Векторные алгоритмы

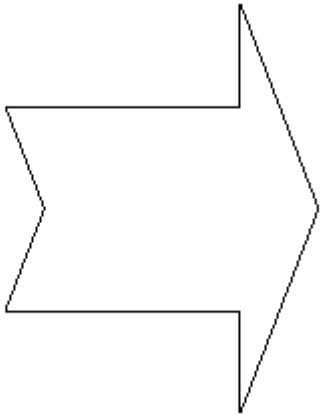
План

- **Виды полигонов**
- Выпуклые оболочки
- Триангуляция
- Пересечение/объединение

Термины

- Полигон
- Рёбра и вершины

- Полигон называется *простым*, если он не пересекает самого себя.

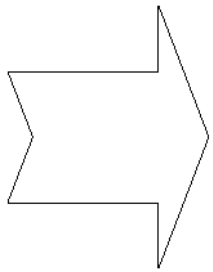


- Внутренняя часть полигона
- Внешняя часть полигона
- Граница полигона

- Будем использовать термин *полигон* в смысле *простого заполненного полигона*, т.е. объединения границы и внутренней части простого полигона.

Вершины

- Вершины упорядочены циклически вдоль границы полигона.
- Две вершины, являющиеся концевыми точками одного и того же ребра, являются *соседями* или *смежными* вершинами.
- Вершина, соседняя при обходе по часовой стрелке, называется *последователем*, а соседняя при обходе против часовой стрелки – ее *предшественником*.
- Вершина называется *выпуклой*, если внутренний угол при вершине (находящийся в пределах внутренней области) меньше или равен 180 градусов.
- В противном случае вершина считается *вогнутой* (внутренний угол больше 180 градусов).



Полигоны

- Точку или отрезок прямой линии иногда удобно рассматривать как вырожденный полигон.
- 1-гон состоит из единственной вершины и имеет единственное ребро нулевой длины, соединяющей вершину саму с собой.
- 2-гон содержит две вершины и два совпадающих ребра, соединяющих две вершины.

Полигонизация

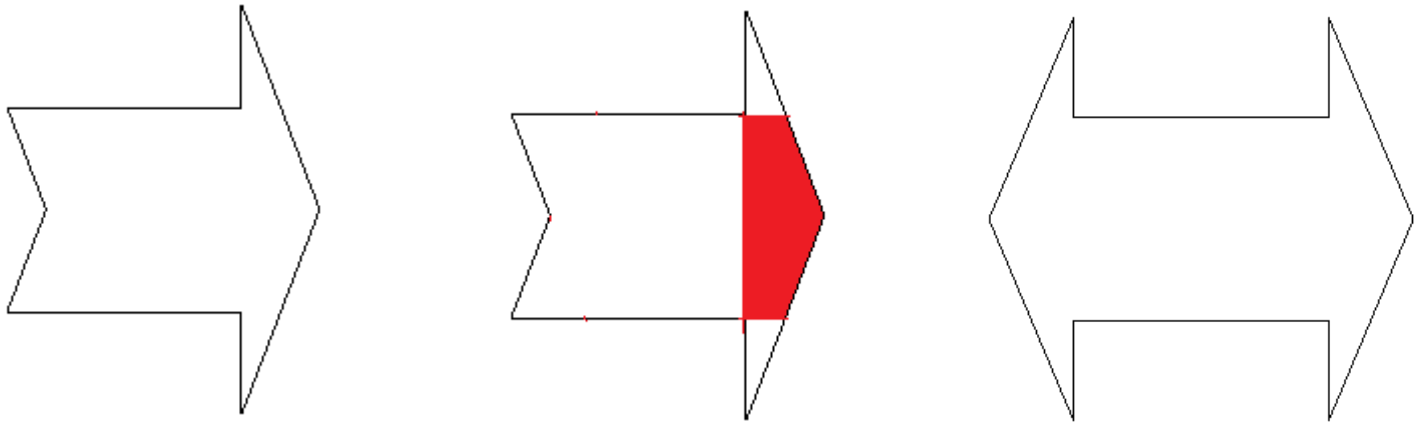
- Конечный набор точек на плоскости может быть различным образом соединён рёбрами для образования полигона.

- Формирование каждого такого полигона можно назвать *полигонизацией* набора точек.

Виды полигонов

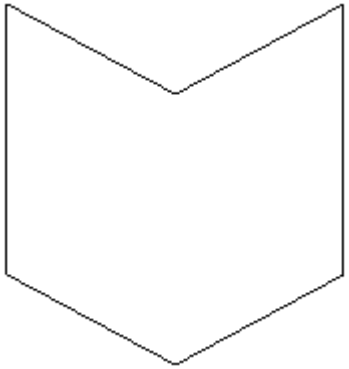
- *Ядро* полигона – множество точек, из которых видны все вершины полигона. Эта точка принадлежит либо полигону, либо его границе. «Видно» точку - это значит, что из нее можно провести хорду во все вершины полигона.

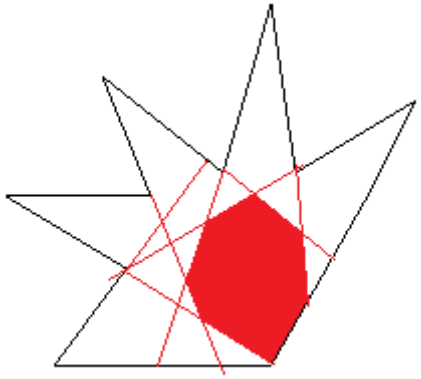
- *Звездчатый* полигон – полигон, у которого ядро не пусто.



Виды полигонов

- *Веерообразный* полигон – это полигон, у которого хотя бы одна вершина принадлежит его ядру. Каждая такая вершина называется *корнем* полигона.
- Любой выпуклый полигон является веерообразным, так как его ядро включает все вершины.
- Любой веерообразный полигон является звёздчатым, так как его ядро непустое.





Виды полигонов

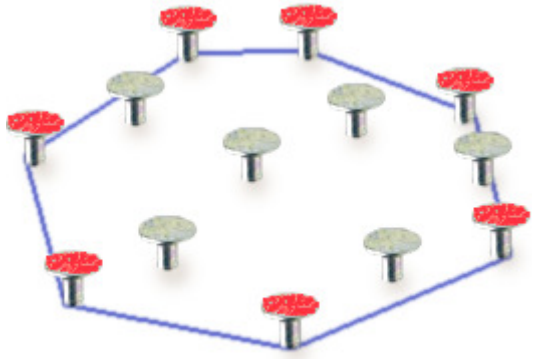
Выпуклый → Веерообразный → Звёздчатый

План

- Виды полигонов
- **Выпуклые оболочки**
- Триангуляция
- Пересечение/объединение

Выпуклые оболочки

- Пусть *S* будет конечным набором точек на плоскости.
- Выпуклая оболочка набора *S*, обозначаемая как *CH(S)*, равна пересечению всех выпуклых полигонов, которые содержат *S*.
- Иными словами, *CH(S)* – это выпуклый полигон минимальной площади, содержащий все точки *S*.
- Существует еще одно определение, которое утверждает, что *CH(S)* равно объединению всех треугольников, определяемых точками набора *S*.

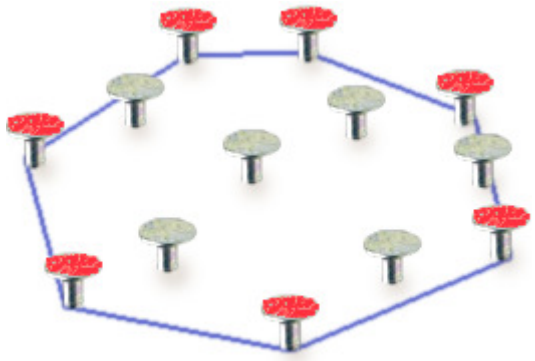


Алгоритмы построения выпуклых оболочек

- Джарвиса (Jarvis march) – заворачивания подарка (Gift wrapping algorithm)
- Грэхема (Graham scan)
- Эндрю (Andrew)
- Чана (Chan's algorithm)
- QuickHull
- Добавление точек пошагово

