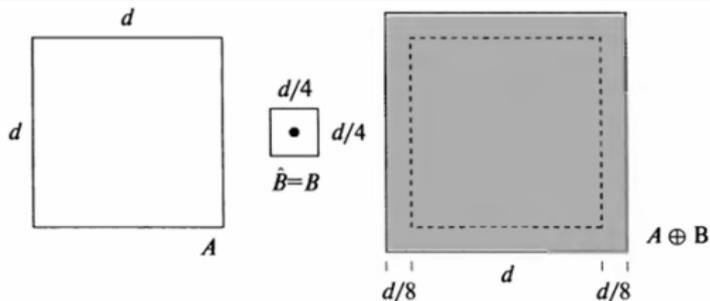
- Расширение или наращивание (Dilation)
- Сужение или эрозия (Erosion)
- Замыкание (closing)
- Размыкание (opening)

## Расширение или наращивание (Dilation): геометрическая интерпретация



# Дилатация множества $A$ по множеству $B$

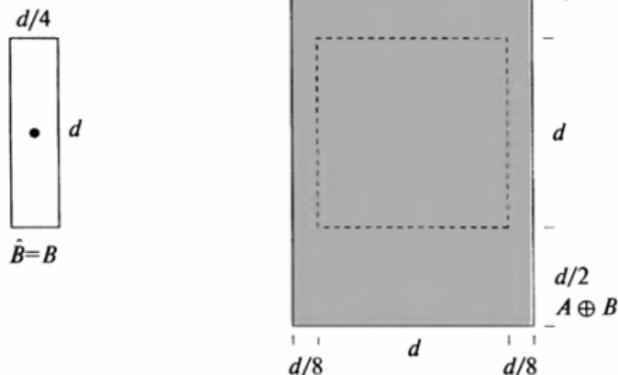
- Def:



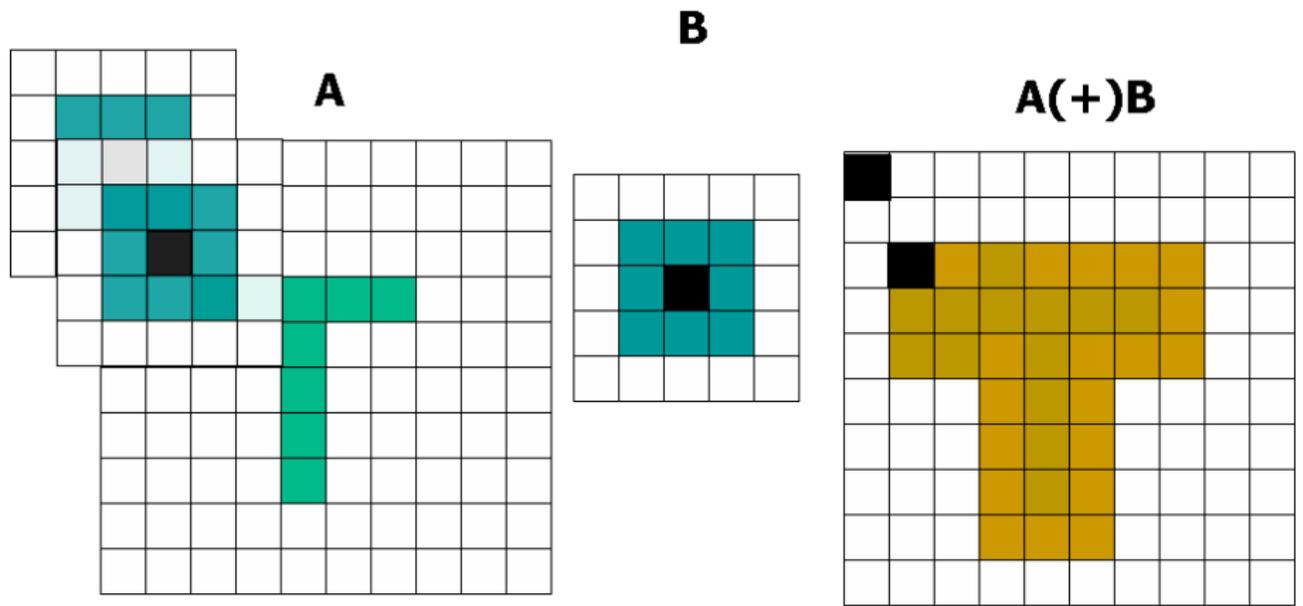
$$A \oplus B = \{z \mid (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$$

- Def:

$$A \oplus B = \bigcup_{a \in A} B_a$$



# Аналог логического или



## Пример

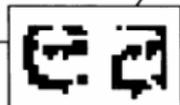
	1	1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	
			1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	
		1	1				

