

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Колосова Е.М., Наседкин А.В., Чебаков М.И.

**РЕШЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ
ЗАДАЧ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ
КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ.**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ К
ПРАКТИКУМУ ПО КУРСУ
«Моделирование задач механики
деформированного твердого тела в программном
комплексе конечно-элементного анализа ANSYS.
Нелинейные задачи»**

Ростов-на-Дону

2009

Учебно-методическое пособие разработано кандидатом физико-математических наук, старшим преподавателем кафедры математического моделирования Е.М. Колосовой, доктором физико-математических наук, профессором кафедры математического моделирования А.В. Наседкиным и доктором физико-математических наук, профессором кафедры теории упругости М.И. Чебаковым.

Печатается в соответствии с решением кафедры математического моделирования факультета математики, механики и компьютерных наук ЮФУ (протокол № 6 от 12 ноября 2009 г.).

Учебно-методическое пособие предназначено для поддержки одного из разделов практикума по курсу «Моделирование задач механики деформированного твердого тела в программном комплексе конечно-элементного анализа ANSYS. Нелинейные задачи» программы переподготовки «Компьютерная механика». Данные курс и практикум являются центральным учебным материалом при продвинутом изучении конечно-элементного программного комплекса ANSYS.

В пособие на примере решения задачи о контактном взаимодействии роликовых пар описывается методология решения статических контактных задач теории упругости для трехмерных тел канонической формы в конечно-элементном программном комплексе ANSYS с использованием командного языка программирования APDL ANSYS. Приводятся варианты заданий по решению аналогичных контактных задач.

Практикум может быть полезен как слушателям программы переподготовки «Компьютерная механика», так и студентам и аспирантам, интересующимся методом конечных элементов и программным комплексом ANSYS и специализирующимся в областях механики твердого деформируемого тела, математического моделирования и вычислительной математики.

© Колосова Е.М., Наседкин А.В., Чебаков М.И., 2009

© Южный федеральный университет, 2009.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Описание задачи.....	7
2. Решение задачи в пространственной постановке с помощью APDL ANSYS	7
3. Сравнение полученных значений напряжений со значениями, полученными по теории Герца	23
4. Варианты заданий для самостоятельной работы	24
Литература	31

Введение

Данное пособие разработано для поддержки курса «Моделирование задач механики деформированного твердого тела в программном комплексе конечно-элементного анализа ANSYS. Нелинейные задачи» программы переподготовки «Компьютерная механика».

Предполагается, что обучаемые знакомы с основами работы в конечно-элементном пакете ANSYS и знают или изучают параллельно командный язык APDL (ANSYS Parametric Design Languages – язык параметрического программирования ANSYS). Желательно также знакомство с основами метода конечных элементов и контактных задач теории упругости.

Курс «Моделирование задач механики деформированного твердого тела в программном комплексе конечно-элементного анализа ANSYS. Нелинейные задачи» и соответствующий практикум являются центральными при продвинутом изучении техники работы в конечно-элементном пакете ANSYS при решении задач структурного анализа с усложненными свойствами. Для первоначального знакомства с методологией решения задач теории упругости в пакете ANSYS рекомендуется первоначально освоить курс «Моделирование задач механики деформированного твердого тела в программном комплексе конечно-элементного анализа ANSYS. Базовый курс» программы переподготовки «Компьютерная механика».

Представленный раздел практикума преследует две цели: во-первых, познакомить слушателей с методологией решения контактных задач теории упругости по методу конечных элементов в пакете ANSYS, во-вторых, привести соответствующие примеры развитого использования командного языка APDL ANSYS для моделирования трехмерных тел канонической формы с дополнительными подобластями, задания необходимых объектов для решения контактных задач и постпроцессорной обработки результатов конечно-элементного расчета контактных задач.

В пособии в качестве примера статической контактной задачи рассматривается задача о взаимодействии двух роликовых пар с различными физическими свойствами, геометрическими параметрами и радиусами кривизны в двух перпендикулярных направлениях. Такая система моделирует трибосистему «железнодорожное колесо-рельс», обеспечивая при соответствующих выборах входных параметров те же контактные напряжения, что и в системе «колесо-рельс» при реальных нагрузках [3].

Данная задача является достаточно хорошим примером реальной контактной задачи. В ней рассматриваются два контактирующих между собой трехмерных тела канонической формы с различными материальными свойствами. Однако особенности конечно-элементного решения контактных задач требуют сгущения конечно-элементных сеток в зонах контакта. Для этого в примере выделяются дополнительные объемы внутри тел вблизи точки контакта, в которых обеспечивается более мелкое разбиение.

Существенным отличием контактных задач является необходимость задания пар специальных контактных элементов (контактных и ответных элементов по терминологии ANSYS). В примере приведен вариант формирования данных элементов с помощью средств командного языка APDL ANSYS. В пособии представлены также полезные средства получения важнейших данных решения контактных задач в постпроцессоре ANSYS средствами языка APDL.

Отметим, что программирование на языке APDL ANSYS позволяет осуществить сквозное планирование вычислительным экспериментом, создавать твердотельную (геометрическую + физическую) модели задачи, получить из нее конечно-элементную модель с требуемыми характеристиками, задавать опции решателя, внешние воздействия, решить задачу и, наконец, провести постпроцессорную обработку результатов.

Для знакомства с языком APDL можно рекомендовать, прежде всего, фирменную документацию ANSYS и программы на APDL ANSYS, имеющиеся в этой документации [6-12]. Перевод раздела по APDL имеется в [2], где представлено

много поучительных программ на языке APDL ANSYS. Пакет ANSYS в ориентации на командный язык представлен также в [1], и, конечно же, надо отметить объемную работу [8], где имеются авторские программы на APDL ANSYS для решения многих классов задач.