Алгоритм Джарвиса (заворачивания подарка)
R. A. Jarvis,1973

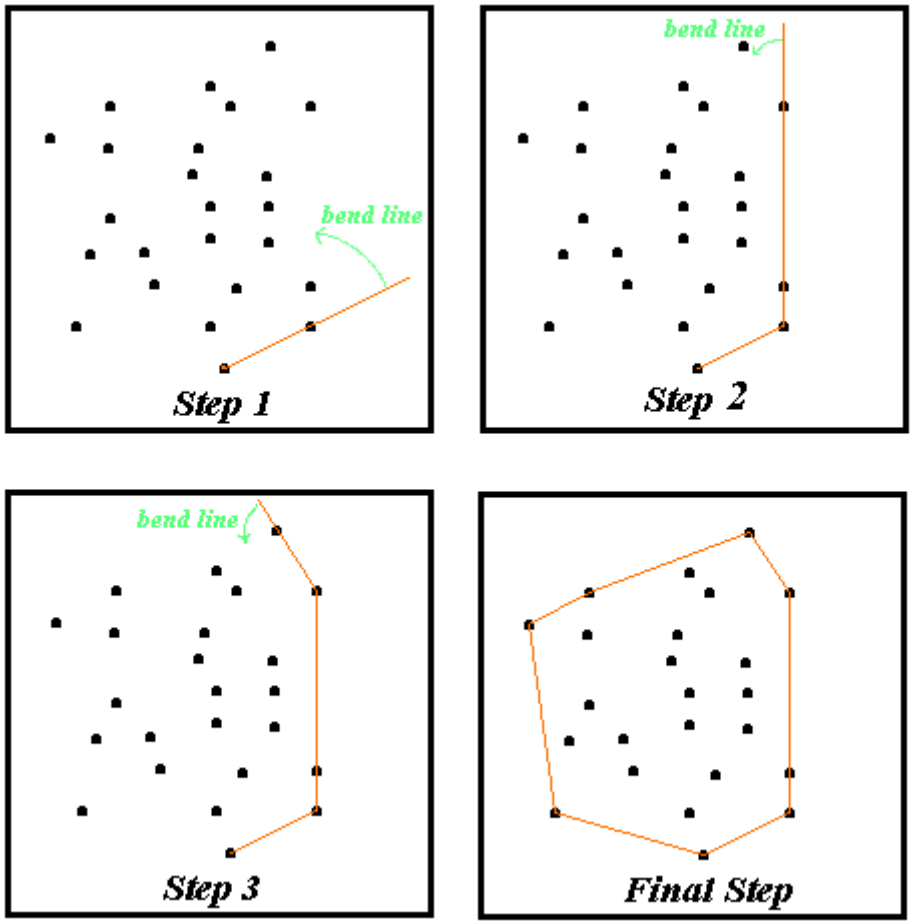
- можно представить как обтягивание верёвкой множества вбитых в доску гвоздей



Алгоритм Джарвиса (заворачивания подарка)

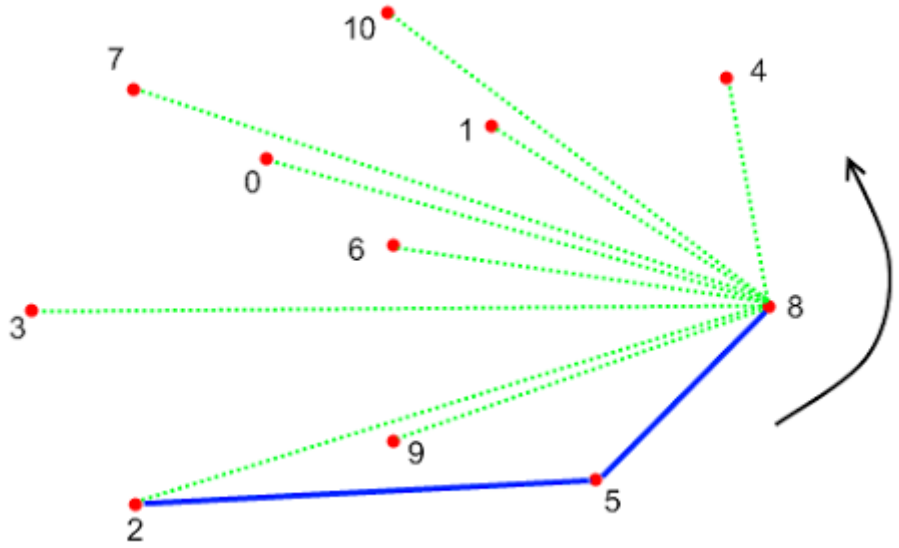
- Вначале выбирается некоторая точка S_0 такая, что она явно должна принадлежать границе выпуклой оболочки.
  - Для этого годится самая левая точка. Если их несколько, то самая нижняя точка из них.
  - Можно самая правая.
  - Можно самая нижняя или самая верхняя)))

Алгоритм Джарвиса (заворачивания подарка)



Алгоритм Джарвиса (заворачивания подарка)

- на каждом следующем шаге для последней добавленной точки ищем среди всех недобавленных точку с максимальным углом (минимальным косинусом → скалярным произведением)
- или самую правую (левую) точку



Сложность алгоритм Джарвиса (заворачивания подарка)

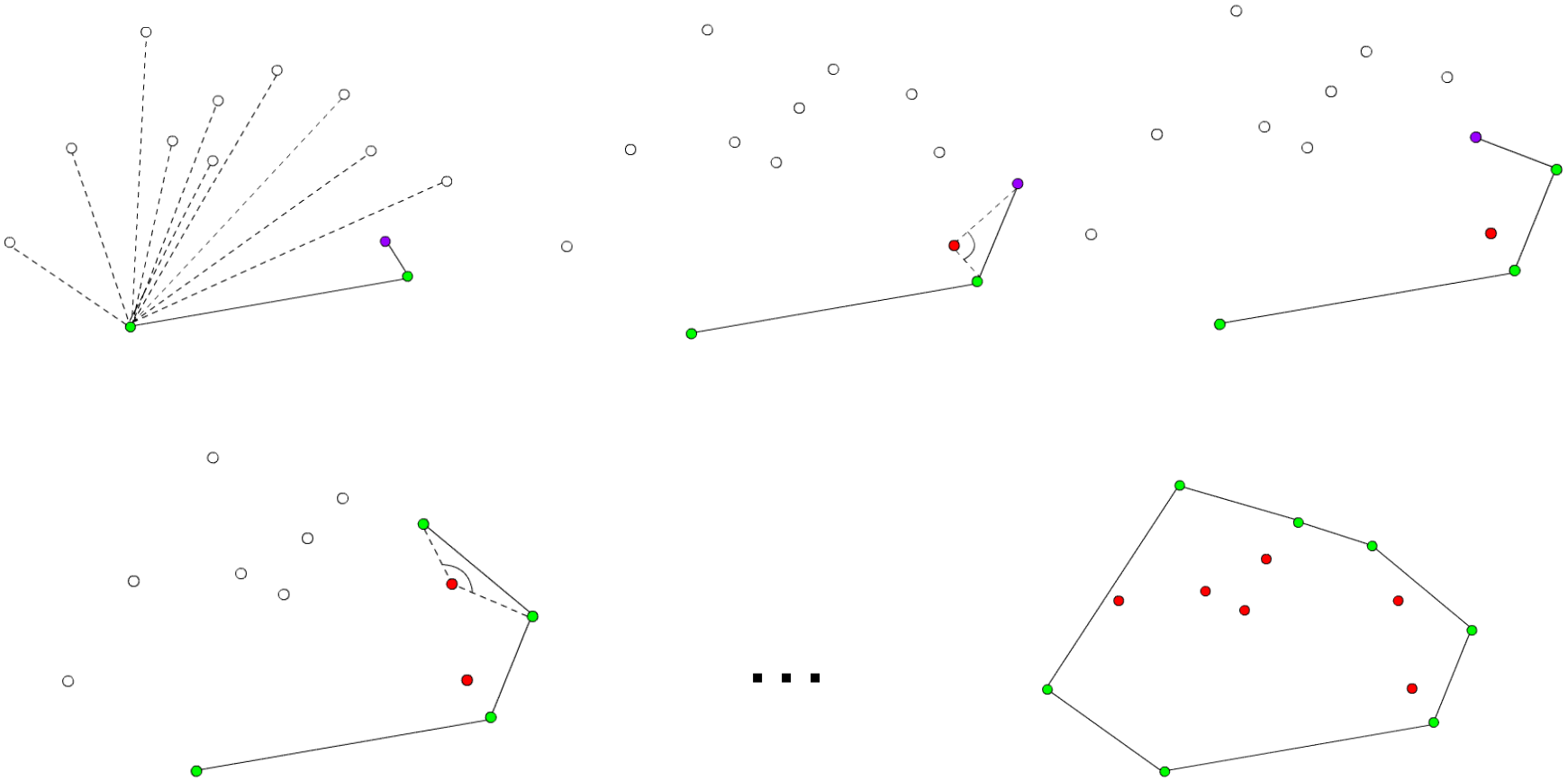
- O(hn), где n - количество всех вершин и h - количество вершин попавших в выпуклую оболочку.

Алгоритмы построения выпуклых оболочек

- Джарвиса (Jarvis march) – заворачивания подарка (Gift wrapping algorithm)
- Грэхема (Graham scan)
- Эндрю (Andrew)
- Чана (Chan's algorithm)
- QuickHull
- Добавление точек пошагово

Алгоритм Грэхема

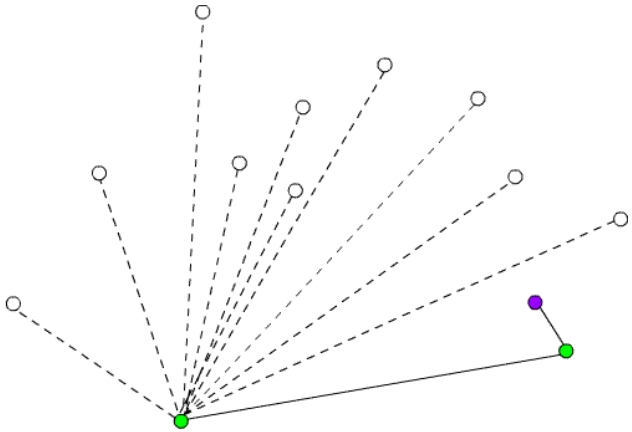
Ronald Graham, 1972



Алгоритм Грэхема. Упорядочивание точек

• Выбирается экстремальная точка S_0 (самая нижняя точка)

• Затем остальные точки сортируются в порядке увеличения полярного угла относительно точки S_0. Если полярные углы точек равны, то точка меньше, если ее радиус (расстояние до точки S_0) меньше.