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1			

## Дилатация для текста

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



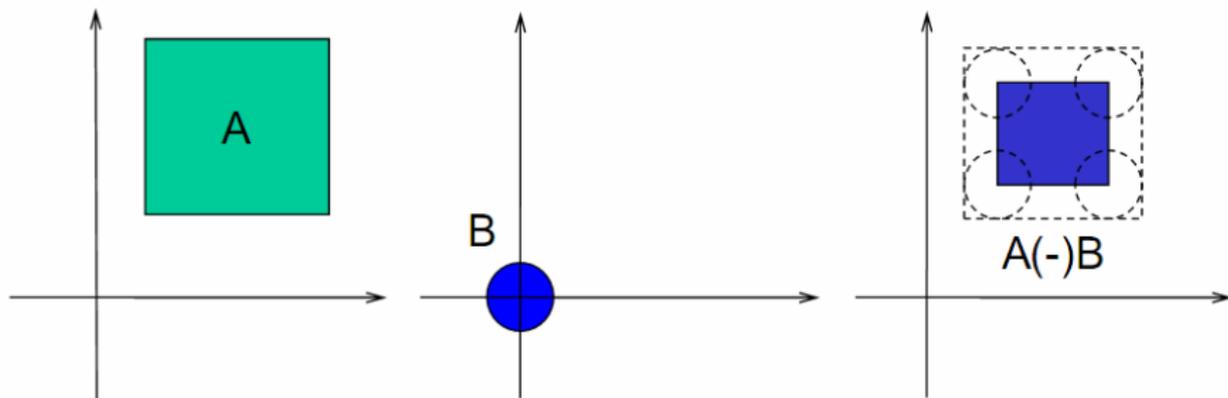
**Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.**



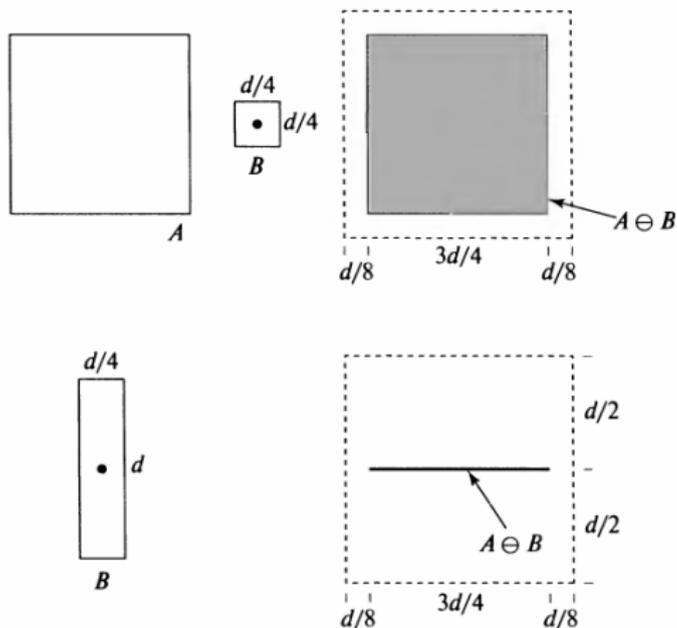
Мах длина разрыва = 2 пиксела

0	1	0
1	1	1
0	1	0

## Сужение или эрозия (Erosion): геометрическая интерпретация



## Сужение или эрозия (Erosion)



## Эрозия множества $A$ по множеству $B$

- Def:

$$A \ominus B = \{z \mid (B)_z \subseteq A\}$$

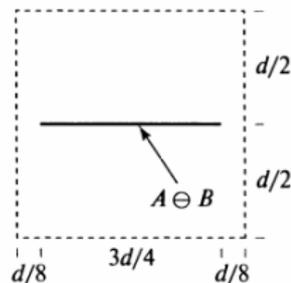
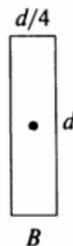
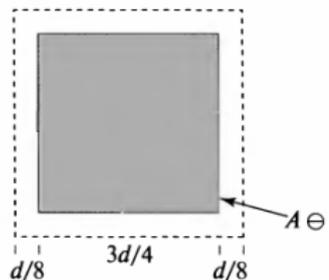
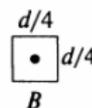
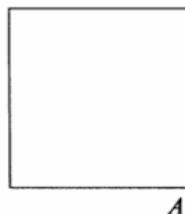
- Def:

$$A(-)B = \{a \mid a + b \in A \forall b \in B\}$$

- Def:

$$A(-)B = (A^C (+) B)^C,$$

где  $A^C$  – дополнение  $A$



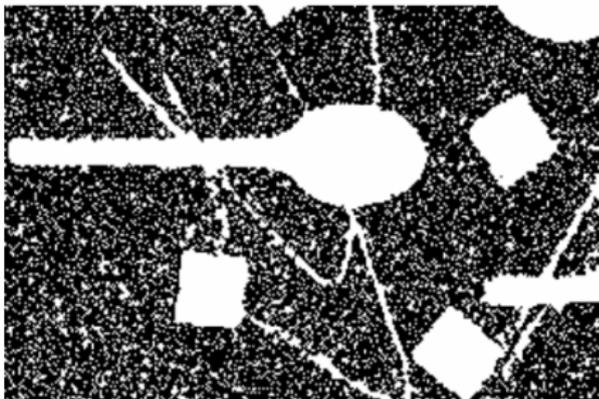
# Пример

	1	1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	
			1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	
		1	1				