1. Описание задачи и вводные замечания

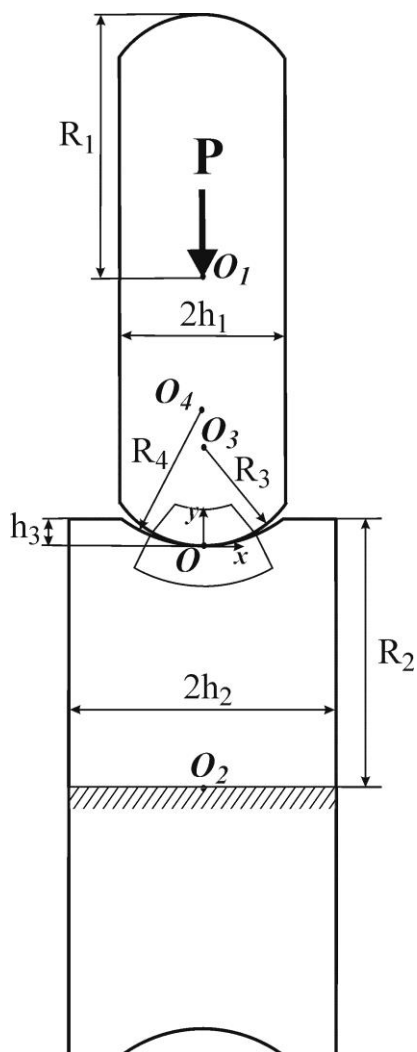


Рисунок 1 – Схема задачи в сечении по плоскости $ху$

В данном разделе опишем постановку трехмерной контактной задачи о взаимодействии роликовой пары. Верхний ролик с закруглением радиуса $R_3 = 0.012$ (м) имеет радиус $R_1 = 0.02$ (м) и ширину $2h_1$; $h_1 = 0.004$ (м). Нижний ролик с выемкой радиуса $R_4 = 0.015$ (м) и высотой выемки $h_3 = 0.0005$ (м) имеет радиус $R_2 = 0.02$ (м) и ширину $2h_2$; $h_2 = 0.005$ (м). Для удобства указания размеров роликовая пара изображена в сечении по плоскости $ху$ (рисунок 1). Ролики имеют различные физические свойства. Верхний ролик выполнен из изотропного материала с модулем Юнга $E_1 = 2.5 \cdot 10^{11}$ (Н/м²) и коэффициентом Пуассона $\nu_1 = 0.29$, нижний – из изотропного материала с модулем Юнга $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ (Н/м²) и коэффициентом Пуассона $\nu_2 = 0.29$. Контактное взаимодействие роликов вызывается сосредоточенной силой $P = 225$ (Н), приложенной в центре верхнего ролика и направленной вертикально вниз. Горизонтальная ось нижнего ролика жестко закреплена. Требуется определить

напряжения σ_y и перемещения u_y в зоне контакта роликов.

2. Решение задачи в пространственной постановке с помощью APDL ANSYS

Ниже приведен список основных шагов, применяемых при расчете контактной задачи в программном комплексе ANSYS:

1. Создание геометрической модели и конечно-элементной сетки.
2. Идентификация контактных пар.
3. Назначение контактной и ответной поверхностей.
4. Приложение необходимых граничных условий.
5. Расчет контактной задачи.
6. Просмотр и анализ результатов.

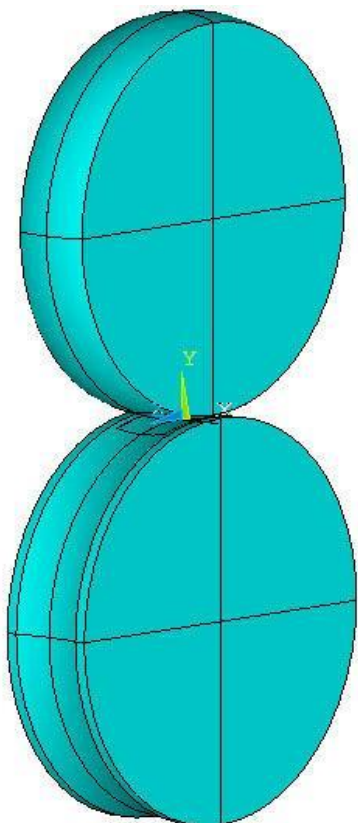


Рисунок 2 – Трёхмерная геометрическая модель

Решение рассматриваемой задачи с помощью APDL ANSYS демонстрирует файл St3SCONT.INP, фрагменты которого представлены ниже в данном пособии. Трёхмерная геометрическая модель роликовой пары, изображенная на рисунке 2, симметрична относительно плоскостей OXY и OYZ. Поэтому можно построить 1/4 часть модели, а затем средствами APDL ANSYS наложить условия симметрии на области, находящиеся в этих плоскостях. Построение твердотельной модели (геометрической модели с физическими свойствами) осуществляем по технологии моделирования «снизу-вверх» с использованием следующей последовательности действий:

- задание опорных точек;
- построение дуг и прямых линий, соединяющих опорные точки;
- определение областей по точкам и линиям
- создание пространственных тел;
- связывание с различными телами заданных физико-механических свойств материалов.

Введя заголовок /TITLE (не обязательная процедура) и перейдя в препроцессор /PREP7, зададим геометрические размеры роликов, материальные кон-

станты, размеры для канонических областей, параметры разбиения, величину приложенной силы:

/TITLE, Contact interaction of a roller pair

/PREP7

! Геометрические размеры верхнего и нижнего ролика

R1=0.02 !радиус верхнего ролика

R2=0.02 !радиус нижнего ролика

R3=0.012 !радиус закругления верхнего ролика

R4=0.015 !радиус выемки на нижнем ролике

h1=0.004 !половина ширины верхнего ролика

h2=0.005 !половина ширины нижнего ролика

h3=0.0005 !углубление выемки на нижнем ролике

! Материальные константы верхнего и нижнего роликов

E1=2.5e11 !Модуль Юнга материала верхнего ролика

E2=2e11 !Модуль Юнга материала нижнего ролика

NU1=0.29 !Коэффициент Пуассона материала верхнего ролика

NU2=0.29 !Коэффициент Пуассона материала нижнего ролика

!Геометрические размеры канонических областей на верхнем и нижнем ролике

d1=0.003 !ширина контакта на верхнем ролике

d2=0.003 !ширина контакта на нижнем ролике

PSIX_BOTTOM=12 !Угол раствора по X для нижней канонической области

PSIX_TOP=15 !Угол раствора по X для верхней канонической области

PSIZ_BOTTOM=21 !Угол раствора по Z для нижней канонической области

PSIZ_TOP=18 !Угол раствора по Z для верхней канонической области

!Параметры разбиения

GLSIZE=0.0029 **!Характерный размер элементов**

SIZE_ALL=GLSIZE/5 **!Размер элементов для всех точек**

SIZE_0=GLSIZE/20 **!Размер элементов около точки контакта роликов**

!Величина приложенной силы

PY=0.225e3

Зададим свойства материалов для верхнего и нижнего ролика с помощью команды **MP** и выберем необходимые для решения задачи типы элементов с помощью команды **ET**:

!Задание материальных свойств

MP,EX,1,E1 **!Модуль Юнга материала верхнего ролика**

MP,NUXY,1,NU1 **!Коэффициент Пуассона материала верхнего ролика**

MP,EX,2,E2 **!Модуль Юнга материала нижнего ролика**

MP,NUXY,2,NU2 **!Коэффициент Пуассона материала нижнего ролика**

!Типы элементов

ET,1,SOLID92 **! 3-D Квадратичный 10-ти узловой элемент (2 порядка)**

ET,2,TARGE170 **! 3-D Ответный элемент**

ET,3,CONTA174 **! 3-D Контактный элемент**

Построим трехмерную геометрию роликовой пары по технологии моделирования «снизу-вверх». Будем предусматривать построение отдельных объемов в зоне контакта верхнего и нижнего ролика для того, чтобы при создании конечно-элементного разбиения сгущать в них сетку конечных элементов. Для построения точек используем команду **K**, при этом часть точек будем строить в пользовательских цилиндрических системах координат **11** и **22**, которые создаются с помощью

команды **CLOCAL** и активируются с помощью **CSYS**. Для построения дуг используем команду **LARC**, а для построения прямых линий – команду **L**. Поверхности по номерам точек определяем с помощью команды **A**. Создаем объемы вращением поверхности вокруг линии, определяемой номерами точек, на заданный угол с помощью команды **VROTAT**.

!Построение геометрии

!Определение основных точек

K,1,0,0

K,2,sqrt(h3*(2*R4-h3)),h3

K,3,h2,h3

K,4,h2,-(R2-h3)

K,5,0,-(R2-h3)

K,6,0,R3

K,7,0,R4

K,8,0,R1

K,9,h1,R1

K,10,h1,R3-sqrt(R3*R3-h1*h1)

K,11,0,0

K,12,0,0

K,13,0,R4

CLOCAL,11,1,0,R4,0 **!Цилиндрическая система координат 11**

CSYS,11 **!Переход в систему координат с номером 11**

K,14,R4,-90+PSIX_BOTТОМ

K,15,R4+d2,-90+PSIX_BOTТОМ

K,16,R4+d2,-90

CSYS,0 **!Переход в основную декартову систему координат**

K,17,0,R3

CLOCAL,22,1,0,R3,0 **!Цилиндрическая система координат 22**

CSYS,22

!Переход в систему координат с номером 22

K,18,R3,-90

K,19,R3,-90+PSIX_TOP

K,20,R3-d1,-90+PSIX_TOP

K,21,R3-d1,-90

CSYS,0

!Переход в основную декартову систему координат

!Определение дуг 1-6

LARC,1,2,7,R4

LARC,11,10,6,R3

LARC,12,14,13,R4

LARC,16,15,13,R4+d2

LARC,18,19,17,R3

LARC,21,20,17,R3-d1

!Определение прямых линий 7-17

L,12,16

L,14,15

L,21,18

L,20,19

L,2,3

L,3,4

L,4,5

L,5,1

L,11,8

L,8,9

L,9,10

! Определение площадей 1-4 по опорным точкам

A,11,8,9,10

A,1,2,3,4,5

A,21,20,19,18

A,12,14,15,16

**!Создание объема вращением области 3 вокруг оси с точками 8 и 9 на угол
PSIZ_BOTTOM**

VROTAT,3,,,,,8,9,PSIZ_BOTTOM

**!Создание объема вращением области 4 вокруг оси с точками 4 и 5 на угол
PSIZ_TOP**

VROTAT,4,,,,,4,5,PSIZ_TOP

**!Создание объема вращением области 1 вокруг оси с точками 8 и 9 на 180
градусов**

VROTAT,1,,,,,8,9,180

**!Создание объема вращением обл. 2 вокруг оси с точками 4 и 5 на 180 граду-
сов**

VROTAT,2,,,,,4,5,180

!Создание новых объемов на месте пересекающихся объемов

VOVLAP,ALL

Присвоим объемам верхнего и нижнего ролика материальные свойства и зададим тип конечного элемента. Для этого с помощью команды **VSEL** выделим необходимые объемы, а затем с помощью команды **VAAT** ассоциируем с ними номера наборов заданных материальных свойств и типов элемента для дальнейшего конечно-элементного разбиения:

!Присваивание заданных материальных свойств выделенным объемам

VSEL,S,VOLU,,1

!Выделяем новое множество объемов - объем 1

VSEL,A,VOLU,,4	!Добавляем к этому множеству объем 4
VSEL,A,VOLU,,8	!Добавляем к этому множеству объем 8
VATT,1,,1	!Ассоциируем с выделенными объемами ! атрибуты: MAT=1, TYPE=1
VSEL,S,VOLU,,9	!Выделяем новое множество объемов - объем 9
VSEL,A,VOLU,,6,7	!Добавляем к этому множеству объемы 6 и 7
VATT,2,,1	!Ассоциируем с выделенными объемами ! атрибуты: MAT=2, TYPE=1
VSEL,ALL	!Возврат к выбору всех объемов

Полученная геометрическая модель роликовой пары изображена на рисунке 3. Этот рисунок иллюстрирует также различные свойства материалов у роликовых пар, которые отмечены разными цветами.

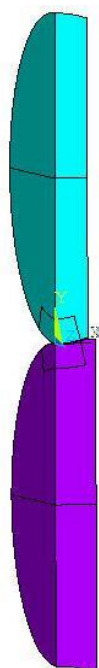


Рисунок 3 – Трёхмерная твердотельная 1/4 часть модели

В соответствие с методологией решения контактных задач по методу конечных элементов при построении сетки конечных элементов обеспечим сгущение разбиения в предполагаемой зоне контакта. Для этого в дополнительно выде-

ленных геометрических объемах задаем параметры конечно-элементной сетки меньшего размера (размер элементов – SIZE_ALL) по сравнению с остальными областями и дополнительно в точке контакта обеспечиваем сгущение сетки конечных элементов (размер элементов – SIZE_0). Вне подобластей контакта размеры элементов задаем равными величине GLSIZE.

В областях, занимаемых упругими материалами роликовой пары, используем объемные десятиузловые тетраэдральные конечные элементы типа SOLID92 пакета ANSYS. Зададим параметры разбиения с помощью команды **KESIZE** и построим конечно-элементную модель роликовой пары с помощью команды **VMESH**:

!Задание параметра для построения сетки конечных элементов во всех точках

KESIZE,ALL,SIZE_ALL

!Задание параметра для построения сетки конечных элементов около точки контакта роликов

KESIZE,18,SIZE_0

!Построение сетки КЭ для объемов 1,7

VMESH,1

VMESH,7

!Задание параметра для построения сетки конечных элементов во всех точках

KESIZE,ALL,GLSIZE

!Построение сетки КЭ для объемов 4,6,8,9

VMESH,4

VMESH,6

VMESH,8

VMESH,9

В итоге получаем конечно-элементную модель роликовой пары (рисунок 4).