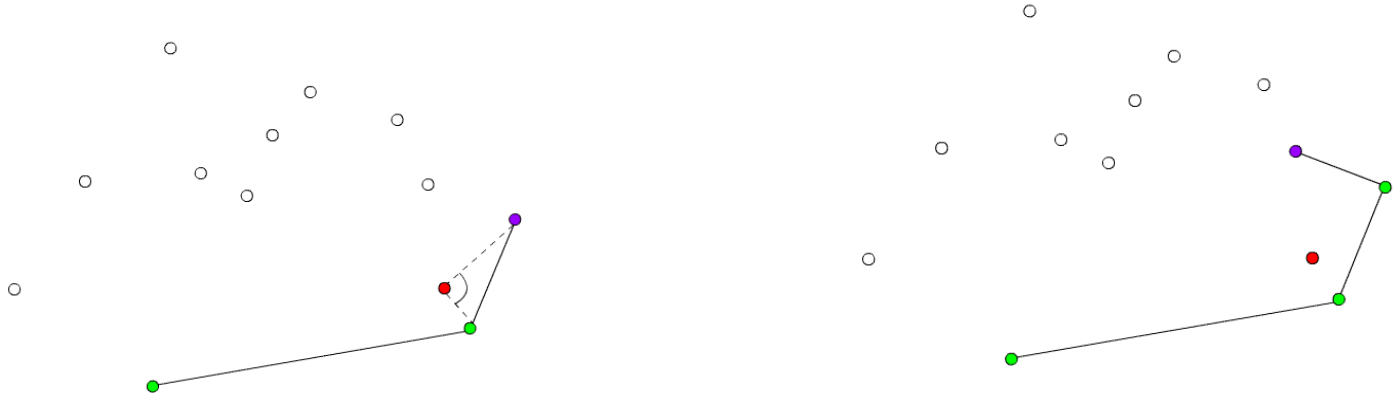
Алгоритм Грэхема. Обработка текущей точки

Обозначим:

S_i – последняя занесенная точка;

S_{i+1} – рассматриваемая текущая точка.

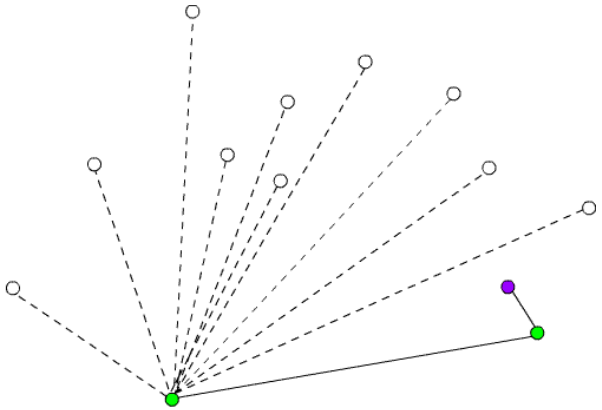
Рассмотрим S_{i+1}: если она находится не слева от луча $S_{i-1}S_i$, то удаляем из списка S_i - тую точку.

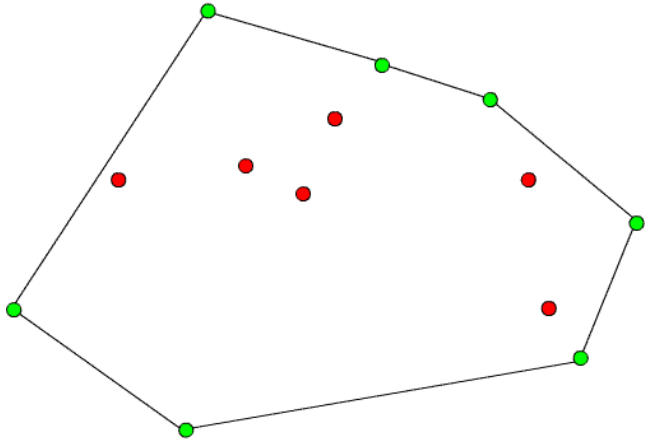


Алгоритм Грэхема. Обработка текущей точки

Далее опять проверяем, находится слева или не слева точка S_{i+1}, но только уже относительно луча $S_{i-2}S_{i-1}$.
Повторяем проверки и исключения из списка до тех пор, пока:
1) либо точка S_{i+1} не станет слева от рассматриваемого луча;
2) либо не останется в списке только одна точка, не считая S_{i+1}.
Затем добавляем точку *Si+1* в конец списка.

Алгоритм Грэхема. Время работы





Общая асимптотика O(n lg n), где n – количество точек.

Добавление/удаление потребует время O(n).

Сортировка полярных углов займет O(n lg n) времени.

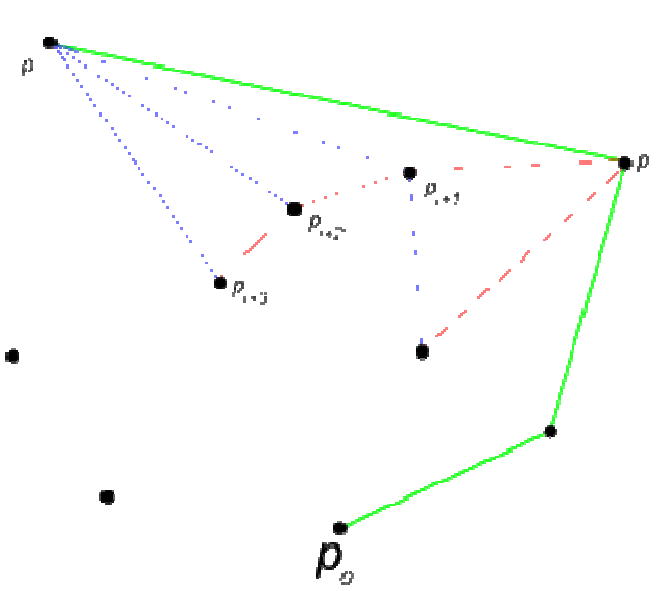
Алгоритмы построения выпуклых оболочек

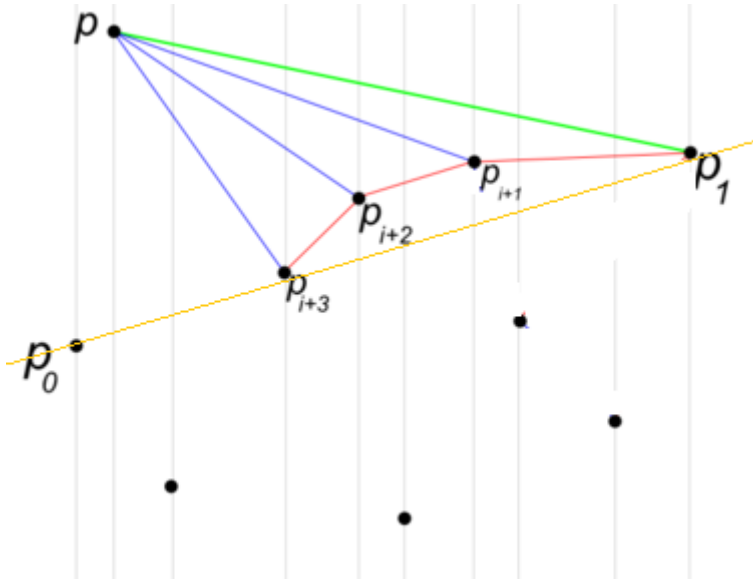
- Джарвиса (Jarvis march) – заворачивания подарка (Gift wrapping algorithm)
- Грэхема (Graham scan)
- Эндрю (Andrew)
- Чана (Chan's algorithm)
- QuickHull

- Добавление точек пошагово

Алгоритм Эндрю (Andrew) (1979 г)

- Находим самую левую и самую правую точки множества.
- Делим множество на две части: точки над и под прямой.
- Для каждой половины ищем выпуклую оболочку Грехемом с условием, что сортируем не по полярному углу, а по координате.
- Сливаем получившиеся оболочки.