1	1	1
1	1	1
1	1	1

				1	1		
				1	1		
				1	1		

## Плохие входные данные



## Результат применения эрозии



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & [1] & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & [1] & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & [1] & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Алгоритм морфологического расширения

```
void Dilation (BIT*src [], bool*mask [], BIT*dst []) {  
    //W, H – размеры исходного и результирующего изображений  
    //MW, MH – размеры структурного множества  
    for (y = MH/2; y < H - MH/2; y++)  
        for (x = MW/2; x < W - MW/2; x++) {  
            BIT max=0;  
            for (j = -MH/2; j <= MH/2; j++)  
                for (i = -MW/2; i <= MW/2; i++)  
                    if (mask[i][j] && src[x+i][y+j] > max)  
                        max = src[x+i][y+j];  
            dst[x][y] = max;  
        }  
}
```

## Алгоритм морфологического сужения

```
void Dilation (BIT* src [], bool* mask [], BIT* dst []) {  
    //W, H – размеры исходного и результирующего изображений  
    //MW, MH – размеры структурного множества  
    for (y = MH/2; y < H - MH/2; y++)  
        for (x = MW/2; x < W - MW/2; x++) {  
            BIT min = MAXBIT;  
            for (j = -MH/2; j <= MH/2; j++)  
                for (i = -MW/2; i <= MW/2; i++)  
                    if (mask[i][j] && src[x+i][y+j] < min)  
                        min = src[x+i][y+j];  
            dst[x][y] = min;  
        }  
}
```

## Свойства морфологических операций

### Коммутативный закон

- $A (+) B = B (+) A$
- $A (-) B < > B (-) A$

### Ассоциативный закон

- $A (+) (B (+) C) = (A (+) B) (+) C$
- $A (-) (B (-) C) = (A (-) B) (-) C$

## Двойственность

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$$

$$(A \oplus B)^c = A^c \ominus \hat{B}$$

- Дилатация и эрозия являются двойственными операциями по отношению к теоретико-множественным операциям дополнения и центрального отражения

$$A (-) B = (A^c (+) B)^c,$$

где  $A^c$  – дополнение  $A$

## Формальное доказательство

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$$

$$(A \ominus B)^c = \{z \mid (B)_z \subseteq A\}^c$$

$$(A \ominus B)^c = \{z \mid (B)_z \cap A^c = \emptyset\}^c$$

$$(A \ominus B)^c = \{z \mid (B)_z \cap A^c \neq \emptyset\} = A^c \oplus \hat{B}$$

## Результат применения эрозии и дилатации

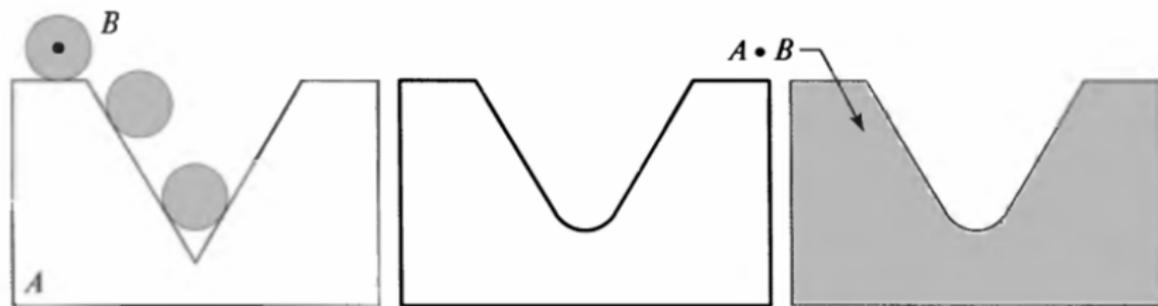


(а) Изображение, содержащее квадраты со сторонами 1, 3, 5, 7, 9 и 15 пикселей. (б) Результат эрозии изображения (а) по квадратному примитиву размерами  $13 \times 13$  пикселей, заполненному единицами. (в) Результат дилатации изображения (б) по тому же примитиву.

## Замыкание, закрытие (closing)

Def:  $A \bullet B = (A \oplus B) - B$

$$\text{close}(A, B) = (A (+) B) (-) B$$



## Пример замыкания

$$B \bullet S = (B \oplus S) - S$$

	1	1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	
			1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	
		1	1				

1	1	1
1	1	1
1	1	1

a) Binary image B

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1			

c) Dilation  $B \oplus S$

	1	1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
		1	1				

e) Closing  $B \bullet S$

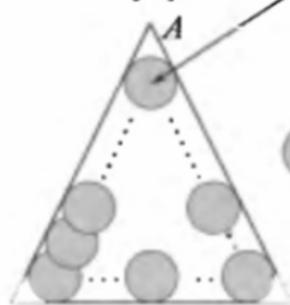
## Свойства замыкания

- а)  $A$  является подмножеством (вложенным изображением)  $A \bullet B$ .
- б) Если  $C$  есть подмножество  $D$ , то  $C \bullet B$  является подмножеством  $D \bullet B$ .
- в)  $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$ .