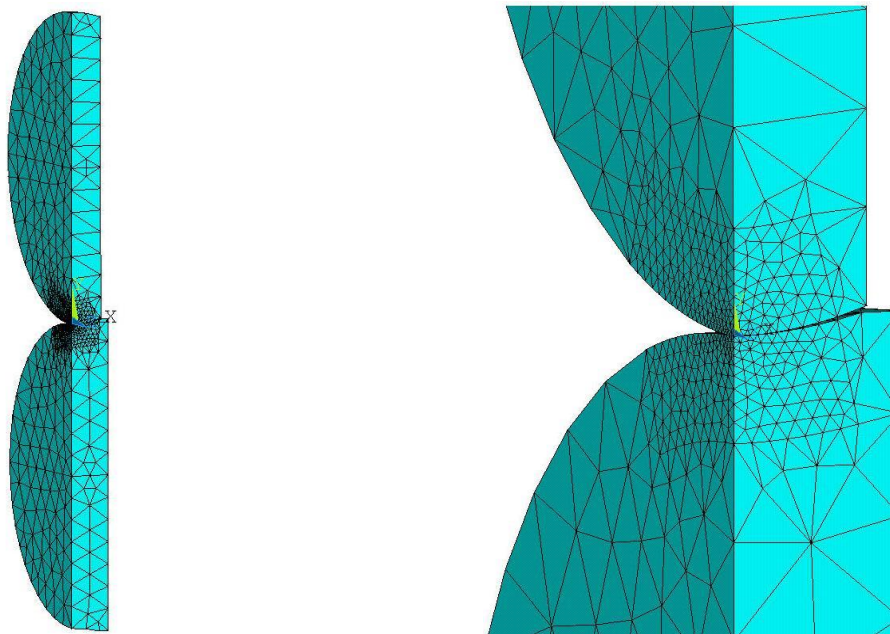


Рисунок 4 – Трёхмерная конечно-элементная $\frac{1}{4}$ часть модели

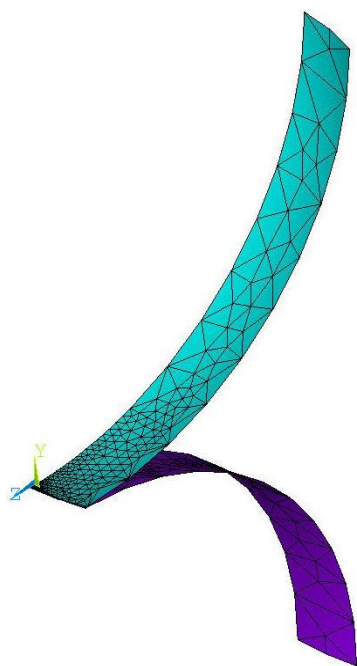


Рисунок 5 – Контактная пара

На поверхности предполагаемого контакта нижнего ролика автоматически формируем восьми-узловые поверхностные контактные конечные элементы **CONTA174**, а на поверхности предполагаемого контакта верхнего ролика – ответные контактные элементы **TARGE170**. Для этого выделяем нужные области с помощью команды **ASEL**, а затем узлы, принадлежавшие этим областям (команда **NSLA**). Объединяем выбранные узлы в компоненты **STRIP** и **PUNCH** с помощью команды **CM**. Указываем тип элемента и номер материальных свойств с помощью команд **TYPE** и **MAT** и генерируем контактные и ответные элементы с помощью команды

ESURF.

Полученная контактная пара изображена на рисунке 5.

!Задание контактных элементов

ASEL,S,AREA,,34

!Выделяем новое множество областей - область 34

ASEL,A,AREA,,40	!Добавляем к этому множеству область 40
NSLA,,1	!Выбираем узлы, принадлежащие выбранным поверхностям
CM,STRIP,NODE	!Объединяем выбранные узлы в группу STRIP
TYPE,3	!Указываем тип элемента 3
MAT,2	!Устанавливаем атрибут материала 2
ESURF	!Генерируем контактные элементы на выбранных узлах
ASEL,S,AREA,,7	!Выделяем новое множество областей - область 7
ASEL,A,AREA,,38	!Добавляем к этому множеству область 38
NSLA,,1	!Выбираем узлы, принадлежащие выбранным поверхностям
TSHAP,CIRC	!Задаем круговую форму для ответных элементов
CM,PUNCH,NODE	!Объединяем выбранные узлы в группу PUNCH
TYPE,2	!Указываем тип элемента 2
MAT,1	!Устанавливаем атрибут материала 1
ESURF	!Генерируем ответные элементы на выбранных узлах
NSEL,ALL	!Возврат к выбору всех узлов
ASEL,ALL	!Возврат к выбору всех областей
 SAVE	
FINISH	

Далее задаем условия закрепления и условия симметрии модели. Для этого выделяем линию для жесткого закрепления с помощью команды **LSEL**, а затем узлы, принадлежавшие этой линии (команда **NSLL**). С помощью команды **D** задаем для всех выбранных узлов перемещения **UX**, **UY**, **UZ** равные нулю. По окончании этих процедур нужно не забыть вернуться к выбору всех узлов и линий модели по командам **NSEL,ALL** и **LSEL,ALL**. Условия симметрии на нужных по-

верхностями задаем с помощью команды **DA**, а сосредоточенную силу в заданной точке – с помощью команды **FK**. Рисунок 6 иллюстрирует жесткое закрепление по прямой, проходящей через центр нижнего ролика вдоль оси **OX**, симметрию по областям, находящимся в плоскостях **OXY** и **OYZ**, и в центре верхнего ролика показана сосредоточенная сила в направлении оси **OY** со значением $PY/4$ (здесь задается четвертая часть силы PY , поскольку в силу симметрии задачи рассматривается четвертая часть модели). Все эти действия выполним в решателе **/SOLU**.

По одной команде **SOLVE** происходит формирование элементных матриц, формирование СЛАУ МКЭ и решение СЛАУ.