Алгоритмы построения выпуклых оболочек

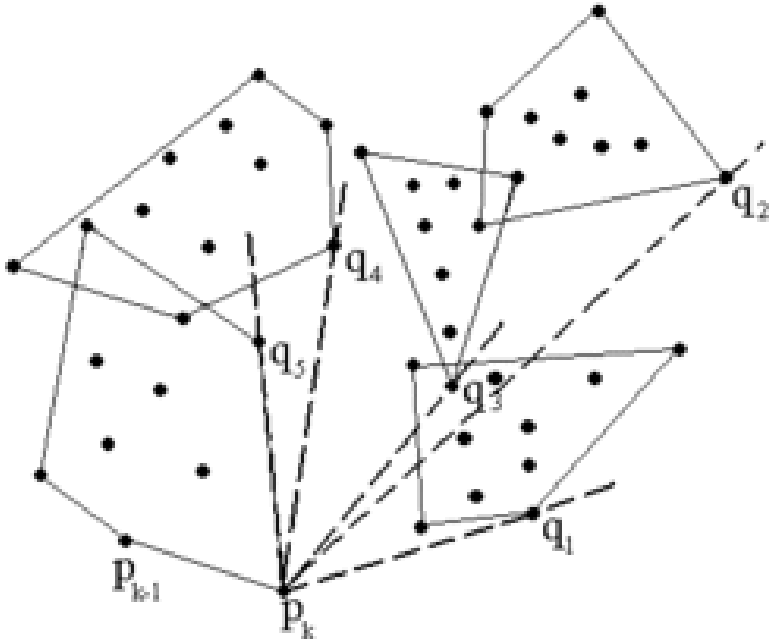
- Джарвиса (Jarvis march) – заворачивания подарка (Gift wrapping algorithm)
- Грэхема (Graham scan)
- Эндрю (Andrew)
- Чана (Chan's algorithm)
- QuickHull
- Добавление точек пошагово

Алгоритм Чана (Chan's algorithm)
Тимоти М. Чан, 1996

Является комбинацией двух более медленных алгоритмов (Грэхем и Джарвис).

Грэхем – O (n•log n)

Джарвис – O(hn) → O(n^2), .



- Разобьем всё множество на произвольные группы по m штук в каждой.
- Для каждой группы запускаем Грехема.
- Начиная с самой нижней точки ищем саму выпуклую оболочку Джарвисом, но перебираем не все точки, а по одной из каждой группы.

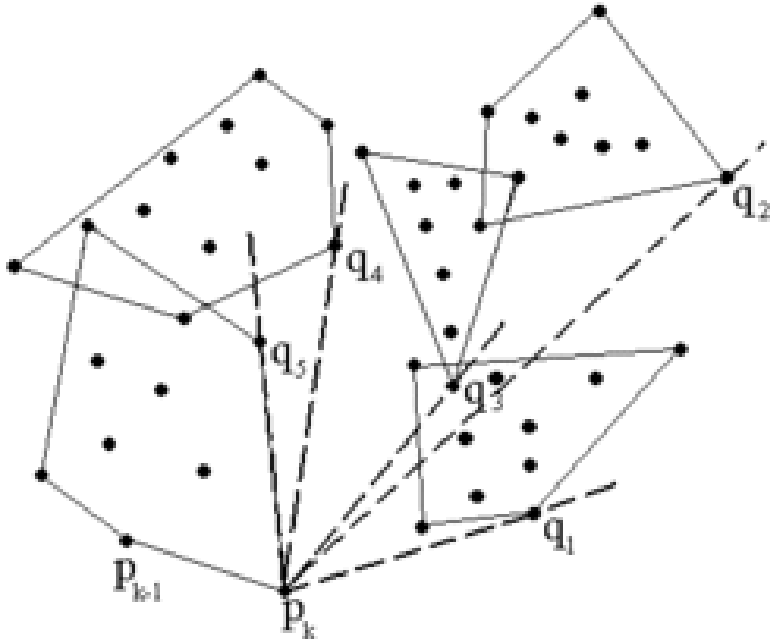
Алгоритм Чана (Chan's algorithm)
Тимоти М. Чан, 1996

Является комбинацией двух более медленных алгоритмов (Грэхем и Джарвис).

Количество групп $r = \lceil n/m \rceil$

Грэхем для группы O(m•log m)

Грэхем для всех групп O(r m•log m) = O(n•log m)



Джарвис O(h•r•log m) = O(h•n/m •log m)

Чан O((n+h•n/m) •log m)

Если m≥h, то Чан O(n•log m)

Выбор разбиения

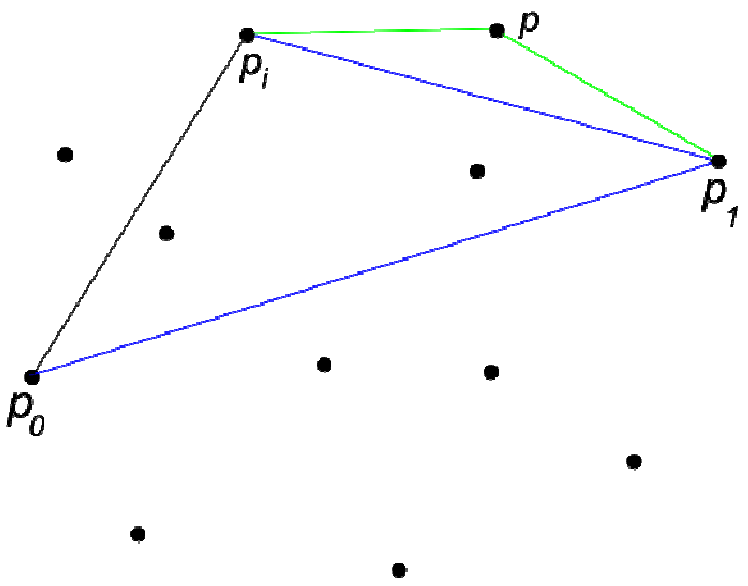
```
ChanHull(P)
 for t = 1 to n do:
      (a) взять m = min(2^(2^t), n);
      (b) L = Hull(P, m);
      (c) if L != «m маленькое, попробуйте еще» return L;
```

Алгоритмы построения выпуклых оболочек

- Джарвиса (Jarvis march) – заворачивания подарка (Gift wrapping algorithm)
- Грэхема (Graham scan)
- Эндрю (Andrew)
- Чана (Chan's algorithm)
- QuickHull
- Добавление точек пошагово

Алгоритм QuickHull

- Найдем самую левую и самую правую точки.
- Возьмем все точки выше прямой, их соединяющей.
- Найдем точку, наиболее отдаленную от прямой (если таких несколько, взять самую правую).
- Рекурсивно повторить шаги 2-3 пока есть точки.
- Добавить в ответ все точки.
- Повторить пункты 2-5 для для "нижней" половины.



Алгоритм QuickHull. Сложность

- Лучший случай, все точки внутри оболочки: O(n)
- Худший случай, все точки на оболочке: O(n2)
- Среднее время: O(n log n)
- На случайном наборе точек этот алгоритм работает быстрее всех.

Алгоритм QuickHull. Обобщение

- Алгоритм QuickHull может быть естественным образом обобщен на случай произвольной размерности.
- Трехмерный случай http://algolist.manual.ru/maths/geom/convhull/qhull3d.php
- Общий случай произвольной размерности в оригинальной работе Барбера http://algolist.manual.ru/maths/geom/convhull/qhull_96.zip

Алгоритмы построения выпуклых оболочек

- Джарвиса (Jarvis march) – заворачивания подарка (Gift wrapping algorithm)
- Грэхема (Graham scan)
- Эндрю (Andrew)
- Чана (Chan's algorithm)
- QuickHull
- Добавление точек пошагово (Выпуклая оболочка онлайн)

Добавление точек пошагово Выпуклая оболочка онлайн

- Алгоритмы выше принимают на вход все множество точек сразу.
- А если точки подаются одна за другой, а задача состоит в том, чтобы поддерживать выпуклую оболочку имеющихся точек?

Добавление точек пошагово
Выпуклая оболочка онлайн

- Самый простой выход – после каждой добавленной точки вызывать какой-нибудь из описанных выше алгоритмов.

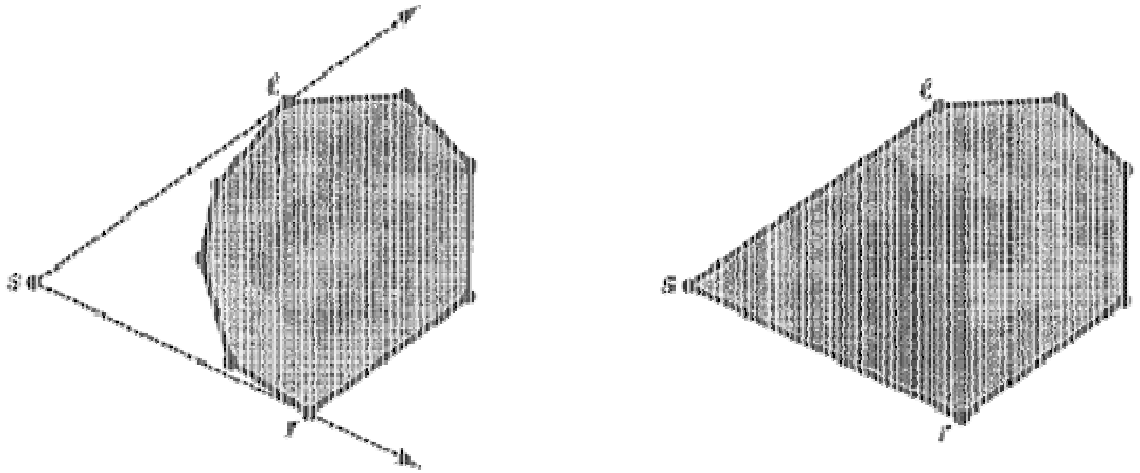
- Он построит выпуклую оболочку за O(n log n) операций. Это приведет к сложности $O(n^2 \log n)$.