## Размыкание, раскрытие (opening)

Def:  $A \circ B = (A(-)B) \oplus B$

Сдвиги  $B$  внутри  $A$



$B = \cup \{(B)_z \mid (B)_z \subseteq A\}$



## Пример размыкания

1	1	1
1	1	1
1	1	1

	1	1	1	1	1	1
			1	1	1	1
			1	1	1	1
		1	1	1	1	1
			1	1	1	1
		1	1			

$$B \circ S = (B - S) \oplus S$$

			1	1		
			1	1		
			1	1		

a) Binary image B

		1	1	1	1	
		1	1	1	1	
		1	1	1	1	
		1	1	1	1	
		1	1	1	1	

d) Erosion  $B \ominus S$

f) Opening  $B \circ S$

## Сужение vs Размыкание



Сужение



Открытие

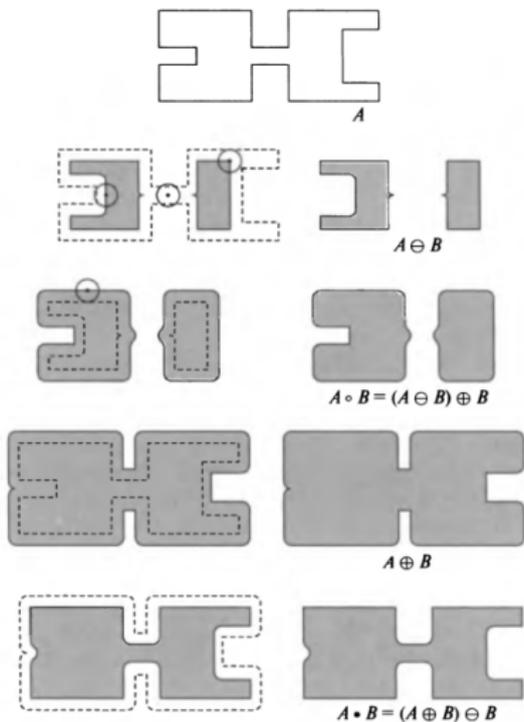
## Свойства размыкания

- а)  $A \circ B$  является подмножеством  $A$  (т.е. вложенным изображением).
- б) Если  $C$  есть подмножество  $D$ , то  $C \circ B$  является подмножеством  $D \circ B$ .
- в)  $(A \circ B) \circ B = A \circ B$ .

## Двойственность

$$(A \bullet B)^c = A^c \circ \hat{B}$$

## Размыкание и замыкание



## Морфологическая фильтрация



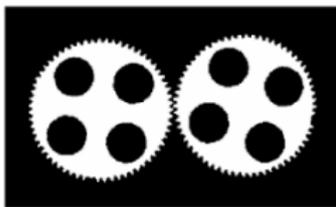
Исходное изображение предоставлено Национальным институтом стандартов и технологии США

## Морфологическая фильтрация



- Размыкание структурирующим элементом DISK(13)
- Замыкание элементом DISK(2)

## Контроль шестерѐнок



a) original image B



b)  $B1 = B \ominus \text{hole\_ring}$



c)  $B2 = B \oplus \text{hole\_mask}$



d)  $B3 = B \text{ OR } B2$

- Работа Штернберга

## Контроль шестерёнок 2



e) B7 (see text)



f) B8 = B AND B7



g) B9 = B8  $\oplus$  tip.spacing



h) RESULT = ((B7 - B9)  $\oplus$  defect.cue) OR B9

## Выделение областей примитивной формы с помощью бинарной морфологии



Исходное



Размыкание



Углы

## Условное наращивание (conditional dilation)

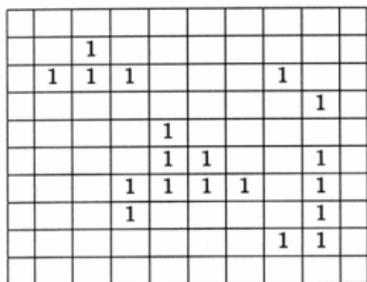
Def:  $C_0 = C$        $C_n = (C_{n-1} \oplus S) \cap B$

$$C \oplus |_B S = C_m$$

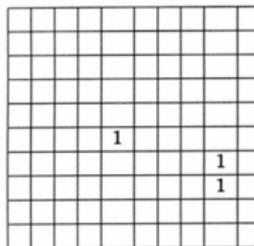
где индекс  $m$  – минимальный индекс, при котором