Команды решателя в итоге выглядят следующим образом:

/SOLU

!Жесткое закрепление нижнего ролика

LSEL,S,LINE,,13	!Выделяем новое множество линий - линия 13
NSLL,,1	!Выбираем узлы, принадлежащие выбранной линии
D,ALL,UX,0	!Задаем для всех выбранных узлов перемещения $UX=0$
D,ALL,UY,0	!Задаем для всех выбранных узлов перемещения $UY=0$
D,ALL,UZ,0	!Задаем для всех выбранных узлов перемещения $UZ=0$
NSEL,ALL	!Возврат к выбору всех узлов
LSEL,ALL	!Возврат к выбору всех линий

!Условия симметрии на роликах

DA,3,SYMM	!Условие симметрии на области 3
DA,8,SYMM	!Условие симметрии на области 8
DA,19,SYMM	!Условие симметрии на области 19
DA,22,SYMM	!Условие симметрии на области 22
DA,31,SYMM	!Условие симметрии на области 31
DA,32,SYMM	!Условие симметрии на области 32

DA,33,SYMM !Условие симметрии на области 33
DA,35,SYMM !Условие симметрии на области 35
DA,36,SYMM !Условие симметрии на области 36
DA,37,SYMM !Условие симметрии на области 37
DA,39,SYMM !Условие симметрии на области 39
DA,41,SYMM !Условие симметрии на области 41

!Приложение сосредоточенной силы

FK,8,FY,-PY/4 !Прикладываем сосредоточенную силу $FY=-PY/4$ в точке 8

SOLVE !Решить систему МКЭ

SAVE

FINISH

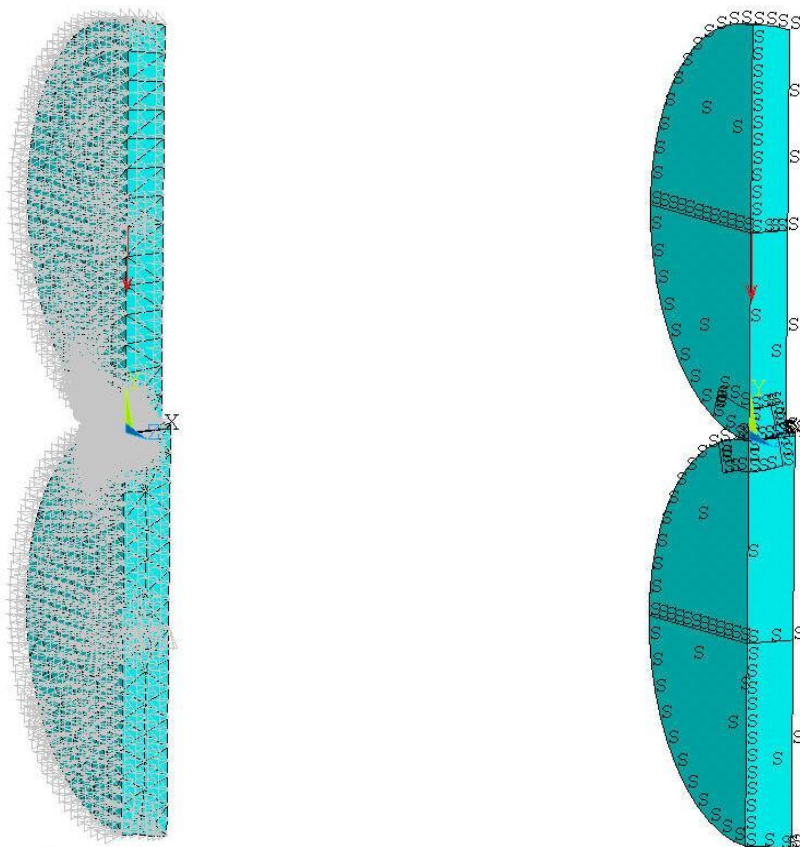


Рисунок 6 – Иллюстрация граничных условий и симметрии

Результаты можно посмотреть в постпроцессоре POST1:

/POST1

/DSCALE,ALL,OFF !Отключаем установку множителя для изображения смещений

/PLOPTS,INFO,1 !Поместим шкалу результатов справа

PLNSOL,U,Y !Выводим перемещения по оси Y

! Используется задержка для просмотра предыдущей картинки

***ASK,TMP,ANY NUMBER OR PRESS "ENTER"**

PLNSOL,S,Y !Выводим напряжения по оси Y

ESEL,S,MAT,,2 !Выделяем элементы с атрибутом MAT=2

NSLE,,1 !Выделяем узлы, принадлежащие выбранным элементам

!Выделяем узел, лежащий в точке с координатами (0,0,0)

NSEL,S,LOC,X,0

NSEL,R,LOC,Y,0

NSEL,R,LOC,Z,0

!Узел с минимальным номером определяем как N_CONT2

***GET,N_CONT2,NODE,,NUM,MIN**

NSEL,ALL !Возврат к выбору всех узлов

ESEL,ALL !Возврат к выбору всех элементов

DELTA2=UY(N_CONT2) !Перемещение UY в узле N_CONT2 определяем как DELTA2

ESEL,S,MAT,,1 !Выделяем элементы с атрибутом MAT=1

NSLE,,1 !Выделяем узлы, принадлежащие выбранным элементам

!Выделяем узел, лежащий в точке с координатами (0,0,0)

NSEL,S,LOC,X,0

NSEL,R,LOC,Y,0

NSEL,R,LOC,Z,0

!Узел с минимальным номером определяем как N_CONT1

***GET,N_CONT1,NODE,,NUM,MIN**

NSEL,ALL **!Возврат к выбору всех узлов**

ESEL,ALL **!Возврат к выбору всех элементов**

DELTA1=UY(N_CONT1) **!Перемещение UY в узле N_CONT1 определяем как DELTA1**

!Напряжение SY в узле N_CONT1 определяем как SYE_CONT1

***GET,SYE_CONT1,NODE,N_CONT1,S,Y**

!Напряжение SY в узле N_CONT2 определяем как SYE_CONT2

***GET,SYE_CONT2,NODE,N_CONT2,S,Y**

Здесь вывод распределений полей перемещений U_y и напряжений S_y осуществляем с помощью команды **PLNSOL** (рисунки 7-8).

Далее в постпроцессоре **POST1** выбираем элементы верхнего ролика с помощью команды **ESEL**, а затем узлы с помощью команды **NSLE**. Выбираем узел, лежащий в начале координат, с помощью команд **NSEL** и находим номер **N_CONT2** этого узла (команда ***GET**). Возвращаемся к выбору всех узлов и элементов командами **NSEL,ALL** и **ESEL,ALL**. Находим значение перемещения **UY** в узле **N_CONT2**. Аналогично действуем для нахождения перемещения **UY** в начале координат нижнего ролика (в узле **N_CONT1**). С помощью команды ***GET** вычисляем напряжения **SY** в узлах **N_CONT1** и **N_CONT2**. Значения перемещений и напряжений в точке контакта для верхнего и нижнего ролика совпадают, что является дополнительным контролем правильности проведенных расчетов.