- Если хочется сделать побыстрее и поизящнее, то можно применить специальный алгоритм, работающий за $O(n^2)$.

Добавление точек пошагово
Выпуклая оболочка онлайн

Вначале текущая оболочка состоит из одной точки, принадлежащей *S*.

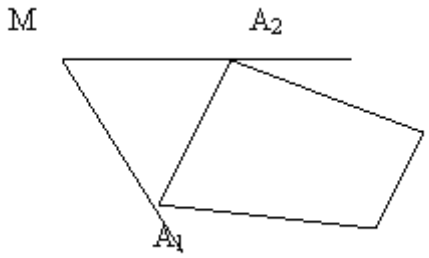
По завершении ввода всех точек текущая оболочка становится эквивалентной выпуклой оболочке *CH(S)* и задача оказывается решенной.



Ласло "Вычислительная геометрия и компьютерная графика на C++"

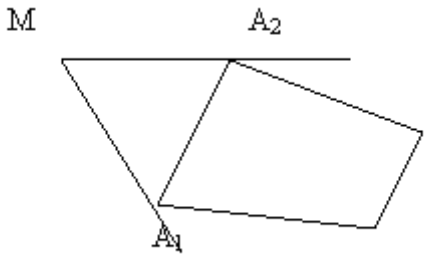
Добавление точек пошагово

- Пусть три точки уже есть. Строим треугольник. Далее в цикле добавляем новые точки. При вводе каждой новой точки *M* в текущую оболочку могут возникнуть две ситуации.
- В первом случае точка *M* может принадлежать текущей оболочке (находится на ее границе или внутри) и тогда текущую оболочку изменять не требуется.
- Во втором случае, если точка снаружи, то необходимо модифицировать текущую оболочку.



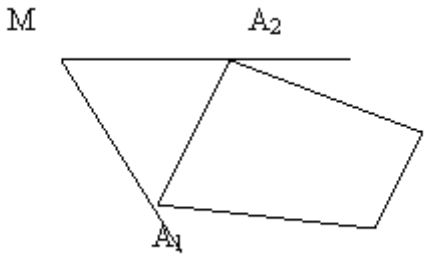
Добавление точек пошагово. Поиск касательных

- Ищем левую и правую касательные из исходной точки к данному полигону.
- Левая касательная – это луч через такую точку, для которой все существующие точки полигона находятся справа от этого луча.
- Соответственно, правая касательная – это луч через такую точку, для которой все существующие точки полигона находятся слева от этого луча.



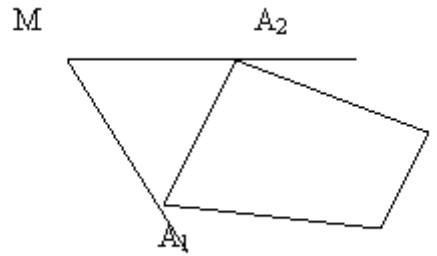
Добавление точек пошагово. Поиск касательных

- Ищем левую и правую касательные из исходной точки к данному полигону.
- Левая касательная – это луч через такую точку, для которой все существующие точки полигона находятся справа от этого луча.
- Соответственно, правая касательная – это луч через такую точку, для которой все существующие точки полигона находятся слева от этого луча.



Добавление точек пошагово. Ближняя и дальняя цепочки

- Ближняя цепочка расположена ближе к точке M, дальняя цепочка находится дальше от точки M.
- Иизъять всю ближнюю цепочку от правой до левой касательной (за исключением вершин A2 и A1).
- Добавить в список между A1 и A2 точку M.
- Если все точки лежат на одной прямой (т.е. касательных нет), M просто добавляется в список, а A1 удаляется.



План

- Виды полигонов
- Выпуклые оболочки
- **Триангуляция**
- Пересечение/объединение

Разбиение (триангуляция) полигонов

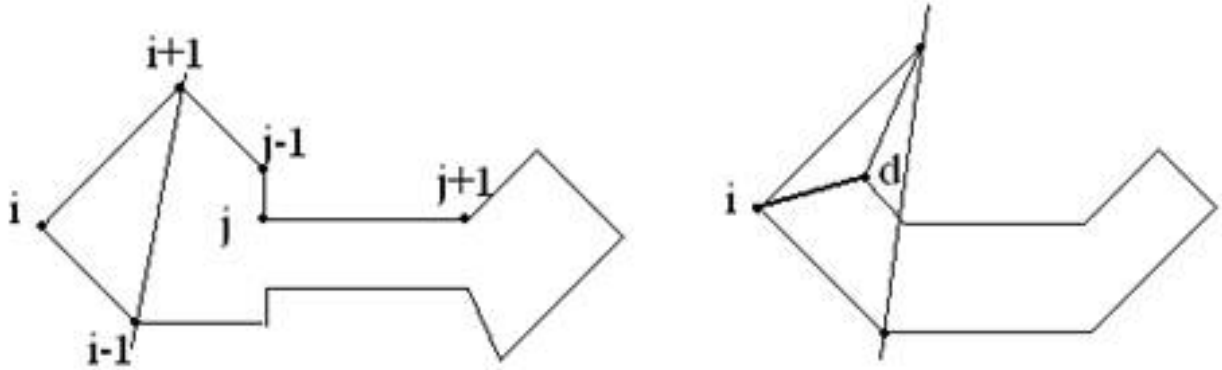
- *Триангуляцией* полигона называется декомпозиция полигона в набор треугольников.

Триангуляция

- Триангуляция полигона методом вторгающейся вершины
- Триангуляция монотонного полигона
- Триангуляция Делоне для конечного набора точек

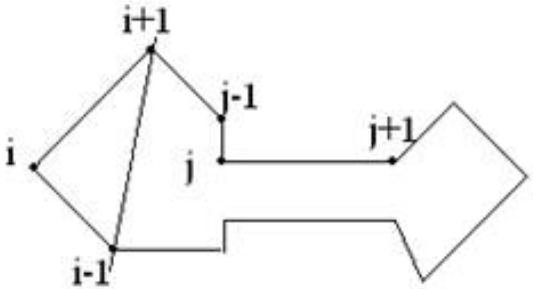
Триангуляция полигона методом вторгающейся вершины

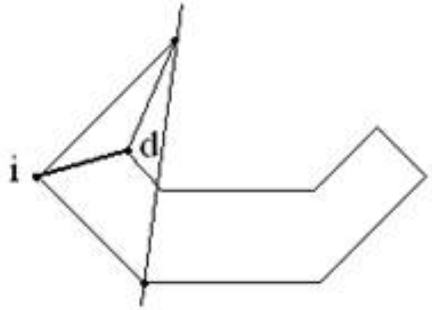
•Берем любую вершину и ищем ближайшую к ней выпуклую вершину.
•Если (i+1) точка лежит справа от ребра (i-1,i), то точка выпуклая, иначе вогнутая.
• Ищем вторгающиеся вершины в треугольнике i-1,i,i+1. Из них выбираем наиболее удаленную от прямой i-1,i+1.

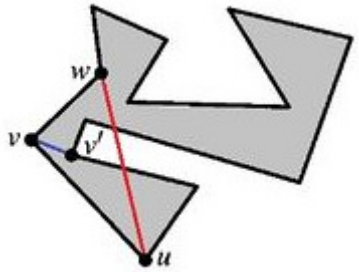


Триангуляция полигона методом вторгающейся вершины

• Если вторгающихся вершин не обнаружено, то отсекаем треугольник i-1,i,i+1, добавляем его в список треугольников, а из полигона удаляется i-тая вершина.
• Иначе производим разбиение полигона на два ребром с вершинами в точке i и найденной вторгающейся вершиной.
• Повторяем разбиение для полученных полигонов рекурсивно.
• В первом случае полигон 1, во втором – 2. Повторяем, пока полигон не превратится в треугольник.

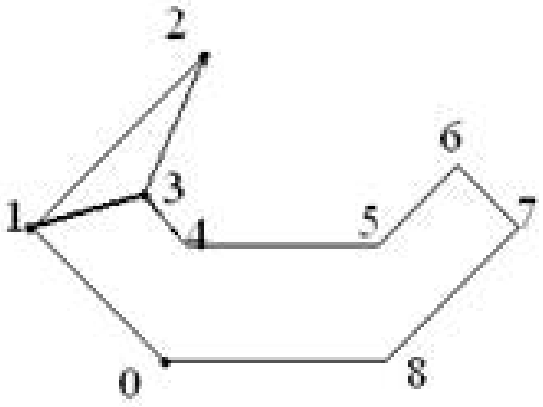






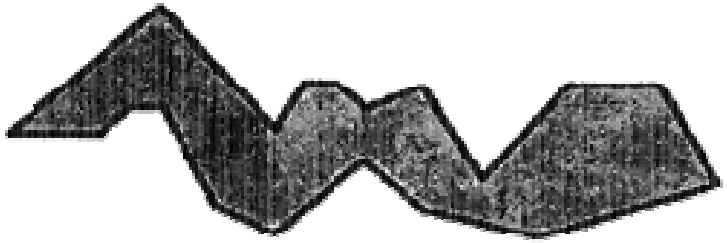
Как разрезать полигон на 2?