$$C_m = C_{m-1}$$

# Условное наращивание (conditional dilation)



a) Binary image B

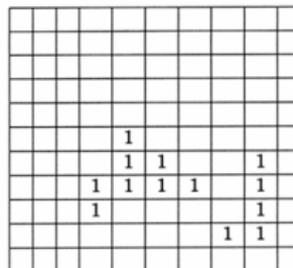


d)  $C = B \ominus V$



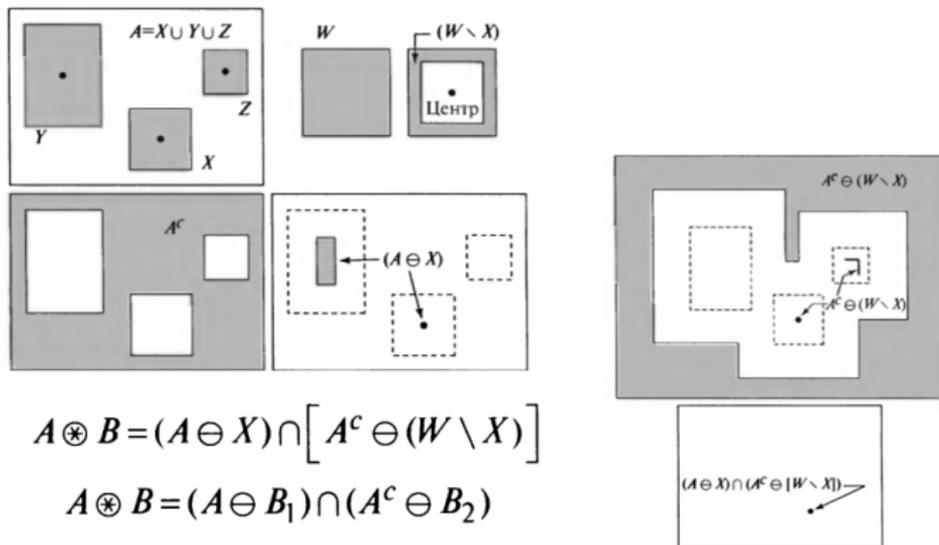
b) Structuring element V

c) Structuring element D



e)  $C \oplus_B D$

# Преобразование попадание пропуск (hit or miss transform)

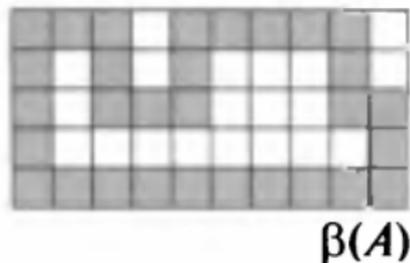
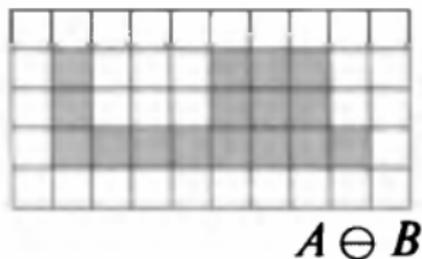
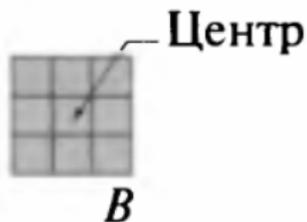
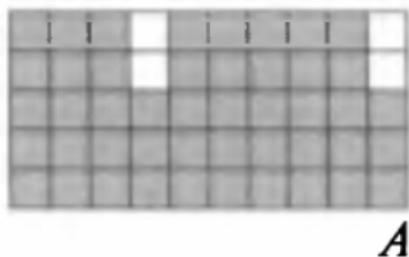


## Основные морфологические алгоритмы

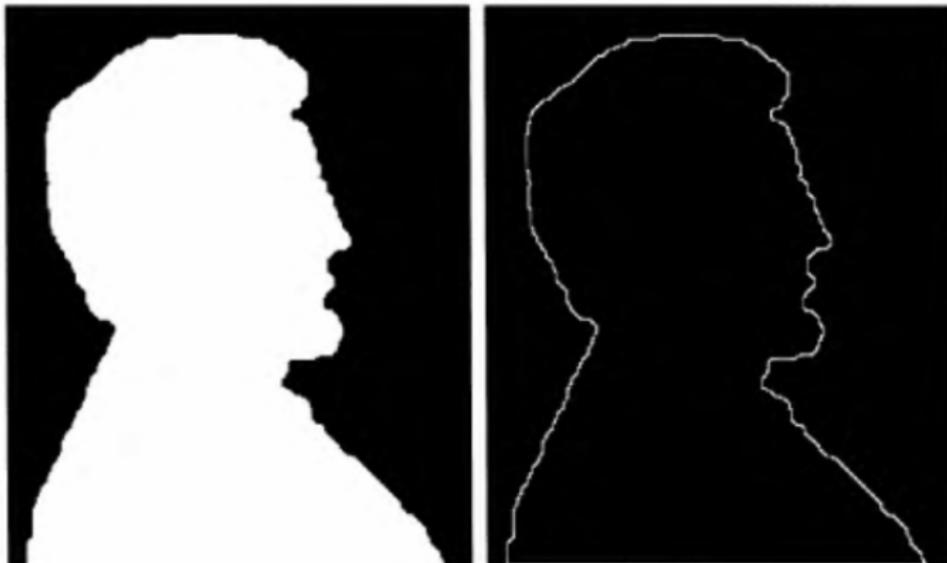
- Выделение границ
- Заполнение дырок
- Выделение связных компонент
- Построение выпуклой оболочки
- Утончение
- Утолщение