Результаты вычислений значений перемещений u_y и напряжений σ_y в точке контакта оказались следующими: $u_y = -2,447 \cdot 10^{-6}$ (м), $\sigma_y = -1,214 \cdot 10^9$ (Н/м²).

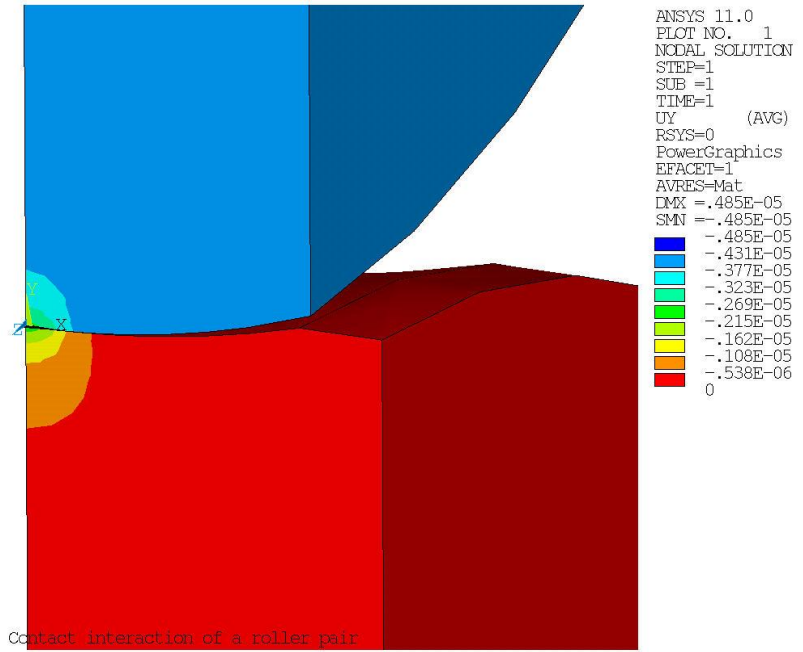
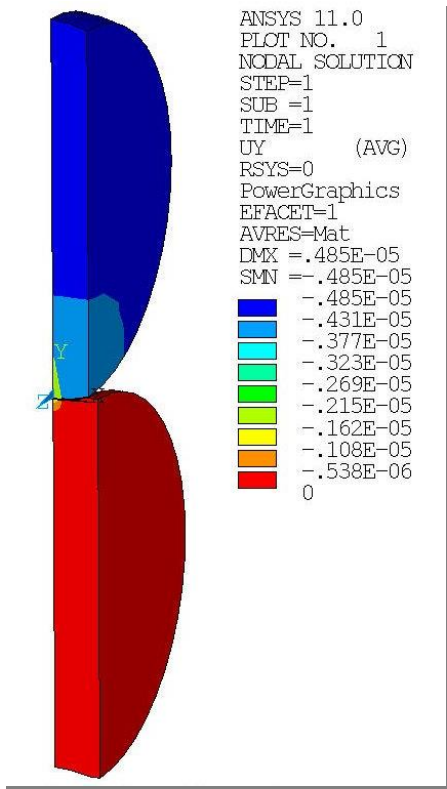


Рисунок 7 - Распределение полей перемещений U_y

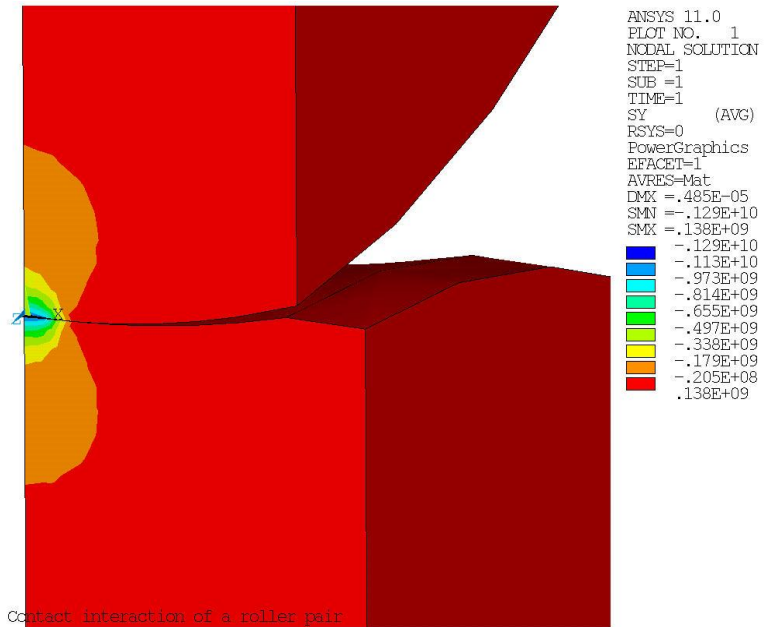
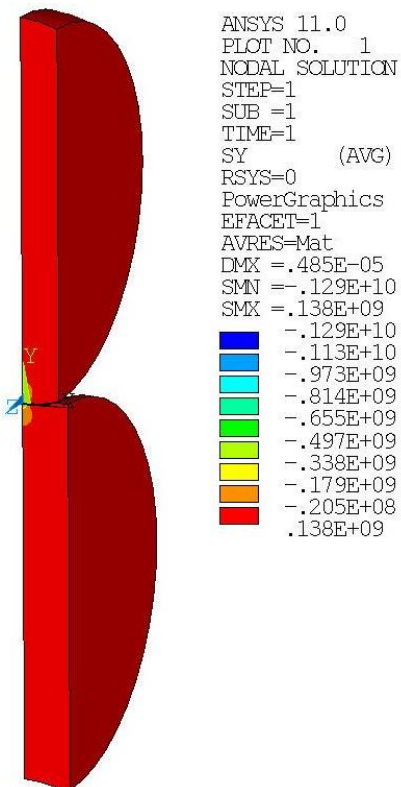


Рисунок 8 - Распределение полей напряжений S_y

3. Сравнение полученных значений напряжений со значениями, полученными по теории Герца

Максимальные контактные напряжения при сжатии упругих тел силой P , действующей вдоль общей нормали, согласно теории Герца [5] могут быть вычислены по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{n_{\sigma}}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{\Sigma k}{\eta} \right)^2 P} \quad (1)$$