Разбивание по ребру: дублируем вершины, разрезаем его и переопределяем связи:

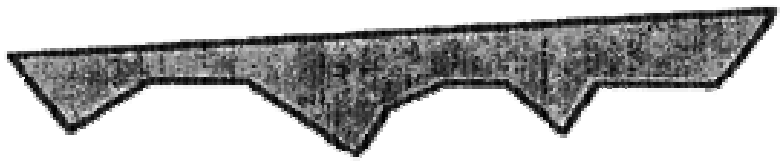


Триангуляция монотонного полигона

- Монотонный полигон образуется из 2 цепочек: верхней монотонной цепочки и нижней монотонной цепочки.
- Цепочка ребер называется монотонной, если ни один перпендикуляр к прямой между началом и концом цепочки не пересекает цепочку более одного раза.



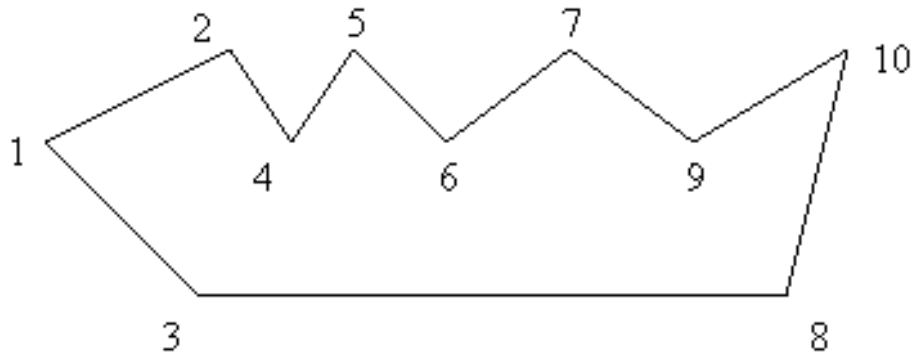
(а)



(б)

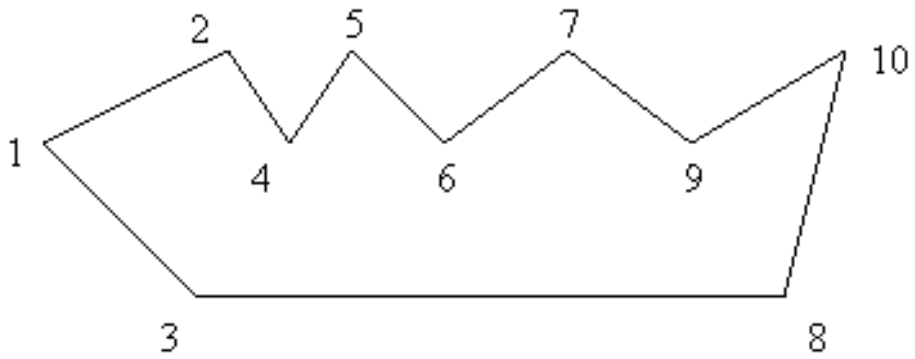
Триангуляция монотонного полигона

- Будем использовать стек, содержащий вершины. На выходе должны получить список треугольников.
- Вначале найдем левый и правый концы. Все, что по часовой стрелке слева направо – верхняя цепочка, а справа налево – нижняя.
- Необходимо также пометить в списке, какой цепочке принадлежит вершина.
- Нужно получить список всех вершин отсортированных по оси Ox.



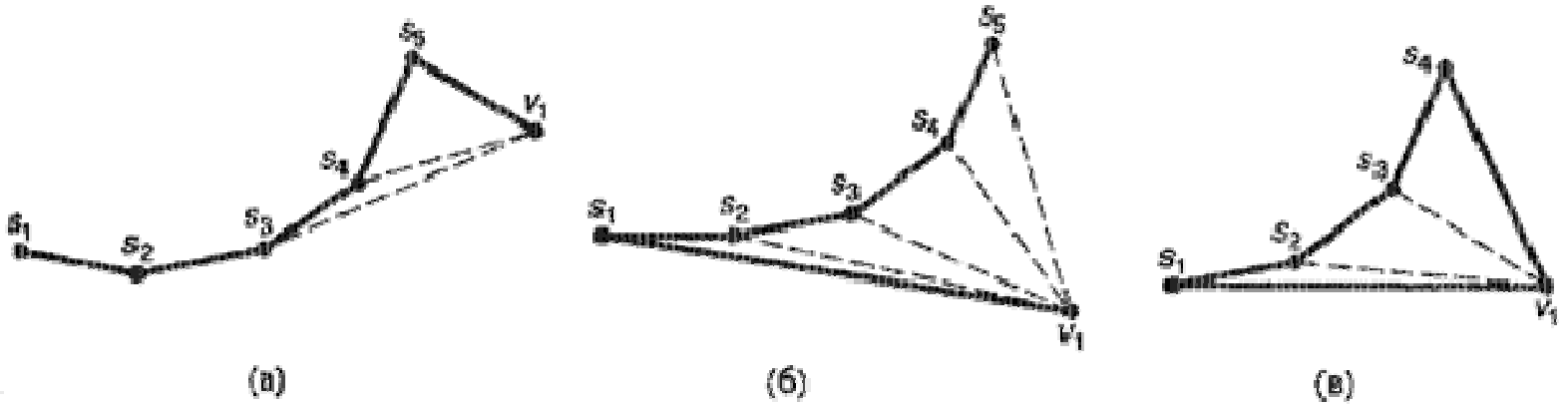
Триангуляция монотонного полигона

- В стек заносим левую границу.
- Берем следующую точку из отсортированных вершин.
- Если в стеке только одна вершина, то просто добавляем ее в стек.
- Если в стеке больше вершин, то проверяем, не образуют ли они треугольник или веерообразный полигон.
- **!!!** В нашем стеке первая вершина всегда доступна для просмотра.