## Выделение границ

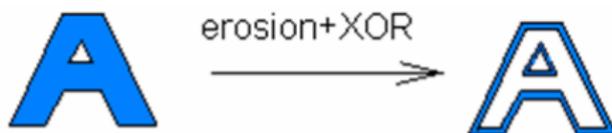
$$\beta(A) = A \setminus (A \ominus B)$$



## Выделение границы

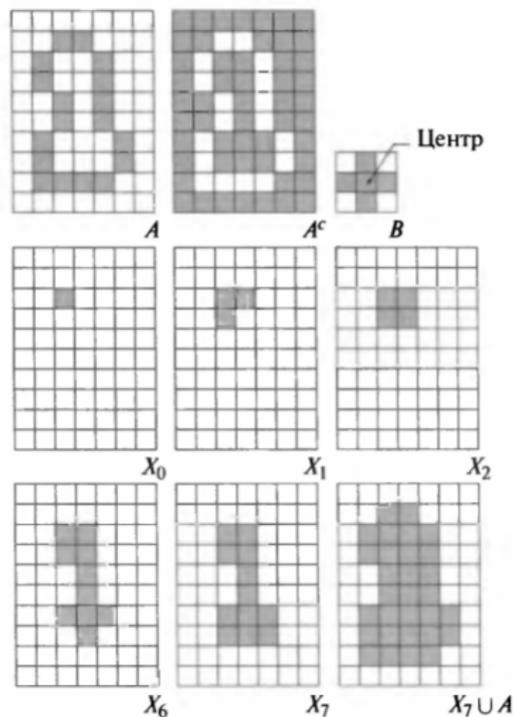


## Выделение границы



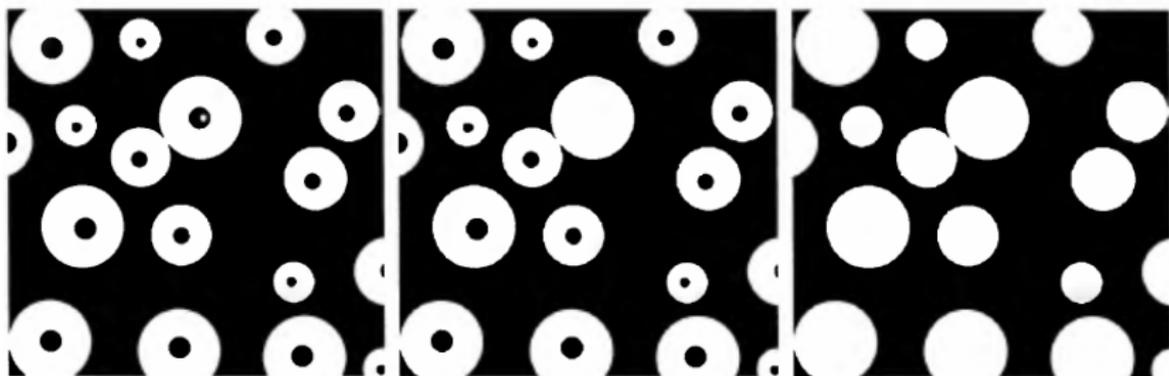
$B \setminus (B \ominus S)$  – внутренняя граница  
 $(B \oplus S) \setminus B$  – внешняя граница

## Заполнение дырок



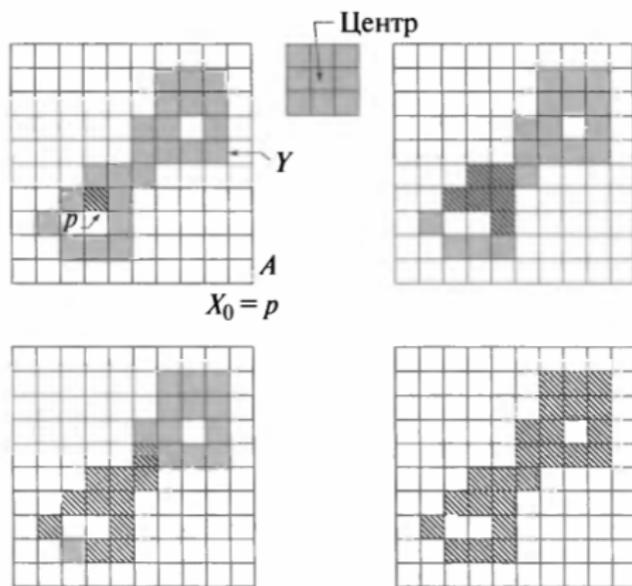
$$X_k = X_{k-1}$$

## Заполнение дырок



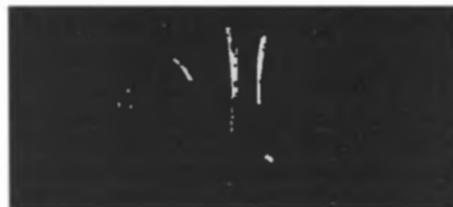
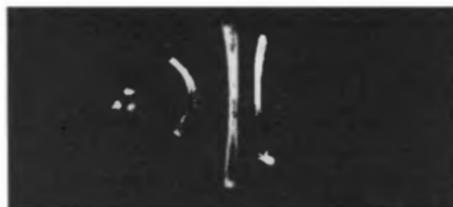
## Выделение связанных компонент