где

$$\eta = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}, \quad \Sigma k = k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}, \quad n_{\sigma} = 1/(n_a n_b),$$

k_{11} и k_{12} – кривизны главных нормальных сечений тела I в точке контакта, k_{21} и k_{22} – кривизны главных нормальных сечений тела II в той же точке,

$$n_a = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{B}{A} \right) D(e)}, \quad n_b = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{A}{B} \right) (K(e) - D(e)) \sqrt{1 - e^2}},$$

$$D(e) = \frac{1}{e^2} [K(e) - E(e)],$$

$K(e)$ и $E(e)$ – полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода,

$$K(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

$$A = \frac{1}{4} \left| \Sigma k - \sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos \omega} \right|,$$

$$B = \frac{1}{4} \left[\Sigma k + \sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos \omega} \right],$$

e – эксцентриситет эллипса области контакта, который находится из уравнения,

ω – угол между плоскостями кривизны k_{11} и k_{22} ,

$$\frac{A}{B} = (1 - e^2) \frac{D(e)}{K(e) - D(e)}.$$

При этом большая и малая полуоси контурного эллипса области контакта определяются соответственно из соотношений

$$a = n_a \sqrt[3]{\frac{3 \eta P}{2 \Sigma k}}, \quad b = n_b \sqrt[3]{\frac{3 \eta P}{2 \Sigma k}}, \quad (2)$$

а сближение δ соприкасающихся тел примет вид

$$\delta = \frac{n_\delta}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \eta^2 \Sigma k P^2}. \quad (3)$$

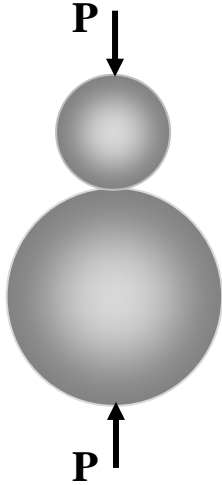
В том случае, если известно максимальное контактное напряжения, из (1) легко найти усилия P , сжимающие тела 1 и 2. В результате получим

$$P = \frac{2 \sigma_{\max}^3 \pi^3}{3 n_\sigma^3} \left(\frac{\eta}{\Sigma k} \right)^2. \quad (4)$$

Подставляя в формулу (1) величины входных параметров радиусов кривизны роликов, материальных постоянных и значение силы P , вычисляем максимальные контактные напряжения, которые оказываются равными $\sigma_y = 1,060 \cdot 10^9$ (Н/м²), что по абсолютной величине близко к полученному значению с помощью конечно-элементного пакета ANSYS.

4. Варианты заданий для самостоятельной работы

Пользуясь программой St3SCONT.INP и описанной в разделах 1–3 методологией, напишите собственную программу для расчета контактных напряжений и сравните их со значениями, полученными по формулам теории Герца для ниже следующих задач со значениями геометрических параметров и величин нагрузки из соответствующих таблиц 1–3, и упругих постоянных из таблицы 4.



1). Контакт двух упругих шаров радиусов R_1 (верхний) и R_2 (нижний). Шары сжимаются силами P , линия действия которых проходит через их центры и точку первоначального касания.

По теории Герца величина наибольшего контактного напряжения [4,5]:

$$\sigma_y = 0,57843 \sqrt{\frac{P}{\eta^2} \left(\frac{R_2 + R_1}{R_2 R_1} \right)^2}$$

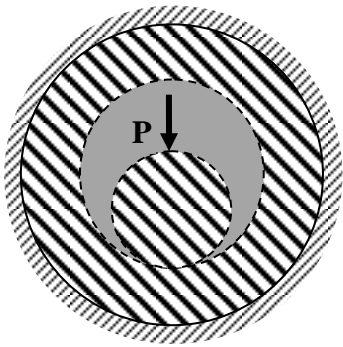
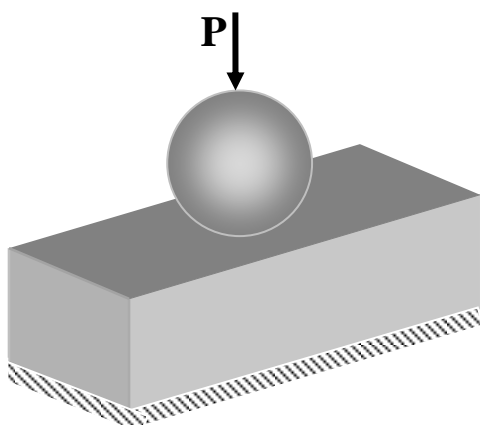


Схема задачи в сечении, которое проходит через центры шаров.

2). Контакт внутренней поверхности упругого сферического слоя радиуса R_2 и толщины h с упругим шаром радиуса R_1 . Упругий слой жестко закреплён по внешней поверхности, а на шар, находящийся внутри, действует сосредоточенная сила P , линия действия которой проходит через их центры и точку первоначального касания.

По теории Герца величина наибольшего контактного напряжения [4,5]:

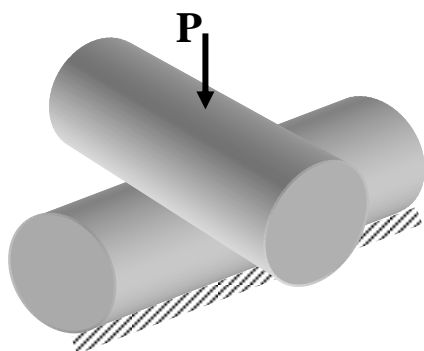
$$\sigma_y = 0,57843 \sqrt{\frac{P}{\eta^2} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} \right)^2}$$



3). Контакт упругого параллелепипеда с высотой, шириной и длиной соответственно w , h и l с упругим шаром радиуса R . Нижняя поверхность параллелепипеда жестко закреплена, а на шар действует сосредоточенная сила P , линия действия которой проходит через центр шара и точку первоначального касания.

По теории Герца величина наибольшего контактного напряжения [4,5]:

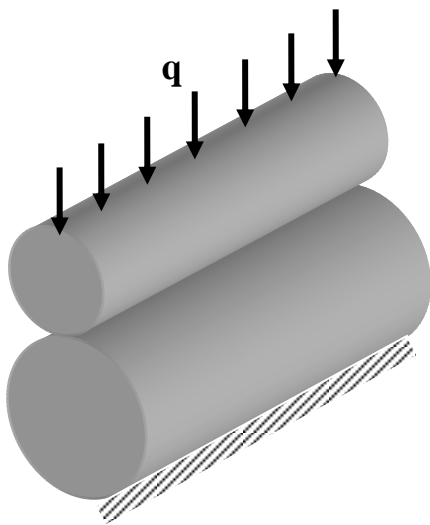
$$\sigma_y = 0,5784_3 \sqrt{\frac{P}{\eta^2 R^2}}$$



4). Контакт двух упругих цилиндров длины l со взаимно перпендикулярными осями и равными радиусами R . Нижний цилиндр жестко закреплён, как показано на рисунке, а на верхний цилиндр действует нагрузка P , направленная вертикально вниз и линия действия которой проходит через точку первоначального касания.