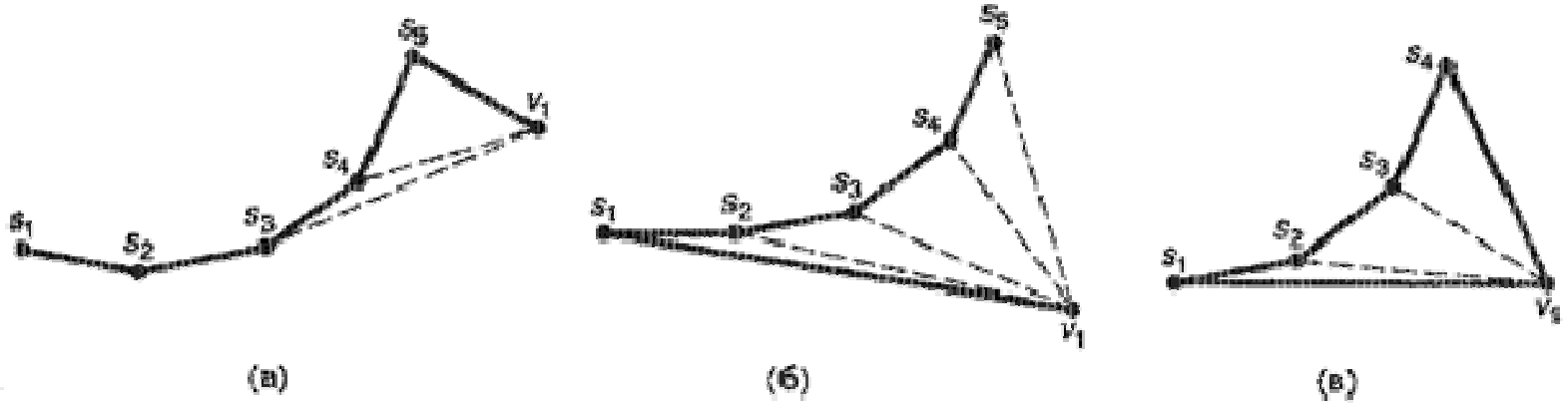
Триангуляция монотонного полигона

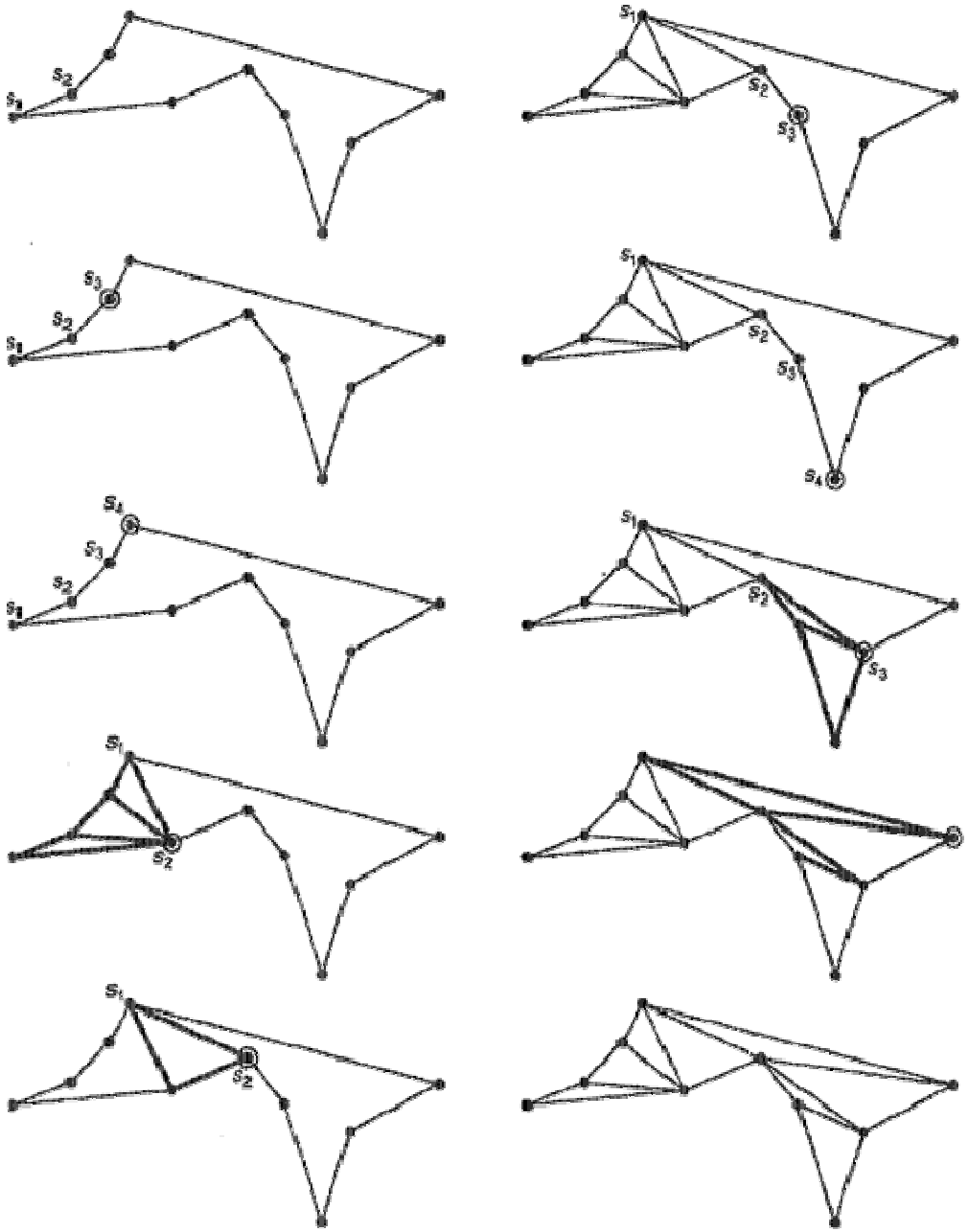
- S_t – последняя вершина в стеке.
- S_1 – первая вершина в стеке.
- При добавлении i-той вершины могут возникнуть 4 ситуации:
  - если V_i соседняя с S_t и не соседняя с V_1, то в случае, если внутренний угол $S_{t-1}S_tV_i$ меньше 180 градусов, то мы отсекаем треугольник $S_{t-1}S_tV_i$, т.е. в список треугольников заносим этот треугольник, в полигоне удаляем эту вершину, из стека удаляем S_t и опять анализируем V_i.



Триангуляция монотонного полигона

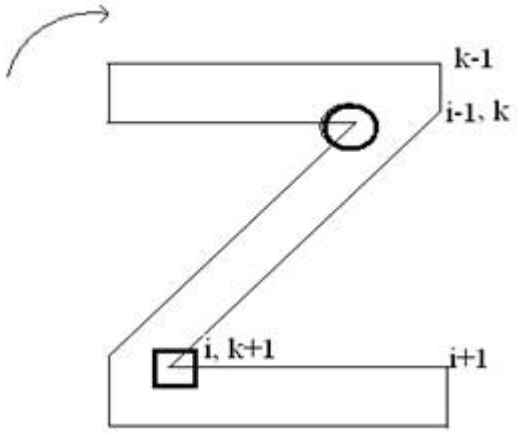
- Если V_i – соседняя с с S_1, но не соседняя с S_t, тогда получим веерообразный полигон.
- Отсекаем и бьём на треугольники, заносим их в список треугольников.
- Из стека удаляем все вершины и добавляем в него S_tV_i и рассматриваем следующую V_i.
- Если V_i – соседняя с S_1 и с S_t. Это означает, что V_i совпадает с V_n (последняя рассматриваемая точка) и получаем веерообразный полигон. Бьем его на треугольники и добавляем в список треугольников.
- Если ни одна из предыдущих ситуаций не подходит, то просто добавляем Vi в стек.




s_1
s_2
s_3
s_4

Разбиение монотонного на немонотонные

- Упорядочиваем все вершины по оси Ox. Выбираем самую левую вершину полигона.
- Начинаем двигаться слева направо до первого изгиба влево. В немонотонном полигоне монотонность нарушают изгибы.
- Они делятся на изгибы влево (*на рис. звездочка*) и изгибы вправо(*на рис. квадратик*). Изгиб является изгибом влево, если вершины (i+1), (i-1) имеют x больший (>=), чем вершина i. И соответственно, если меньший, то изгиб вправо.
- При таком определении существует опасность: можно внешнюю вершину принять за изгиб. Нас интересуют внутренние углы: если он больше 180 градусов, то этот угол является изгибом.

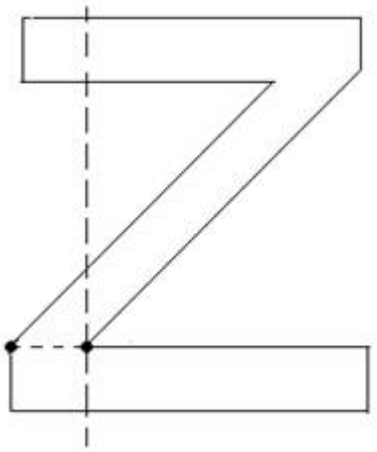


Разбиение монотонного на немонотонные

- производим разбиение по первому изгибу влево:

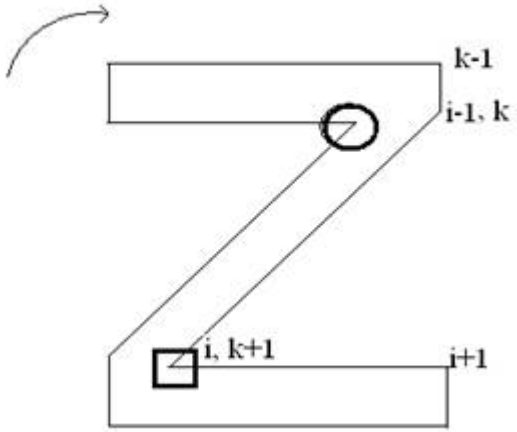
  a) через вершину изгиба проводим вертикальную прямую, чтобы найти ближайшие к вершине пересечения с верхним и нижним ребром.

  b) у этих ребер выбираем ближайшую по x вершину слева. Ищем между k-той и r-той вершиной ближайшую к r-той, если нет, то берем k-тую и разбиваем весь полигон на два.



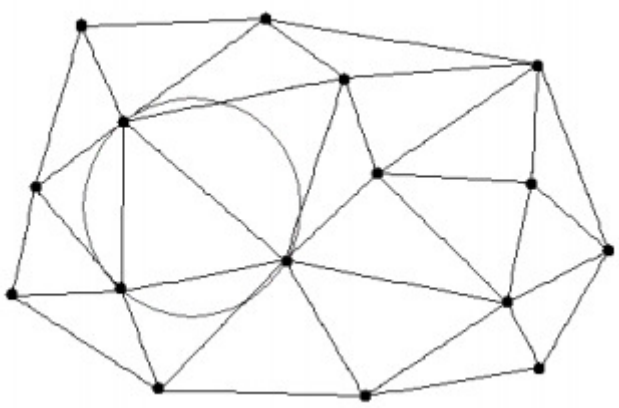
Разбиение монотонного на немонотонные

- продолжаем по отсортированному списку вершин двигаться вправо. Если находим очередной изгиб влево, то опять разбиваем.
- двигаемся справа налево в поисках изгиба вправо (для каждого полигона). Разбиение изгиба вправо производится аналогичным образом, только ближайшие точки ищутся справа.



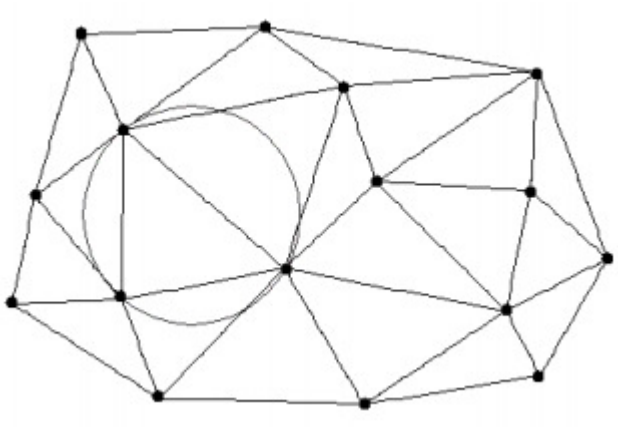
Триангуляция Делоне
советский математик Борис Делоне, 1934

- *Триангуляция для конечного набора точек S* является задачей триангуляции выпуклой оболочки *CH(S)*, охватывающей все точки набора *S*.
- Отрезки прямых линий при триангуляции не могут пересекаться – они могут только встречаться в общих точках принадлежащих ребру.