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$



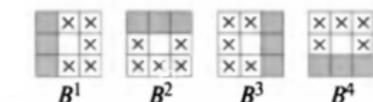
$$X_k = X_{k-1}$$

## Выделение связанных компонент

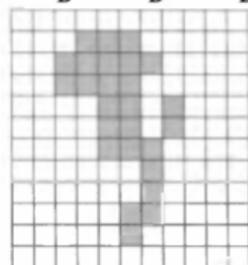


Номер связной компоненты	Число пикселей в связной компоненте
01	11
02	9
03	9
04	39
05	133
06	1
07	1
08	743
09	7
10	11
11	11
12	9
13	9
14	674
15	85

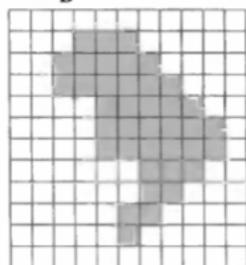
## Построение выпуклой оболочки



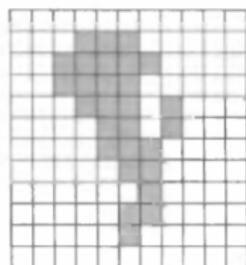
$$X_k^i = (X_{k-1}^i \otimes B^i) \cup A \quad i=1,2,3,4 \text{ и } k=1,2,3,\dots$$



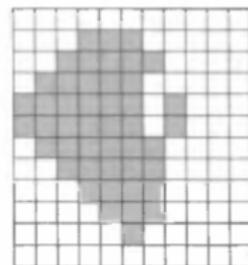
$X_0^1 = A$



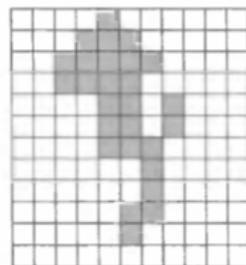
$X_1^1$



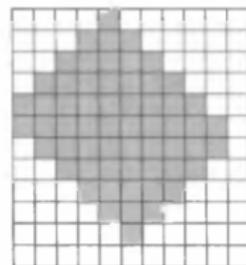
$X_2^1$



$X_3^1$



$X_4^1$

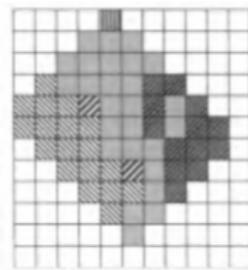


$C(A)$

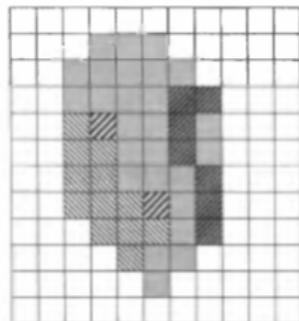
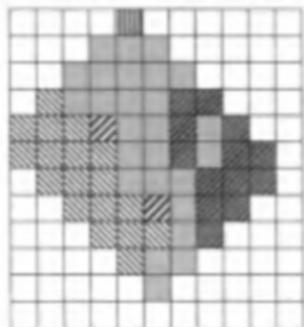
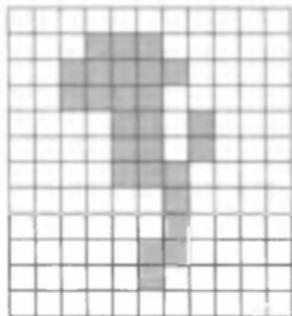
$$D^i = X_{\text{сход}}^i$$

$$X_k^i = X_{k-1}^i$$

$$C(A) = \bigcup_{i=1}^4 D^i$$



## Построение выпуклой оболочки с ограничениями



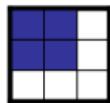
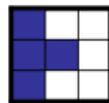
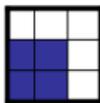
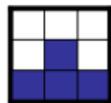
## Утончение