По теории Герца величина наибольшего контактного напряжения [4,5]:

$$\sigma_y = 0,5784_3 \sqrt{\frac{P}{\eta^2 R^2}}$$



5). Контакт двух упругих цилиндров длины l радиусов R_1 (внешний) и R_2 (внутренний) с параллельными осями. Нижний цилиндр жестко закреплен, как показано на рисунке, а на верхний цилиндр действует нагрузка на единицу длины цилиндра q .

По теории Герца величина наибольшего контактного напряжения [4,5]:

$$\sigma_y = 0,5642 \sqrt{\frac{q}{\eta} \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}}$$

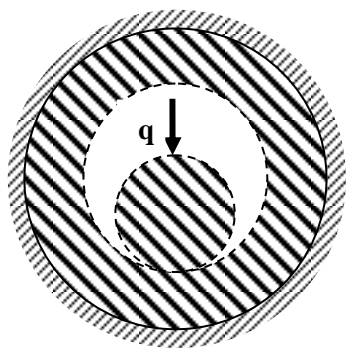
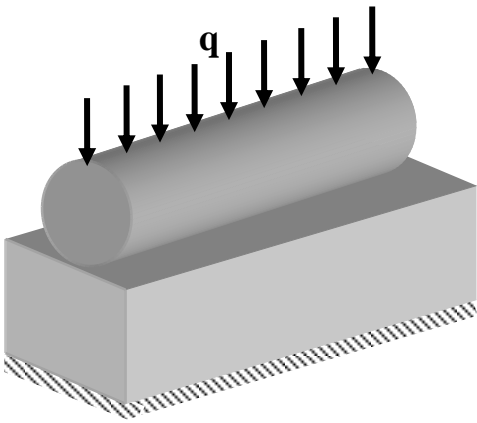


Схема задачи в сечении, которое проходит перпендикулярно осям цилиндров.

6). Контакт внутренней поверхности упругого цилиндрического слоя радиуса R_2 , толщины h , длины l с упругим цилиндром радиуса R_1 длины l с параллельными осями. Упругий слой жестко закреплён по внешней поверхности, а на цилиндр, находящийся внутри, действует нагрузка на единицу длины цилиндра q .

По теории Герца величина наибольшего контактного напряжения [4,5]:

$$\sigma_y = 0,5642 \sqrt{\frac{q}{\eta} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}$$



7) Контакт упругого параллелепипеда с высотой, шириной и длиной соответственно w , h и l с упругим цилиндром радиуса R . Нижняя поверхность параллелепипеда жестко закреплена, а на цилиндр действует нагрузка на единицу длины цилиндра q .

По теории Герца величина наибольшего контактного напряжения [4,5]:

$$\sigma_y = 0,5642 \sqrt{\frac{q}{\eta R}}$$

Во всех заданиях обозначено: $\eta = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$, где ν_1, E_1 и ν_2, E_2 – упругие постоянные материалов тел.

Замечание. Результаты конечно-элементных расчетов будут сравнимы с результатами, полученными по теории Герца, в том случае, когда размеры площадки контакта значительно меньше линейных размеров контактирующих тел.

Таблица 1 Значения геометрических параметров и величин нагрузки

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9
№ задачи	1	1	1	2	2	2	3	3	3
R₁ (R) (м)·10⁻²	1	1	2	1	1	2	1	2	3
R₂ (м)·10⁻²	2	3	3	2	3	3	-	-	-
h (м)·10⁻²	-	-	-	0.5	1	0.5	2	6	9
w (м)·10⁻²	-	-	-	-	-	-	1	4	3
l (м)·10⁻²	-	-	-	-	-	-	3	7	10
P (H)	225	300	350	225	300	350	225	300	400

Таблица 2 Значения геометрических параметров и величин нагрузки

№ задания	10	11	12	13	14	15	16	17	18
№ задачи	4	4	4	5	5	5	6	6	6
R₁ (R) (м)·10⁻²	1	2	3	1	1	2	1	1	2
R₂ (м)·10⁻²	-	-	-	2	3	3	2	3	3
h (м)·10⁻²	-	-	-	-	-	-	0.5	1	0.5
l (м)·10⁻²	7	10	14	7	10	15	7	10	15
P (H)	225	300	380	-	-	-	-	-	-
q (H/м)	-	-	-	32	30	25	32	30	32

Таблица 3 Значения геометрических параметров и величин нагрузки

№ задания		19	20	21
№ задачи		7	7	7
	R (м)·10⁻²	1	2	3
	h (м)·10⁻²	2	6	9
	w (м)·10⁻²	1	5	3
	l (м)·10⁻²	3	7	10
	q (Н/м)	75	45	40

Таблица 4 Упругие постоянные

Для всех заданий	
ν_1	0.3
E_1 (Па)	$2 \cdot 10^{11}$
ν_2	0.35
E_2 (Па)	$2.2 \cdot 10^{11}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера. М.: УРСС, 2004. 272 с.
2. Морозов Е.М., Муйземнек А.Ю., Шадский А.С. ANSYS в руках инженера: Механика разрушения. М.: ЛЕНАНД, 2008. 456 с.
3. Наседкин А.В., Колосова Е.М. Решение контактных задач для элементов стенда, имитирующего трибосистему «колесо-рельс» // Сб. Тр. Межд. научно-техн. конф. «Актуальные проблемы трибологии», 6-8 июня 2007, г. Самара, Россия. Т.3. М.: изд-во «Машиностроение». С. 696-697.
4. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наук. думка. 1988. 736 с.
5. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 2. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 464 с.
6. ANSYS. APDL Programmer's Guide. Rel. 11. / ANSYS Inc. Houston, 2007.
7. ANSYS. Basic Analysis Procedures Guide. Rel. 11. / ANSYS Inc. Houston, 2007.
8. ANSYS. Commands Reference. Rel. 11. / ANSYS Inc. Houston, 2007.
9. ANSYS. Contact Technology Guide. Rel. 11. / ANSYS Inc. Houston, 2007.
10. ANSYS. Elements Reference. Rel. 11. / ANSYS Inc. Houston, 2007.
11. ANSYS. Modeling and Meshing Guide. Rel. 11. / ANSYS Inc. Houston, 2007.
12. ANSYS. Verification Manual. Rel. 11. / ANSYS Inc. Houston, 2007.
13. Madenci E., Guven I. The finite element method and applications in engineering using ANSYS. Springer, 2006.