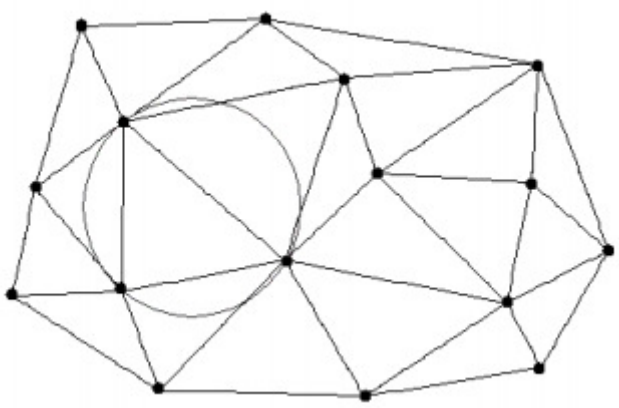
Триангуляция Делоне

- Все точки из набора *S* могут быть подразделены на *граничные* точки – те точки, которые лежат на границе выпуклой оболочки *CH(S)*, и *внутренние* точки – лежащие внутри выпуклой оболочки *CH(S)*.
- Также можно классифицировать и ребра, полученные в результате триангуляции *S*, как *ребра оболочки* и *внутренние* ребра.
- К ребрам оболочки относятся ребра, расположенные вдоль границы выпуклой оболочки *CH(S)*, а к внутренним ребрам – все остальные ребра, образующие сеть треугольников внутри выпуклой оболочки.

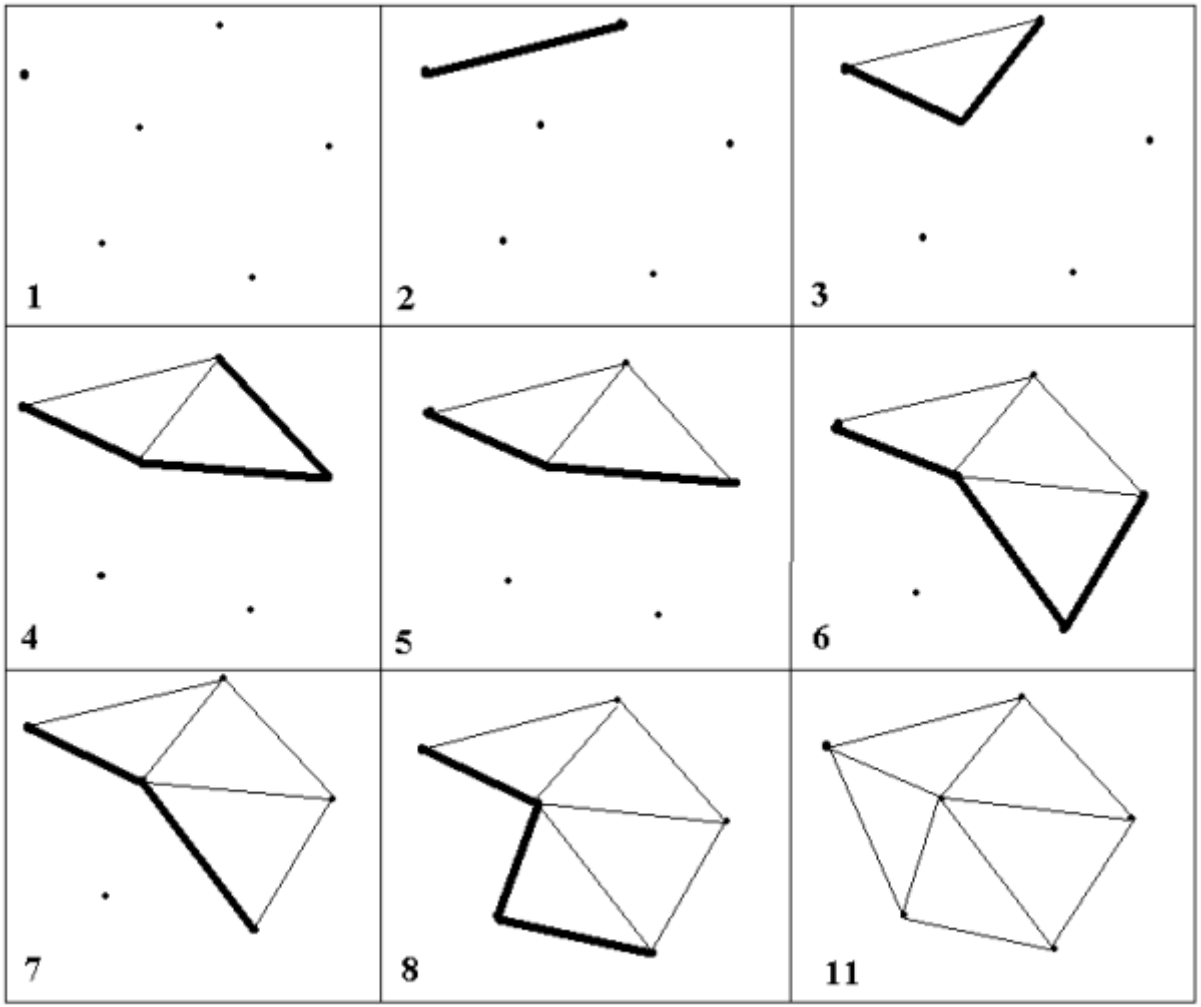


Триангуляция Делоне

- *Триангуляция Делоне* хорошо сбалансирована в том смысле, что формируемые треугольники стремятся к *равноугольности*, т.е. по возможности максимально приближенны к равносторонним треугольникам.



Пошаговое добавление рёбер



Триангуляция Делоне

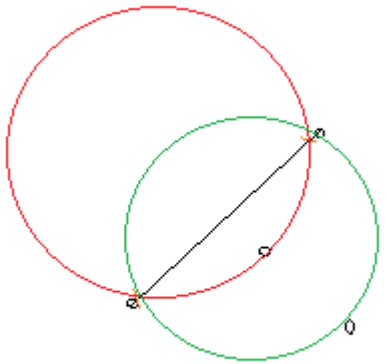
- Выбираем начальное ребро. Оно выбирается из алгоритма заворачивания подарков.
- Ребра, участвующие в построении полигона.
  - *Спящие* – ребра, которые далее будут рассматриваться.
  - *Мертвые* – уже рассматриваться не будут.
  - *Живые* – граница, не полностью обработанная.

- Итак, есть список точек, список треугольников, список живых ребер.
- 2. Занесли первое ребро в список живых ребер таким образом, чтобы известная область была слева по направлению, а неизвестная – справа. Слева построен треугольник или бесконечность.

Триангуляция Делоне

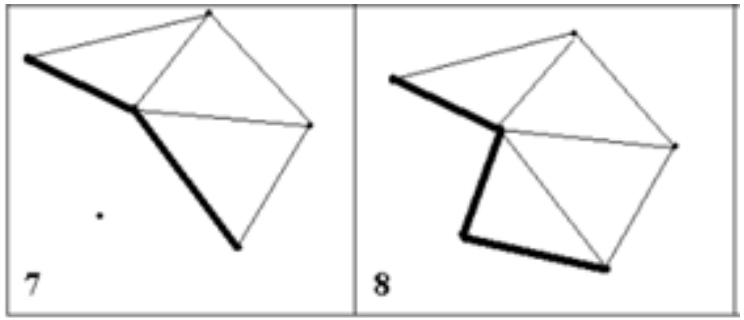
- Для каждого ребра из списка живых ребер: ищем правую сопряженную точку для построения треугольника.
- По правилу: правая сопряженная точка вместе с вершиной ребра должна образовывать окружность с минимальным радиусом из всех возможных сопряженных точек справа. (Минимальный радиус не по модулю, а по величине, с учетом знака). Если точка справа, а центр слева, то радиус отрицательный.

•Известно, что центр описанной окружности находится в точке пересечения 2 серединных перпендикуляров. Если мы находим середину ребра параметрически, то все будет удачно, так как чем меньше t, тем меньше параметр.



Триангуляция Делоне

- Если вновь найденные ребра отсутствуют в списке живых ребер, то мы их заносим в список живых ребер, причем так, чтобы направление соответствовало известной левой области и неизвестной правой.
- Если ребро было в списке живых ребер, то мы его удаляем, и оно становится мертвым.
- Если при поиске сопряженной точки обнаружили, что нет ни одной точки справа, то это означает, что ребро принадлежит границе полигона (выпуклой оболочки), тогда новый треугольник не формируется, а ребро из списка живых ребер также удаляется.



Литература

- *Прапарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: Введение = Computational Geometry An introduction. — М.: Мир, 1989. — С. 478.
- *Ласло М.* Вычислительная геометрия и компьютерная графика на С++. — М.: БИНОМ, 1997. — С. 304.
- *Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн.* Алгоритмы. Построение и анализ = Introduction to Algorithms. — 2-е изд. — “Вильямс”, 2005. — С. 1296.