$$A \otimes B = A \setminus (A \otimes B) = A \cap (A \otimes B)^c$$

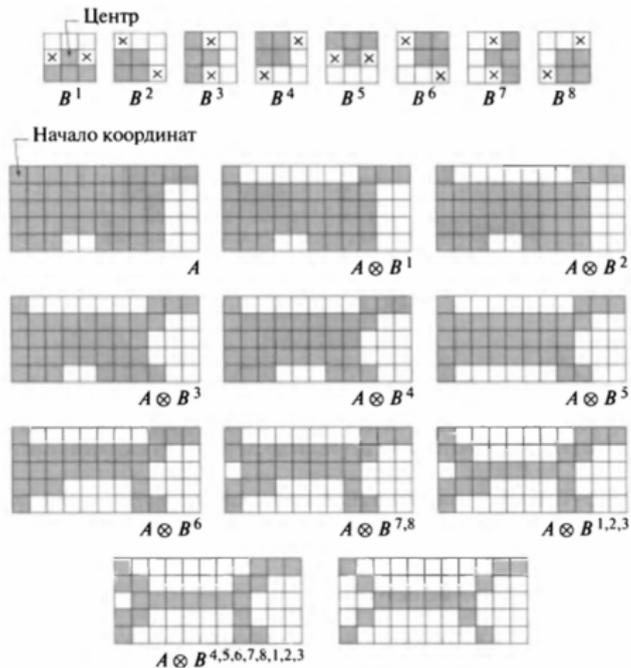
Симметричное утончение

$$\{B\} = \{B^1, B^2, B^3, \dots, B^n\}$$

$$A \otimes \{B\} = (((A \otimes B^1) \otimes B^2) \dots) \otimes B^n$$



## Процесс симметричного утончения



## Смежность и связность

1) 4-смежность.  $N_4(p)$

$(x-1,y), (x+1,y), (x,y-1), (x,y+1)$

$$|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\leq 1$$

2) 8-смежность.  $N_8(p)$

$(x-1,y-1), (x+1,y-1), (x-1,y+1), (x+1,y+1)$

$$|x_1-x_2|\leq 1$$

$$|y_1-y_2|\leq 1$$

## Смешанная смежность

0	1	1
0	1	0
0	0	1

0	1	1
0	1	0
0	0	1

$N_8(p)$

0	1	1
0	1	0
0	0	1

m-смежность

## Термины

- Область
- Граница (замкнутый контур или край)
- Контур (разрывы яркости)
- Дискретный путь, длина пути

## Мера расстояния

$D$  – функция расстояния или метрика, если

$$D(p, q) \geq 0$$

$$D(p, q) = 0 \leftrightarrow p = q$$

$$D(p, q) = D(q, p)$$

$$D(p, z) \leq D(p, q) + D(q, z)$$

## Метрики

Евклидово расстояние метрика L2

$$D_e(p, q) = \left[ (x-s)^2 + (y-t)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Расстояние D4 метрика L1

$$D_4(p, q) = |x-s| + |y-t|$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 2 & & \\ & & & & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & & \\ & & & & 2 & 1 & 2 \\ & & & & 2 & & \end{array}$$

Расстояние D8 метрика L8

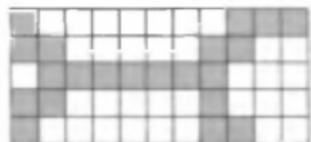
$$D_8(p, q) = \max(|x-s|, |y-t|)$$

## Расстояния

$D_4$        $D_8$        $D_m$  (кратчайший  $m$ -путь)

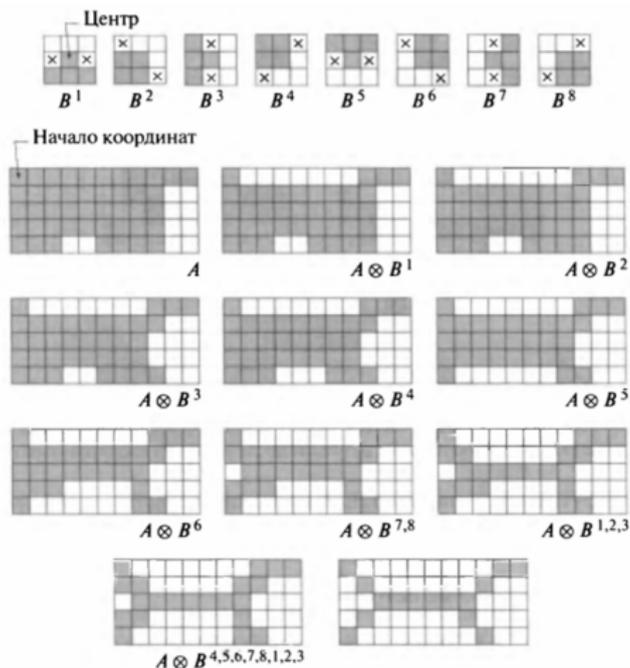
	$p_3$	$p_4$
$p_1$	$p_2$	
$p$		

$p, p_2, p_4 = 1$



$A \otimes B^{4,5,6,7,8,1,2,3}$

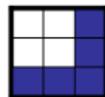
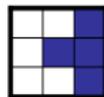
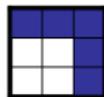
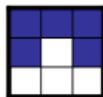
# Процесс симметричного утончения с исключением неоднозначности внутренних путей



## Утолщение

$$A \odot B = A \cup (A \otimes B)$$

$$A \odot \{B\} = ((\dots((A \odot B^1) \odot B^2) \dots) \odot B^n)$$



# Утолщение на базе дополнения

